УДК 517.983

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2002 г. А. В. Глушак

Воронежский государственный университет

В банаховом пространстве E рассматривается следующая задача

$$D^{\alpha}v(t) = Av(t) + f(t), t > 0, \qquad (1)$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}v(t) = v_0, \qquad (2)$$

где A — линейный замкнутый оператор в E с плотной в E областью определения $D(A)$,

$$D^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s)ds \text{ —}$$

левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля (см. [1, с. 84]) порядка $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$— гамма-функция Эйлера,

$$D^{\alpha-1}v(t) = I^{1-\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s)ds \text{ —}$$

левосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$.

В работе [2] доказано, что если при $Re\lambda > \omega$ резольвента $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ оператора A удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{d^n R(\lambda^{\alpha})}{d\lambda^n} \right\| \le \frac{M\Gamma(n+\alpha)}{(Re\lambda - \omega)^{n+\alpha}} \qquad (3)$$

для всех целых $n \ge 0$, то однородная $(f(t) \equiv 0)$ задача (1), (2) равномерно корректна и ее решение определяется равенством

$$v(t) = T_{\alpha}(t)v_0 =$$

$$= D^{1-\alpha}\frac{1}{2\pi i} v.p.\int_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} \lambda^{\alpha-1}e^{\lambda t}R(\lambda^{\alpha})v_0 d\lambda, \qquad (4)$$

где $v_0 \in D(A), E_{1,\alpha}(\cdot)$— функция типа Миттаг—Леффлера, $\omega_0 > \max(\omega, 0)$.

Установим формулу для решения задачи (1), (2), используя операторную функцию $T_{\alpha}(t)$ и формулу из примера 42.2 [1], позволяющую находить решение неоднородного уравнения в случае, когда A — оператор умножения на число.

Кроме того, в настоящей работе мы рассмотрим задачу типа Коши для однородного дифференциального уравнения, содержащего дробную степень генератора C_0-полугруппы.

Теорема 1. Пусть однородная ($f(t) \equiv 0$) задача (1), (2) равномерна корректна, $v_0 \in D(A)$ и выполнено одно из двух условий:

a) $f(t) \in C([0,\infty), E)$ принимает значения в $D(A)$ и $Af(t) \in C([0,\infty), E)$,

b) $D^{\alpha}f(t) \in C^1([0,\infty), E)$.

Тогда неоднородная задача (1), (2) имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$v(t) = T_{\alpha}(t)v_0 + \int_0^t T_{\alpha}(t-s)f(s)ds, \qquad (5)$$

где $T_{\alpha}(t)$ задается равенством (4).

Доказательство. Достаточно установить, что при сделанных предположениях функция

$$w(t) = \int_0^t T_{\alpha}(t-s)f(s)ds$$

удовлетворяют уравнению (1) и нулевому начальному условию (2).

Пусть выполнено условие a). Тогда

$$D^{\alpha}w(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}d\tau\int_0^{\tau} T_{\alpha}(\tau - s)f(s)ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t ds\int_s^t (t-\tau)^{-\alpha}T_{\alpha}(\tau - s)f(s)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t ds\int_0^{t-s} (t-s-x)^{-\alpha}T_{\alpha}(x)f(s)dx. \qquad (6)$$

Поскольку в (6) под знаком интеграла по s находится непрерывная функция, то

$$D^\alpha w(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{s\to t}\int_0^{t-s}(t-s-x)^{-\alpha}T_\alpha(x)f(s)dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t ds\frac{d}{dt}\int_0^{t-s}(t-s-x)^{-\alpha}T_\alpha(x)f(s)dx=$$

$$=\lim_{t-s\to 0}D^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f(s)+\int_0^t\left[D^\alpha T_\alpha f\right](t-s)ds=$$

$$=f(t)+\int_0^t T_\alpha(t-s)Af(s)ds=f(t)+Aw(t),$$

следовательно, функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Проверим далее, что функция $w(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (2). Имеем

$$\lim_{t\to 0}D^{\alpha-1}w(t)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{t\to 0}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}d\tau\int_0^\tau T_\alpha(\tau-s)f(s)ds. \quad (7)$$

