УДК 537.86:519.2

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРАВИЛЬНОГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБНАРУЖЕНИЯ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ С АМПЛИТУДОЙ НАКАГАМИ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

© 2002 г. В. И. Костылев

Воронежский государственный университет

Определено распределение решающей статистики энергетического обнаружителя в случае приема аддитивной смеси квазидетерминированного радиосигнала со случайной амплитудой Накагами и гауссовского белого шума с неизвестной интенсивностью. Получено выражение для вероятности правильного энергетического обнаружения.

Для обнаружения неизвестного детерминированного сигнала, когда оптимальный приемник реализован быть не может, в [1] предложено использовать энергетический приемник. В [1, 2] показано, что выходной сигнал энергетического приемника имеет хи-квадрат распределение, причем нецентральное, если на входе приемника присутствует обнаруживаемый детерминированный сигнал.

В теории радиофизических систем наряду с моделью детерминированного сигнала широко распространена модель квазидетерминированного сигнала

$$s(t) = \mathrm{Re}\{AU(t)\exp[j(2\pi f_0 t + \varphi)]\}, \qquad (1)$$

где A — случайная амплитуда; $U(t)$ — нормированная детерминированная комплексная огибающая; f_0 — несущая частота; φ — случайная начальная фаза. Если $U(t)$ неизвестна, то для обнаружения сигнала (1), как и для обнаружения детерминированного неизвестного сигнала [1], используют энергетический приемник. При этом распределение решающей статистики — выходного сигнала энергетического приемника — может отличаться от хи-квадрат распределения.

Для случая рэлеевской амплитуды обнаруживаемого сигнала распределение решающей статистики дискретного энергетического обнаружителя получено и проанализировано в [3], а для случая амплитуды Накагами — в [4]. Однако полученные в [3, 4] выражения предполагали, что спектральная плотность мощности N_0 шума априори точно известна. Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности проанализировано в [5] для случаев детерминированной и случайной рэлеевской амплитуд обнаруживаемых сигналов.

Цель настоящей статьи — определить характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированного радиосигнала со случайной амплитудой, распределенной по закону Накагами, на фоне белого гауссовского шума неизвестной интенсивности.

При неизвестной интенсивности шума неопределенность относительно N_0 не позволяет выбрать значение порога h, априорно обеспечивающее заданную вероятность ложной тревоги дискретного энергетического обнаружителя. Как и в [5] будем полагать, что в целях стабилизации вероятности ложной тревоги дисперсия $D = N_0\Delta f/2$ шума $n(t)$ на выходе полосового фильтра измеряется заранее по правилу

$$\widehat{D} = \frac{1}{2L}\sum_{k=0}^{L}\left|X\left(-\frac{k+1}{\Delta f}\right)\right|^2$$

в течение интервала времени $[-(L+1)/\Delta f, -1/\Delta f]$ длительностью $\tau = L/\Delta f$, где Δf — ширина спектра обнаруживаемого сигнала; $X(t)$ — комплексная огибающая узкополосного сигнала $x(t)$ на выходе полосового фильтра [6]; L — база обработки шума при обучении (база обучения); $\widehat{D} = \widehat{N}_0\Delta f/2$ — оценка дисперсии D шума на выходе полосового фильтра, $\widehat{N}_0$ —

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00356.

оценка спектральной плотности мощности входного белого шума.

Описанная процедура соответствует задаче обнаружения с обучением (с учителем) [5], при котором система обнаружения прежде, чем обнаружить сигнал, настраивается на нужные значения параметра обстановки (в рассматриваемом случае — интенсивности шума).

