УДК 517.9

О КРИТЕРИЯХ ОБРАТИМОСТИ В АЛГЕБРЕ КАУЗАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ *

© 2002 г. И. А. Криштал

Воронежский государственный университет

Пусть X — комплексное банахово пространство и $EndX$ — банахова алгебра эндоморфизмов (линейных ограниченных операторов) пространства X. В данной статье рассматривается некоторая подалгебра операторов из $EndX$, содержащая каузальные операторы [1—6]. Исследуются вопросы обратимости и каузальной обратимости таких операторов. Приведено несколько простых достаточных условий каузальной обратимости, а также необходимые и достаточные условия обратимости в $EndX$ в терминах экспоненциальной дихотомии некоторого семейства эволюционных операторов.

§ 1. КАУЗАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ПРИМЕРЫ

Потребность в определении каузальных операторов происходит изначально из теории систем, естественной математической моделью для изучения которых являются линейные операторы. Однако, не всякий оператор моделирует физически реализуемую систему [1]. Чтобы избежать различных проблем, связанных, например, с неустойчивостью, необходимо наложить на оператор некоторое условие, не позволяющее ему «предсказывать будущее». Поэтому все известные нам из литературы [1—4] определения каузальных операторов эквивалентны инвариантности оператора относительно некоторой цепочки подпространств, задающей временную структуру на X. Используемое в данной работе определение будет построено аналогичным образом, однако, для его введения нам потребуется ряд дополнительных понятий.

Итак, пусть $\mathbb{G}$ — локально компактная абелева (LCA-) группа, и $\hat{\mathbb{G}}$ − двойственная LCA-группа непрерывных унитарных характеров группы $\mathbb{G}$. Для записи алгебраической операции на обеих группах будем использовать аддитивную форму (если не оговорено противное). Символом $\mathrm{L}_1(\mathbb{G})$ обозначим алгебру измеримых (по мере Хаара) на $\mathbb{G}$ суммируемых комплексных классов функций, со сверткой в качестве умножения. Пусть также $\mathbb{S} \subseteq \hat{\mathbb{G}}$ — некоторая замкнутая полугруппа, такая что $-\mathbb{S} \cap \mathbb{S} = \{0\}$ и $0 \in \overline{\operatorname{int} \mathbb{S}}$, т.е. 0 лежит в замыкании внутренности $\mathbb{S}$. Следуя [7], введем сильно непрерывное ограниченное представление $\mathrm{T} : \mathbb{G} \to EndX$ группы $\mathbb{G}$ операторами из $EndX$. Такое представление позволяет наделить пространство X структурой банахова $\mathrm{L}_1(\mathbb{G})$-модуля по формуле

$$fx = \int_{\mathbb{G}} f(\mathrm{g})\, \mathrm{T}(-\mathrm{g}) x d\, \mathrm{g},\ x \in X,\ f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{G}). \quad (1)$$

Символом $\Lambda(x, \mathrm{T}) \subseteq \hat{\mathbb{G}}$ будем обозначать спектр Берлинга [7] вектора $x \in X$ относительно представления T, а символом $X_\gamma, \gamma \in \hat{\mathbb{G}}$, — спектральные подпространства вида $\{x \in X : \Lambda(x, \mathrm{T}) \subseteq \gamma + \mathbb{S}\}$.

Определение. Оператор $A \in EndX$ называется *каузальным* относительно представления T и полугруппы $\mathbb{S}$ (обозначается $A \in \mathcal{C}(X^{\mathrm{T}}, \mathbb{S})$), если $AX_\gamma \subseteq X_\gamma$ для всех $\gamma \in \hat{\mathbb{G}}$.

Если выбор представления и полугруппы заведомо ясен (или не имеет значения), то вместо $\mathcal{C}(X^{\mathrm{T}}, \mathbb{S})$ будем использовать только символ $\mathcal{C}$. Оператор, каузальный относительно представления T и полугруппы $-\mathbb{S}$ назовем антикаузальным и обозначим множество таких операторов $\mathcal{C}^*$. Оператор каузальный и антикаузальный одновременно назовем оператором без памяти, обозначив их множество символом $\mathcal{M} = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^*$.

Используя свойства спектра Берлинга [7—8] легко доказать, что $\mathcal{C}, \mathcal{C}^*$ и $\mathcal{M}$ являются замкнутыми в сильной операторной топологии подалгебрами из $EndX$. Также нетрудно

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00408).

доказать, что оператор $A \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда он перестановочен со всеми операторами $\mathrm{T}(g)$, $g \in \mathbb{G}$. Поэтому подалгебра $\mathcal{M}$ очевидно является наполненной, то есть обратный к оператору без памяти также является оператором без памяти. Подалгебра же каузальных операторов может и не являться наполненной, как мы увидим из примеров, завершающих этот параграф.