Поскольку (см. [2]) $\|T_\alpha(t)\|\le Mt^{\alpha-1}e^{\omega t}$, то для $t\in[0,1]$

$$\left\|\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}d\tau\int_0^\tau T_\alpha(\tau-s)f(s)ds\right\|\le$$

$$\le M_1\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}d\tau\int_0^\tau(\tau-s)^{\alpha-1}ds=\frac{M_1}{\alpha}\int_0^t(t-\tau)^{-\alpha}\tau^\alpha d\tau=$$

$$=\frac{M_1 t}{\alpha}\int_0^1(1-s)^{-\alpha}s^\alpha ds=\frac{M_1}{\alpha}\mathrm{B}(1+\alpha,1-\alpha)t, \quad (8)$$

где $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ — бета-функция Эйлера.

Из (7) и (8) следует, что функция $w(t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию (2).

Пусть выполнено условие b). Тогда

$$D^\alpha w(t)=D^\alpha\int_0^t T_\alpha(\tau)f(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t(t-s)^{-\alpha}ds\int_0^s T_\alpha(\tau)f(s-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t T_\alpha(\tau)d\tau\int_0^{t-\tau}(t-\tau-x)^{-\alpha}f(x)dx=$$

$$=T_\alpha(t)\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t-\tau}(t-\tau-x)^{-\alpha}f(x)dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t T_\alpha(\tau)d\tau\frac{d}{dt}\int_0^{t-\tau}(t-\tau-x)^{-\alpha}f(x)dx=$$

$$=T_\alpha(t)D^{\alpha-1}f(0)+\int_0^t T_\alpha(\tau)D^\alpha f(t-\tau)d\tau=$$

$$=T_\alpha(t)D^{\alpha-1}f(0)+\int_0^t T_\alpha(t-s)D^\alpha f(s)ds. \quad (9)$$

С другой стороны, в силу равенства (2.61) из [1],

$$w(t)=\int_0^t T_\alpha(t-s)\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}f(0)s^{\alpha-1}+I^\alpha D^\alpha f(s)\right)ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t s^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)D^{\alpha-1}f(0)ds+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t T_\alpha(t-s)ds\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}D^\alpha f(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}T_\alpha(\tau)D^{\alpha-1}f(0)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t T_\alpha(\tau)d\tau\int_0^{t-\tau}(t-\tau-s)^{\alpha-1}D^\alpha f(s)ds. \quad (10)$$

Опять-таки, в силу равенства (2.61) из [1] и замкнутости оператора A, справедливы равенства

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}A\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}T_\alpha(\tau)hd\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}D^\alpha T_\alpha(\tau)hd\tau=I^\alpha D^\alpha T_\alpha(t)h=$$

$$=T_\alpha(t)h-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}T_\alpha(0)h=T_\alpha(t)h-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h. \quad (11)$$

Поэтому из (9)—(11) вытекает

$$Aw(t)=T_\alpha(t)D^{\alpha-1}f(0)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}f(0)+$$

$$+\int_0^t\left(T_\alpha(t-s)D^\alpha f(s)-\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^\alpha f(s)\right)ds=$$

$$=T_\alpha(t)D^{\alpha-1}f(0)-\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha-1}f(0)+$$

$$+\int_0^t T_\alpha(t-s)D^\alpha f(s)ds-f(t)+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D^\alpha f(0)=$$

$$=D^\alpha w(t)-f(t),$$

и теорема доказана.

Переходим теперь к задаче типа Коши для дробной степени генератора C_0-полугруппы.

Пусть E — комплексное банахово пространство, $T(t)$ — равномерно ограниченная

C_0-полугруппа с генератором A. Тогда можно определить положительную дробную степень оператора $(-A)$ (см., например, [3, с. 96])

$$-(-A)^{\alpha} f = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha-1} (\lambda I - A)^{-1} Af d\lambda, \quad (12)$$

где $\alpha \in (0,1), f \in D(A)$.