В [5] показано, что в отсутствии обнаруживаемого сигнала решающая статистика Ξ энергетического обнаружения с учителем имеет распределение Фишера—Снедекора и вероятность ложной тревоги определяется формулой

$$\hat{P}_0 = \Pr\{\hat{\Xi} \geq h \,|\mathrm{H}_0\} = \mathrm{I}_{1-\Omega}(\nu/2, \mu/2) = \\ = 1 - \mathrm{I}_{\Omega}(\mu/2, \nu/2),$$

где H_0 — гипотеза об отсутствии обнаруживаемого сигнала; $\Omega = h/(h+\nu)$; $\nu = 2(L+1)$ — число степеней свободы при обучении; $\mu = 2(B+1)$ — число степеней свободы при обнаружении; $B = T\Delta f$ — база обработки сигнала $x(t)$ при обнаружении (база обнаружения); $\mathrm{I}_z(a, b) = \mathrm{B}_z(a, b)/\mathrm{B}(a, b)$ — нормированная неполная бета-функция [7]; $\mathrm{B}_z(a, b)$ — неполная бета-функция [7]; $\mathrm{B}(a, b)$ — бета-функция [7].

В [4] показано, что при традиционном (без обучения) энергетическом обнаружении радиосигнала со случайной амплитудой, распределенной по закону Накагами, решающая статистика Ξ может быть представлена в виде суммы двух независимых гамма-статистик, а именно

$$\Xi|\mathrm{H}_1 = \gamma_{2,B-m+1} + \gamma_{2+\overline{d^2}/m,m}, \tag{2}$$

где H_1 — гипотеза о наличии обнаруживаемого сигнала; $\gamma_{a,\,A}$ — гамма-статистика с плотностью вероятности $w_\gamma(x;a,A) = 1(x)a^{-A}x^{A-1}\exp(-x/a)/\Gamma(A)$, $1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — единичная ступенчатая функция; m — параметр Накагами, выражающий отношение средней мощности обнаруживаемого сигнала к дисперсии мгновенной мощности сигнала; $\overline{d^2}$ — среднее значение энергетического отношения сигнал—шум. С учетом (2), можно получить выражение для решающей статистики $\hat{\Xi}$ обнаружителя с обучением

$$\hat{\Xi}|\mathrm{H}_1 = \nu\,\frac{\gamma_{2,B-m+1} + \gamma_{2+\overline{d^2}/m,m}}{\chi^2_\nu},$$

где χ^2 — случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с ν степенями свободы.

Функция распределения $F(x|\mathrm{H}_1)$ статистики $\hat{\Xi}$ в этом случае есть

$$F(x|\mathrm{H}_1) = \Pr\left\{\nu\,\frac{\Xi}{\chi^2_\nu} < x\right\} = \Pr\{\xi_1 + \xi_2 > 0\}, \tag{3}$$

где $\xi_1 = -\Xi$ и $\xi_2 = x\chi^2_\nu/\nu$ — случайные величины с плотностями вероятности

$$W_1(\varsigma) = 1(-\varsigma)\left(\frac{2}{2+\overline{d^2}/m}\right)^m \frac{(-\varsigma)^B}{B!\,2^{B+1}}\exp(\varsigma/2)\times \\ \times {}_1\mathrm{F}_1\left(m; B+1; \frac{-\varsigma\,\overline{d^2}/m}{2\left(2+\overline{d^2}/m\right)}\right), \tag{4}$$

где ${}_1\mathrm{F}_1(a;\ b;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера), и

$$W_2(\varsigma) = \frac{1(\varsigma)\varsigma^L}{\Gamma(L+1)}\left(\frac{L+1}{x}\right)^{L+1}\exp\left(-\frac{L+1}{x}\varsigma\right),$$

соответственно. Формула (4) следует из результатов [4]. Вычисляя стоящую в правой части (3) вероятность, после громоздких преобразований получаем

$$F(x\,|\,\mathrm{H}_1) = \frac{1}{B!}\left(\frac{2}{2+\overline{d^2}/m}\right)^m\left(\frac{x}{x+\nu}\right)^{B+1}\times \\ \times\sum_{\ell=0}^{L}\frac{\Gamma(B+\ell+1)}{\ell!}\left(\frac{\nu}{x+\nu}\right)^{\ell}\times \\ \times {}_2\mathrm{F}_1\left(m, B+\ell+1; B+1; \frac{x\,\overline{d^2}/m}{(x+\nu)\left(2+\overline{d^2}/m\right)}\right),$$