Пример 1. Пусть X — конечномерное евклидово пространство с ортонормированным базисом e_1, e_2, ... e_n и представление T: $\mathbb{T} \to EndX$ задано формулой

$$\mathrm{T}(\lambda)x = \sum_{k=1}^{n} \lambda^k (e_k, x)e_k,\ \lambda \in \mathbb{T},\ x \in X. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ — единичная окружность (поэтому групповая операция записана в мультипликативной форме) и символ $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение на X. LCA-группа $\hat{\mathbb{T}}$ естественным образом отождествляется с группой целых чисел $\mathbb{Z}$. Если положить $\mathbb{S} = \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, то $\mathcal{C}(X^{\mathrm{T}}, \mathbb{S})$ совпадет с множеством операторов, матрицы которых в рассматриваемом базисе нижнетреугольны. Соответственно $\mathcal{C}^*$ будет содержать операторы с верхнетреугольными матрицами, а $\mathcal{M}$ — с диагональными. Заметим, что в этом примере алгебра $\mathcal{C}$ является наполненной.

Пример 2. Пусть X — некоторое пространство комплексных функций, заданных на LCA-группе действительных чисел $\mathbb{R}$ (или на части $\mathbb{R}$), $\mathbb{S}=\mathbb{R}_+$ и представление T задано формулой

$$(\mathrm{T}(t)x)(s) = e^{its}x(s), t \in \mathbb{R}, x \in X. \qquad (3)$$

В этом случае спектр Берлинга функции совпадает с ее носителем, и каузальными будут операторы, которые не сдвигают носитель функции влево. К таким операторам относятся, в частности, операторы Вольтерра [3, 4]. Одним из более простых примеров является оператор сдвига $(Sx)(s) = x(s-1)$. При этом, очевидно, обратный оператор $(S^{-1}x)(s) = x(s+1)$ является антикаузальным.

Пример 3. Пусть $X = \mathrm{L}_p(\hat{\mathbb{G}}), p \in [1, \infty)$ — банахово пространство измеримых по мере Хаара (классов) функций, определенных на LCA-группе $\hat{\mathbb{G}}$ и суммируемых со степенью p. Определим представление T формулой

$$(\mathrm{T}(\mathrm{g})x)(\gamma) = \gamma(\mathrm{g})x(\gamma),\ \mathrm{g} \in \mathbb{G},\ \gamma \in \hat{\mathbb{G}},\ x \in X. \quad (4)$$

Заметим, что формулы (2), (3) есть по существу частные случаи формулы (4). Рассмотрим оператор $(Ax)(\gamma) = \int\limits_{\hat{\mathbb{G}}} x(\gamma - æ)\mu(d\, æ)$, где $\gamma \in \hat{\mathbb{G}}$ и μ — комплексная ограниченная мера на $\hat{\mathbb{G}}$. В [4] показано, что $A \in \mathcal{C}(X^{\mathrm{T}}, \mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда мера μ сконцентрирована в $\mathbb{S}$.

§ 2. КАУЗАЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Как видно из примеров предыдущего параграфа обратный к каузальному оператору может быть как каузальным, так и антикаузальным. Также нетрудно привести пример, когда он не является ни тем, ни другим. Поэтому вопрос о каузальной обратимости, то есть обратимости в алгебре каузальных операторов, заслуживает отдельного изучения. В этом параграфе собрано несколько относительно простых условий каузальной обратимости, которые являются следствиями общей теории линейных операторов и банаховых алгебр. Доказательства, если они не приведены в работе, можно найти в [1, 9].

Введем вначале несколько обозначений. Символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ будем обозначать спектр и резольвентное множество оператора A, а символами $\sigma_{пр}(A)$ и $\rho_{пр}(A)$ — его спектр и резольвентное множество в алгебре каузальных операторов. Через $r(A)$ обозначим спектральный радиус оператора A, а через I — тождественный оператор.

Лемма 1. Пусть $r(A) < 1$. Тогда $(I - A)^{-1} \in \mathcal{C}$.

Доказательство. Если $r(A) < 1$, то оператор $(I-A)^{-1}$ задается рядом Неймана $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ и является каузальным в силу замкнутости $\mathcal{C}$.

Следствие. Если $\lambda > r(A)$, то $\lambda \in \rho_{пр}(A)$.

Лемма 2. Имеет место включение $\sigma_{пр}(A) \supseteq \sigma(A)$, причем если $\rho(A) \supseteq \rho^*$ — некоторая компонента связности, то либо $\rho^* \subseteq \rho_{пр}(A)$, либо $\rho^* \subseteq \sigma_{пр}(A)$.

Следствие 1. Если $\rho(A)$ связно, то $\rho_{пр}(A) = \rho(A)$.

Следствие 2. Пусть X конечномерно. Тогда подалгебра $\mathcal{C}$ наполнена.

Следствие 3. Пусть $A \in \mathcal{C}$ — компактный оператор. Тогда $\rho_{пр}(A) = \rho(A)$.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathcal{C}$ и $A^{-n} \in \mathcal{C}$. Тогда $A^{-1} \in \mathcal{C}$.