При этом, если $g \in E$, то для резольвенты оператора $-(-A)^{\alpha}$, который в дальнейшем мы будем обозначать A_{α}, справедливо представление

$$(\mu I - A_{\alpha})^{-1} g =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} (\lambda I - A)^{-1} g}{\mu^2 - 2\mu\lambda^{\alpha} \cos \alpha\pi + \lambda^{2\alpha}} d\lambda. \quad (13)$$

Покажем, что с оператором A_{α} равномерно корректна следующая задача типа Коши

$$D^{\alpha} v(t) = A_{\alpha} v(t), t > 0, \quad (14)$$

$$\lim_{t \to 0} D^{\alpha-1} v(t) = v_0,\ v_0 \in D(A). \quad (15)$$

Теорема 2. Пусть A является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы и оператор A_{α} определен равенством (12). Тогда задача типа Коши (14), (15) равномерно корректна.

Доказательство. Как уже отмечалось, критерий равномерной корректности задачи (14), (15) установлен в [2]. Для того, чтобы задача (14), (15) была равномерно корректна, необходимо и достаточно, чтобы при $\mu > 0$ резольвента $(\mu I - A_{\alpha})^{-1}$ удовлетворяла неравенству типа (3), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left\| \frac{d^n (\mu^{\alpha} I - A_{\alpha})^{-1}}{d\mu^n} \right\| \le \frac{M\Gamma(n+\alpha)}{\mu^{n+\alpha}}. \quad (16)$$

Обозначим $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ и, используя представление (2), установим справедливость оценки (13). После замены переменной из (13) получим

$$(\mu^{\alpha} I - A_{\alpha})^{-1} g = \frac{\mu^{1-\alpha} \sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^{1/\alpha} R\left(\mu s^{1/\alpha}\right) g}{s^2 - 2s\cos \alpha\pi + 1} ds =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \int_0^{\infty} \frac{s x^{1-\alpha} R(x) g}{s^2 - 2s\cos \alpha\pi + 1} ds,$$

где $x = \mu s^{1/\alpha}$ и, следовательно,

$$\frac{d^n (\mu^{\alpha} I - A_{\alpha})^{-1} g}{d\mu^n} =$$

$$= \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^{n/\alpha+1}}{s^2 - 2s\cos \alpha\pi + 1} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{1-\alpha} R(x) g \right) ds. \quad (17)$$

Используя формулу Лейбница и неравенство

$$\left\| \frac{d^n R(x)}{dx^n} \right\| \le \frac{Mn!}{x^n},$$

которое справедливо в силу теоремы Хилле—Иосиды, оценим

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{1-\alpha} R(x) g \right) \right\| \le$$

$$\le \frac{M\|g\|}{x^{n+\alpha}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1) \cdots (-\alpha-n+j+2)| j! =$$

$$= \frac{M\|g\| \Gamma(n+\alpha-1)}{|\Gamma(\alpha-1)| x^{n+\alpha}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n+\alpha-2}{j}^{-1} =$$

$$= \frac{M\|g\| \Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha) x^{n+\alpha}} \left(1 - \binom{n}{n+1} \binom{n+\alpha-1}{n+1}^{-1} \right) =$$

$$= \frac{M\|g\| \Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha) x^{n+\alpha}}, \quad (18)$$

при этом мы воспользовались формулой 4.2.8.1 [4].

Из (17), (18) вытекает справедливость неравенства

$$\left\| \frac{d^n (\mu^{\alpha} I - A_{\alpha})^{-1}}{d\mu^n} \right\| \le$$

$$\le \frac{M_1 \Gamma(n+\alpha)}{\mu^{n+\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 - 2s\cos \alpha\pi + 1} \le \frac{M_2 \Gamma(n+\alpha)}{\mu^{n+\alpha}},$$

и теорема тем самым доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.

2. *Глушак А. В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. Вестник ВГУ. Серия физика, математика. Воронеж. 2001, 2. С. 74—77.

3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, Выща школа. 1989.

4. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука. 1983.