где ${}_2\mathrm{F}_1(a,\ b;\ c;\ z)$ − гипергеометрическая функция (функция Гаусса). Выражение для вероятности правильного адаптивного энергетического обнаружения радиосигнала со случайной амплитудой Накагами можно представить в виде

$$\hat{P}_1 = 1 - \frac{\Omega^{B+1}}{B!}\left(\frac{2}{2+\overline{d^2}/m}\right)^m\sum_{\ell=0}^{L}\frac{\Gamma(B+\ell+1)}{\ell!}(1-\Omega)^{\ell}\times \\ \times {}_2\mathrm{F}_1\left(m, B+\ell+1; B+1; \Omega\frac{\overline{d^2}/m}{2+\overline{d^2}/m}\right). \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что при нулевом пороговом уровне h параметр Ω также равен нулю и из формулы (5) следует $P_1 = 1$. В другом предельном случае стремящегося к бесконечности порогового уровня h параметр Ω стремится к единице и, учитывая соотношение [8]

$$ {}_2\mathrm{F}_1(a,b;b;z) = (1-z)^{-a}, $$

из формулы (5) можно получить $\hat{P}_1 = 0$. Так и должно быть, поскольку выходной сигнал энергетического приемника независимо от свойств обнаруживаемого сигнала всегда превышает нулевой пороговый уровень и никогда не превысит бесконечно большой пороговый уровень.

Поскольку распределение Рэлея можно трактовать [4] как частный случай распределения Накагами при $m = 1$, из (5) можно получить выражение для вероятности правильного энергетического обнаружения с учителем радиосигнала со случайной рэлеевской амплитудой на фоне белого гауссовского шума неизвестной интенсивности:

$$ \hat{P}_1 = 1 - \frac{2\Omega^{B+1}}{2+(1-\Omega)\overline{d^2}} \left\{ 1 - \frac{1}{(B-1)!} \sum_{\ell=1}^{L} \Gamma(B+\ell)(1-\Omega)^{\ell} \times \right. $$

$$ \left. \times \left\{ \frac{(-1)^{\ell}}{(B+\ell)_{\ell}} \left[\frac{2+\overline{d^2}}{2+(1-\Omega)\overline{d^2}} \right]^{\ell} - \frac{1}{\ell!} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-\ell)_k}{(1-B-\ell)_k} \left[\frac{2+\overline{d^2}}{2+(1-\Omega)\overline{d^2}} \right]^{k} \right\} \right\}, $$

где $(a)_k$ — символ Похгаммера. Нетрудно убедиться, что для последней формулы, как и для формулы (5), имеют место предельные значения $\hat{P}_1 = 1$ при $\Omega = 0$ и $\hat{P}_1 = 0$ при $\Omega = 1$.

Таким образом, характеристика адаптивного энергетического обнаружения узкополосных радиосигналов с амплитудой Накагами может быть представлена в виде конечной суммы через гипергеометрические функции Гаусса. Количество слагаемых в этой сумме определяется базой обучения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Урковиц.* Обнаружение неизвестных детерминированных сигналов по энергии // ТИИЭР. — 1967. Т. 55. — № 4. — С. 50—59.

2. *Park K. Y.* Performance evaluation of energy detectors // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1978. Vol. AES-14. — # 2. — P. 237—241.

3. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов // Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика. — 2000. Т. 43. — № 10. — С. 926—932.

4. *Костылев В. И.* Анализ эффективности энергетического обнаружения радиосигнала со случайной амплитудой Накагами // ВЕСТНИК ВГУ. Серия физика, математика. — 2001. — Вып. 2. — С. 25—30.

5. *Трифонов А.П., Костылев В. И.* Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности // Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика. — 2002. — Т. 45. — № 6. — С. 538—547.

6. *Костылев В. И.* Сравнение аналогового и дискретного обнаружения детерминированных узкополосных радиосигналов по энергии // ВЕСТНИК ВГУ. Серия физика, математика. — 2001. — Вып. 1. — С. 33—39.

7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука. 1979.

8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука. 1986.