Доказательство немедленно вытекает из равенств $A^{-1} = A^{n-1}A^{-n} \in \mathcal{C}$.

Лемма 4. Пусть направленность каузально обратимых операторов (A_α) сильно сходится к оператору A, и направленность сопряженных операторов (A_α^*), действующих в двойственном к X пространстве линейных ограниченных функционалов X^*, сильно сходится к сопряженному к A оператору A^*. Пусть также $\sup\left\|A_\alpha^{-1}\right\| < \infty$. Тогда оператор A^{-1} существует и каузален.

Доказательство. Пусть $\sup\left\|A_\alpha^{-1}\right\| = \mathrm{M} < \infty$. Покажем вначале, что оператор A равномерно инъективен. Это вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\|x\| \le \sup_\alpha \left\|A_\alpha^{-1}A_\alpha x\right\| \le \sup_\alpha \left\|A_\alpha^{-1}\right\|\left\|A_\alpha x\right\| \le \mathrm{M}\left\|A_\alpha x\right\|,$$

и сильной сходимости операторов A_a к A. Аналогичным образом доказывается, что оператор A^* равномерно инъективен. Поэтому оператор A обратим. Осталось показать, что оператор A^{-1} каузален. Оценки

$$\left\|A_\alpha^{-1} - A^{-1}x\right\| \le \sup\left\|A_\alpha^{-1}\right\|\left\|x - A_\alpha A^{-1}x\right\| \le$$
$$\le \mathrm{M}\left\|x - A_\alpha A^{-1}x\right\| = \mathrm{M}\left\|AA^{-1}x - A_\alpha A^{-1}x\right\|$$

позволяют утверждать, что направленность операторов (A_α^{-1}) сильно сходится к A^{-1}, и поэтому $A^{-1} \in \mathcal{C}$ в силу замкнутости $\mathcal{C}$ в сильной операторной топологии. Лемма доказана.

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Возьмем в качестве X пространство $l_p(\mathbb{Z}), p \in [1,\infty)$, двусторонних числовых последовательностей, суммируемых со степенью p, и определим представление Т по формуле, аналогичной (4). Рассмотрим последовательность операторов A_n, заданную формулой $(\mathrm{A}_n x)(k) = (\varepsilon_n + \delta_n)x(k), x \in X, n \in \mathbb{N}$. Здесь ε_n — числовая последовательность, сходящаяся к нулю, а $\delta_n = 1$, если $|k| \le n$, и $\delta_n = 0$ в противном случае. Легко видеть, что все операторы A_n, $n \in \mathbb{N}$ линейны и каузальны, и кроме того, сильно сходятся к тождественному оператору. Очевидно, что обратные операторы, задаваемые формулой $((A_n)^{-1}x)(k) = (\varepsilon_n + \delta_n)^{-1}x(k)$, также каузальны. Однако $\left\|(A_n)^{-1}\right\| = \varepsilon_n^{-1}$, то есть обратные не являются равномерно ограниченными (см. для сравнения [1]).

В завершение нашего обзора достаточных условий каузальной обратимости приведем еще один критерий, на этот раз, топологический.

Определение. Два обратимых оператора $A, B \in \mathcal{C}$ назовем *соединимыми*, если существует равномерно непрерывная функция $f:[0,1] \to \mathcal{C}$, такая что $f(0) = A, f(1) = B$ и операторы $f(t)$ обратимы для любого $t \in [0,1]$.

Заметим, что соединимость есть отношение эквивалентности на множестве обратимых операторов. Следующая лемма говорит об инвариантности каузальной обратимости относительно этого отношения, то есть о том, что все операторы из одного класса эквивалентности либо каузально обратимы, либо нет.

Лемма 5. Пусть оператор A каузально обратим, и A и B соединимы. Тогда оператор B также каузально обратим.

Нетрудно видеть, что все приведенные выше критерии каузальной обратимости (кроме леммы 4) являются на самом деле следствием этого утверждения. Более того большинство из рассмотренных каузально обратимых операторов соединимы с тождественным.

§ 3. КАУЗАЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ. ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ДВУХДИАГОНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Оставшаяся часть работы посвящена изучению условий обратимости и каузальной обратимости относительно полугруппы $\mathbb{Z}_+$ и бесконечномерного аналога представления, заданного формулой (1).

Как и в [1], будем считать, что имеется семейство проекторов $\mathcal{E} = \{E_n \in EndX, n \in \mathbb{Z}\}$, осуществляющее разложение единицы, т. е. $E_m E_n = 0$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}, m \ne n$ и для любого вектора x из X ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}} E_n x$ безусловно сходится к x. Таким образом, конечна величина

$$C(\mathcal{E}) = \sup_{\lambda_n \in \mathbb{T}} \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_n E_n\right\| \ge 1, \tag{5}$$

и мы можем определить ограниченное сильно непрерывное представление Т: $\mathbb{Z} \to EndX$ при помощи формулы

$$\mathrm{T}(\lambda)x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n E_n x,\ \lambda \in \mathbb{T},\ x \in X. \tag{6}$$

Определим также проекторнозначную функцию E: $\mathbb{Z} \to EndX$ в виде сильно сходящегося ряда $E(k)=\sum_{n\le k}E_n$. Заметим, что оператор $D\in\mathcal{C}(X^T,\mathbb{Z}_+)$, где T задано формулой (6), тогда и только тогда, когда для всех $n\in\mathbb{Z}$ имеют место равенства

$$E(n)DE(n)=E(n)D. \tag{7}$$

Теперь каждому оператору $A\in EndX$ поставим в соответствие функцию $\Phi_A\colon\mathbb{T}\to EndX$, имеющую вид $\Phi_A(\lambda)=\mathrm{T}(\lambda)A\,\mathrm{T}(\lambda^{-1})$, $\lambda\in\mathbb{T}$. Ввиду непрерывности этой функции в сильной операторной топологии, мы можем рассмотреть ее ряд Фурье:

$$\Phi_A(\lambda)x\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda^n A_n x. \tag{8}$$

Здесь $A\in EndX$ — коэффициенты Фурье, заданные формулой

$$A_n x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\lambda^{-n}\Phi_A(\lambda)x\,d\lambda. \tag{9}$$

Ряд в (8) будем называть рядом Фурье оператора A, а коэффициенты A_n — его коэффициентами Фурье. Как следует из [10, 11], каждый коэффициент Фурье A_n оператора A допускает представление в виде сильно и безусловно сходящегося ряда

$$A_n=\sum_{i,j\in\mathbb{Z},\,i-j=n}E_iAE_j=\sum_{i,j\in\mathbb{Z},\,i-j=n}A_{ij}. \tag{10}$$

Матрицу, составленную из операторных блоков A_{ij}, $i,j\in\mathbb{Z}$, естественно назвать матрицей оператора A, а семейство $\{A_{ij},\ i-j=n\}$, где $n\in\mathbb{Z}$, — ее n-й диагональю. Из (10) немедленно следует, что все диагонали матрицы оператора A_n нулевые, за исключением n-й, которая совпадает с n-й диагональю матрицы оператора A. Легко проверить, что оператор $A\in\mathcal{C}(X^T,\mathbb{Z}_+)$ тогда и только тогда, когда его матрица нижнетреугольна. Поэтому, если $A\in\mathcal{C}(X^T,\mathbb{Z}_+)$, то ряд Фурье функции $\Phi_A(\lambda)x$ имеет вид $\sum_{n\ge 0}\lambda^n A_n x$. Следовательно [12], последовательность частичных сумм $\sum_{n=0}^{k}\left(1-\frac{|n|}{k}\right)\lambda^n A_n$ сильно сходится к $\Phi_A(\lambda)$, и формула

$$\Phi_A(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\Phi_A(\lambda)}{\lambda-z}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}}\frac{\sum_{n=0}^{k}\left(1-\frac{|n|}{k}\right)\lambda^n A_n}{\lambda-z}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\left(1-\tfrac{|n|}{k}\right)A_n\int_{\mathbb{T}}\frac{\lambda^n}{\lambda-z}\,d\theta= \tag{11}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}\left(1-\tfrac{|n|}{k}\right)z^nA_n=\sum_{n=0}^{\infty}z^nA_n$$

определяет голоморфное расширение функции $\Phi_A(\lambda)$ на круг $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, непрерывное в его замыкании (в формуле (11) сходимость пределов и интегралов понимается в смысле сильной операторной топологии). Таким образом нами наполовину доказана следующая

Лемма 6. Оператор A из $EndX$ принадлежит $\mathcal{C}(X^T,\mathbb{Z}_+)$ тогда и только тогда, когда функция $\Phi_A(\lambda)$ допускает голоморфное расширение на круг $\mathbb{U}$, непрерывное в его замыкании.

Доказательство. Как было показано выше, если $A\in\mathcal{C}(X^T,\mathbb{Z}_+)$, то формула (11) определяет искомое расширение. Обратное же утверждение почти очевидно. Пусть существует функция $\Phi_A(z)$, голоморфная на круге $\mathbb{U}$, непрерывная на $\mathbb{U}\cup\mathbb{T}$ и равная $\Phi_A(\lambda)$ на $\mathbb{T}$. Тогда на $\mathbb{U}$ имеет место равенство $\Phi_A(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{A}_nz^n$, и в силу непрерывности коэффициенты Фурье A_n оператора A равны нулю для всех $n<0$. Следовательно, $A\in\mathcal{C}$.

Из доказанной леммы немедленно вытекает следующая

Теорема 1. Оператор A из $\mathcal{C}(X^T,\mathbb{Z}_+)$ каузально обратим тогда и только тогда, когда для любого z из круга $\mathbb{U}\cup\mathbb{T}$ оператор $\Phi_A(z)$ обратим.

Доказательство. Пусть A каузально обратим и $A^{-1}=B$. Тогда существуют расширения $\Phi_A(z)$ и $\Phi_B(z)$, определенные формулой (11). Покажем, что $\forall z\in\mathbb{U}\cup\mathbb{T}$ оператор $\Phi_B(z)$ является обратным для $\Phi_A(z)$. Для $z\in\mathbb{T}$ это утверждение очевидно. Для $z\in\mathbb{U}$ оно следует из равенств

$$\Phi_A(z)\Phi_B(z)=\left(\sum_{m=0}^{\infty}z^mA_m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^nB_n\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{m=0}^{k}z^mA_m\cdot\sum_{n=0}^{k}z^nB_n\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{2k}\left[\sum_{n=0}^{m}A_nB_{m-n}\right]z^m=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{2k}\left[\sum_{n=0}^{m}A_nB_{m-n}\right]\int_{\mathbb{T}}\frac{\lambda^m}{\lambda-z}\,d\lambda=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_A(\lambda)\Phi_B(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{I}{\lambda - z}\,d\lambda = I.$$

Пусть, обратно, для любого z из единичного круга $\mathbb{U} \cup \mathbb{T}$ существует оператор $\Phi_B(z)$, обратный к оператору $\Phi_A(z)$. Так как функция $\Phi_A(z)$ голоморфна на $\mathbb{U}$ и непрерывна на $\mathbb{U} \cup \mathbb{T}$, то и $\Phi_B(z)$ обладает теми же свойствами. Следовательно, по лемме 6 оператор $\Phi_B(z) = A^{-1}$ является каузальным, что и означает каузальную обратимость оператора A.

В заключении данного параграфа изучаются условия обратимости и каузальной обратимости линейного оператора $D = I - A$, где $A = A_n$ есть n-я диагональ матрицы оператора D. Такие операторы естественно назвать двухдиагональными. Аналогичные исследования в несколько более общем случае изложены в работах [5, 6]. Примеры таких операторов можно найти в [13, 14].

Лемма 7. Пусть оператор D обратим. Тогда $\mathbb{T} \subseteq \rho(D)$.

Замечание. Условие $\mathbb{T} \subseteq \rho(D)$ эквивалентно условию экспоненциальной дихотомии некоторого семейства эволюционных операторов, построенного по оператору A (см. [15]).

Доказательство леммы. Пусть оператор D обратим. Тогда обратимы и все операторы $\Phi_D(\lambda) = \mathrm{T}(\lambda) D\, \mathrm{T}(\lambda^{-1}) = I - \lambda^{-n}A,\ \lambda \in \mathbb{T}$. Поэтому $\mathbb{T} \subseteq \rho(D)$.

Таким образом, если оператор D обратим, то его спектр A разбивается на две замкнутые непересекающиеся части, одна из которых лежит внутри единичной окружности, а другая вне ее. Обозначим через P проектор Рисса на компактную спектральную часть оператора A, а через Q — дополнительный проектор. Тогда оператор D разлагается в прямую сумму операторов

$$D = (I - AP) \oplus (I - AQ),$$

причем $r(AP) < 1$ и $r((AQ)^{-1}) < 1$. Поэтому имеет место

Теорема 2. Обратный к оператору D имеет вид

$$D^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (AP)^k \oplus \sum_{k=1}^{\infty} (AQ)^{-k}. \qquad (12)$$

Нетрудно видеть, что оператор $(AQ)^{-1}$ является антикаузальным. Поэтому формула (12) представляет собой разложение оператора D^{-1} в сумму каузального и антикаузального.

Следствие. Оператор D каузально обратим тогда и только тогда, когда спектральный радиус оператора A меньше единицы.

Замечание. Оператор, матрица которого имеет конечное число диагоналей, можно свести к двухдиагональному путем укрупнения разложения единицы $\mathcal{E}$.

§ 4. ОБРАТИМОСТЬ КАУЗАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ

В заключительном параграфе мы рассматриваем каузальные операторы с матрицей, имеющей бесконечное число ненулевых диагоналей.

Определение. Назовем оператор A из $EndX$ оператором с экспоненциально суммируемой памятью (см. [3]), если существуют постоянные $M = M(A)$ и $\tau = \tau(A) \in (0,1)$, такие что $\|A_n\| \le M\tau^{|n|},\ n \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем мы рассматриваем только такие операторы, а их множество обозначаем символом End_0X. Непосредственно из определения следует, что ряды Фурье операторов из End_0X абсолютно сходятся. Более того, в [10,11] показано, что End_0X — наполненная подалгебра из $EndX$. При этом коэффициенты Фурье оператора $C = AB$, имеют вид

$$C_n = \sum_{i,j\in\mathbb{Z},\, i+j=n} A_i B_j,\ n \in Z, \qquad (13)$$

где A_i и B_j — коэффициенты Фурье операторов A и B из End_0X соответственно.

Пусть оператор $D = I - A$ принадлежит End_0X, и коэффициенты Фурье A_n оператора A равны нулю при $n \le 0$. Заметим, что матрица оператора A — строго нижнетреугольна. Операторы с такими свойствами будем называть строго каузальными (см. для сравнения [1]).

Построим по оператору D семейство эволюционных операторов $\mathcal{U} = \mathcal{U}_D = \{U(m,n) \in EndX,\ m,n \in \mathbb{Z}\}$. Для этого положим $U(n,n-1) = E(n) - E_nD,\ n \in \mathbb{Z}$, и

$$U(m,n) = \begin{cases} U(m,m-1)\cdot \ldots \cdot U(n+1,n), & m > n \\ E(m), & m \le n \end{cases}, \qquad (14)$$
$$m,n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что по определению $U(m,n) = U(m,k)\,U(k,n)$ для любых $n \le k,\ m \in \mathbb{Z}$.

Определение. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_D$ обладает свойством экспоненциальной дихотомии, если существует ограниченная проекторнозначная функция $P:\mathbb{Z}\to EndX$, которая для всех $n\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет следующим четырем условиям:

1) $P(n) = E(n)P(n) = P(n)E(n)$;

2) $E(n)DQ(n) = 0$, где $Q(n) = E(n) - P(n)$ — «дополнительный» проектор;

3) $U(n,n-1)P(n-1) = P(n)U(n,n-1)$;

4) существуют постоянные $M>0$ и $t\in(0,1)$, такие что

$\|E_mU(m,n)P(n)E_n\|\le M\tau^{m-n}$, при $n\le m\in\mathbb{Z}$ и

$\|E_mU(m,n)Q(n)E_n\|\le M\tau^{n-m}$, при $n>m\in\mathbb{Z}$.

В дальнейшем про участвующие в определении экспоненциальной дихотомии проекторнозначные функции P и Q будем говорить, что они порождают экспоненциальную дихотомию семейства $\mathcal{U}$ эволюционных операторов. Отметим, что в силу условия 1) образ проектора $P(n)$ лежит на образе $E(n)$, и поэтому оператор $Q(n)$ действительно является проектором. Если $Q\equiv 0$, то экспоненциальную дихотомию называют тривиальной. Заметим также, что определения эволюционного семейства и экспоненциальной дихотомии несколько отличаются от использованных в [13, 14]. В каком-то смысле более близкое к нашему определение экспоненциальной дихотомии можно найти в [2, 3].

Основным результатом настоящего параграфа является следующая

Теорема 3. Оператор D обратим тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_D$ допускает экспоненциальную дихотомию. При этом обратный к D оператор $D^{-1}=L$ имеет вид

$$L=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{m}E_mU(m,n)P(n)E_n-\\-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty}E_mU(m,n)Q(n)E_n,\qquad(15)$$

причем ряды по n сходятся абсолютно, а по m — сильно и безусловно.

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор D обратим. Определим операторнозначные функции $P,Q:\mathbb{Z}\to EndX$ при помощи равенств

$$P(n)=E(n)D^{-1}E(n)D$$

и

$$Q(n)=E(n)-P(n)=E(n)D^{-1}(I-E(n))D,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Используя (7), для всех $n\in\mathbb{Z}$ получаем

$$P(n)E(n)=E(n)D^{-1}E(n)DE(n)=\\=E(n)D^{-1}E(n)D=P(n)$$

и

$$P(n)^2=E(n)D^{-1}E(n)DE(n)D^{-1}E(n)D=\\=E(n)D^{-1}E(n)DD^{-1}E(n)D=E(n)D^{-1}E(n)D=P(n).$$

Поэтому P и Q на самом деле проекторнозначные функции, причем P удовлетворяет условию 1). Таким образом, чтобы доказать, что P и Q порождают экспоненциальную дихотомию семейства $\mathcal{U}_D$ эволюционных операторов осталось проверить условия 2)—4).

Условие 2) немедленно вытекает из следующих равенств, верных в силу каузальности оператора D и формулы (7):

$$E(n)DQ(n)=E(n)DE(n)D^{-1}(I-E(n))D=\\=E(n)DD^{-1}(I-E(n))D=0,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Перейдем к условию 3). С одной стороны из (7), (14) вытекает

$$U(n,n-1)P(n-1)=(E(n)-E_nD)E(n-1)D^{-1}E(n-1)D=\\=E(n-1)D^{-1}E(n-1)D-E_nDE(n-1)D^{-1}E(n-1)D=\\=E(n)D^{-1}E(n-1)D-E_nD^{-1}E(n-1)D-\\-E_nDD^{-1}E(n-1)D+E_nDE_nD^{-1}E(n-1)D=\\=E(n)D^{-1}E(n-1)D-E_nD^{-1}E(n-1)D+\\+E_nD^{-1}E(n-1)D=E(n)D^{-1}E(n-1)D,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

С другой стороны, применяя те же формулы (7), (14), получаем

$$P(n)U(n,n-1)=E(n)D^{-1}E(n)D(E(n)-E_nD)=\\=E(n)D^{-1}E(n)D-E(n)D^{-1}E(n)DE_nD=\\=E(n)D^{-1}E(n)D-E(n)D^{-1}E_nD=E(n)D^{-1}E(n-\\1)D,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, условие 3) выполнено. Более того, отсюда по индукции следуют важные для нас равенства

$$U(m,n)P(n)=P(m)U(m,n)=E(m)D^{-1}E(n)D,\\U(m,n)Q(n)=Q(m)U(m,n)=\\=E(m)D^{-1}(I-E(n))D,\ m,n\in\mathbb{Z}.\qquad(16)$$

Для проверки условия 4) воспользуемся тем, что $D^{-1}\in End_0X$ (подалгебра End_0X наполнена), формулами (5), (16) и оценками

$$\|E_mU(m,n)P(n)E_n\|=\|E_mD^{-1}E(n)DE_n\|=\\=\|E_mD^{-1}E_n\|=\|E_m(D^{-1})_{m-n}E_n\|\le(C(\mathcal{E}))^2M\tau^{m-n}$$

для $n\le m\in\mathbb{Z}$;

$$\|E_mU(m,n)Q(n)E_n\|=\|E_mD^{-1}(I-E(n))DE_n\|=\\=\|E_mD^{-1}DE_n-E_mD^{-1}E_nDE_n\|=\|E_mD^{-1}E_n\|=\\=\|E_m(D^{-1})_{m-n}E_n\|\le(C(\mathcal{E}))^2M\tau^{n-m}$$

для $n>m\in\mathbb{Z}$.

Здесь $(D^{-1})_{m-n}$ — коэффициенты Фурье оператора D^{-1}.

Итак, мы доказали, что проекторнозначные функции P и Q порождают экспоненциальную дихотомию семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}_D$. Используя оценки из 4) получаем, что формула (15) корректно определяет оператор L. Действительно, оценки обеспечивают равномерную сходимость рядов по n, из чего следует сильная и безусловная сходимость рядов по m. Осталось показать, что $L = D^{-1}$. Для этого достаточно проверить равенство $LD = I$. Воспользуемся для этого следующей цепочкой равенств (сходимость рядов по m понимается в сильном смысле):

$$LD = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{m} E_m U(m,n)P(n)E_n D -$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty} E_m U(m,n)Q(n)E_n D =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{m} E_m U(m,n)P(n)\big(E(n) - U(n,n-1)\big) -$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty} E_m U(m,n)Q(n)\big(E(n) - U(n,n-1)\big) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{m} E_m \big(U(m,n)P(n) - U(m,n-1)P(n-1)\big) -$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty} E_m \big(U(m,n)Q(n) - U(m,n-1)Q(n-1)\big) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m U(m,m)P(m) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m U(m,m)Q(m) =$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m = I.$$

Итак, первая часть теоремы доказана.

Достаточность. Пусть теперь семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_D$ обладает свойством экспоненциальной дихотомии. Покажем, что оператор D обратим, и $D^{-1} = L$ определен формулой (15). Во-первых, оценки из условия 4) экспоненциальной дихотомии обеспечивают корректность определения оператора L. Во-вторых, в силу условия 2) равенства, использованные в первой части теоремы для доказательства того, что $LD = I$, остаются верны. Таким образом, осталось показать, что $DL = I$.

Покажем вначале, что оператор DL каузален, или, что эквивалентно, $E(n-1)DLE_n = 0$, для любого $n \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$E(n-1)DLE_n =$$
$$= -\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=m+1}^{+\infty} E(n-1)DE_m U(m,k)Q(k)E_k E_n =$$
$$= -\sum_{m=-\infty}^{n-1} E(n-1)DE_m U(m,n)Q(n)E_n =$$
$$= -\sum_{m=-\infty}^{n-1} E(n-1)DE_m Q(n)E_n =$$
$$= -E(n-1)DE(n-1)Q(n)E_n =$$
$$= -E(n-1)DQ(n)E_n = 0.$$

Здесь мы вновь воспользовались каузальностью оператора D, формулами (7), (14), а также условием 3) из определения экспоненциальной дихотомии.

Теперь покажем, что главная (нулевая) диагональ матрицы оператора DL совпадает с главной диагональю матрицы тождественного оператора. Действительно, для всех $n \in \mathbb{Z}$

$$E_n DLE_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{m} E_n DE_m U(m,k)P(k)E_k E_n -$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=m+1}^{+\infty} E_n DE_m U(m,k)Q(k)E_k E_n =$$
$$= E_n DE_n U(n,n)P(n)E_n - \sum_{m=-\infty}^{n-1} E_n DE_m E(m)Q(n)E_n =$$
$$= E_n P(n)E_n - E_n DE(n-1)Q(n)E_n =$$
$$= E_n P(n)E_n - E_n DE(n)Q(n)E_n + E_n DE_n Q(n)E_n =$$
$$= E_n P(n)E_n + E_n Q(n)E_n = E_n.$$

В этих равенствах мы воспользовались условием 3) экспоненциальной дихотомии и формулами (14).

Итак, мы доказали, что оператор DL имеет вид $DL = I + C$, где C — строго каузальный оператор. С другой стороны, так как $LD = I$, то DL — проектор. Поэтому $(I + C)^2 = I + 2C + C^2 = I + C$, откуда $C + C^2 = 0$. Однако, оператор C строго каузален, и поэтому, исходя из формул (13), если первая ненулевая диагональ его матрицы имеет номер $k > 0$, то первая ненулевая диагональ матрицы оператора C^2 имеет номер $2k > k$. Отсюда неизбежно $C = 0$ и $DL = I$.

Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема легко обобщается на случай, когда оператор D имеет вид $D = M - A$, где M — произвольный обратимый оператор без памяти. Кроме того, аналогичный результат имеет место и для других наполненных подалгебр, рассматриваемых в [10, 11], при соответствующей формулировке условия 4) в определении дихотомии.

Теорема 4. Оператор D каузально обратим тогда и только тогда, когда семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}_D$ допускает тривиальную экспоненциальную дихотомию.

Доказательство. Если дихотомия семейства $\mathcal{U}_D$ тривиальна, то каузальность оператора D^{-1} очевидна. Если же оператор D^{-1} каузален, то из теоремы 3 и формулы (7) следует, что $Q(n) = E(n)D^{-1}(I - E(n))D = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема доказана.

Замечание. В силу свойства 2) в определении экспоненциальной дихотомии равенство $P \equiv 0$ никогда не имеет места. Это, однако, не значит, что первое слагаемое в формуле (15) всегда отлично от нуля. Например, если оператор D действует в одном из пространств $l_p(\mathbb{Z}), p \in [1,\infty)$, и равен

$$(Dx)(n) = ((I - 2S)x)(n) = x(n) - 2x(n-1),$$

то $D^{-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} S^{-k}$, где $(S^{-k}x)(n) = x(n+k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Если оператор D каузально обратим и оператор A имеет хотя бы две неравные нулю диагонали, то возможно $\mathrm{r}(A) = 1$. Рассмотрим, например, оператор A, действующий в $l_p(\mathbb{Z}), p \in [1,\infty)$, и равный $A = \frac{2i}{3}S + \frac{i}{3}S^2$, где i — мнимая единица и S — оператор сдвига (как и в предыдущем замечании). Используя теорему об отображении спектра [9] и зная, что $\sigma(S) = \mathbb{T}$, находим, что $\sigma(A) = \{\frac{2i}{3}\lambda + \frac{i}{3}\lambda^2, \lambda \in \mathbb{T}\}$. Отсюда получаем, что $\mathrm{r}(A) = 1$, причем $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \{i\}$. Поэтому в силу леммы 2 оператор $D = I - A$ каузально обратим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feintuch R.* Saeks. System Theory. A Hilbert Space Approach. Academic press. New York, London, 1982.

2. *Kurbatov V.G.* Functional Differential Operators and Equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1999.

3. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд. ВГУ, 1990.

4. *Студеникин А. А.* Операторы свертки с мерой, сконцентрированной в подполугруппе. // Деп. в ВИНИТИ, Липецк, 1998.

5. *Криштал И. А.* Обратимость и каузальная обратимость операторов с двухточечным спектром Берлинга. // Изв. РАЕН МММИУ, 2000. Т. 4. № 4, С. 147—151..

6. *Криштал И. А.* О причинной обратимости операторов в пространстве двухсторонних последовательностей. // Сборник научных трудов «Системное моделирование социально-экономических процессов». Воронеж: Изд. ВГУ, 2000. С. 133—135.

7. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд. ВГУ, 1987.

8. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.

9. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1966.

10. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ. // Сиб. мат. журнал, 1997. Т. 38. № 1. С. 14—28.

11. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов. // Изв. РАН, 1997. Т. 61. № 6. С. 3—26.

12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Мир, 1965.

13. *Баскаков А. Г* Обратимость и фредгольмовость разностных операторов. // Мат. заметки, 2000. Т. 67. № 6. С. 816—827.

14. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов и спектральный анализ линейных дифференциальных операторов. // Функ. ан. и прил., 1996. Т. 30. № 3. С. 1—11.

15. *Parrot S.* Weighted Translation Operators. // Dissert. Abstrs., 1965. V. 26. № 5. P. 2781