УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

© 2002 г. Д. В. Елисеев

Воронежский государственный университет

В статье изучаются спектральные свойства решений дифференциальных уравнений. Рассматривается случай, когда под решением дифференциального уравнения понимается более широкий по отношению к классическому определению класс функций.

Пусть $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ — соответственно поля комплексных и вещественных чисел, и X, Y — комплексные банаховы пространства. Множество всех линейных замкнутых операторов, действующих из X в X, обозначим символом $\mathcal{L}(X)$ и символом $EndX$ — множество всех линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих из X в X.

Символом $L_1(\mathbb{R})$ обозначим банахову алгебру совпадающих локально почти всюду, измеримых по Бохнеру, абсолютно суммируемых комплекснозначных функций, с нормой

$$\|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\, dt.$$

Под символом $L_\infty(\mathbb{R}, Y)$ будем понимать банахово пространство классов совпадающих локально почти всюду измеримых по Бохнеру существенно ограниченных векторных функций, действующих из $\mathbb{R}$ в Y, с нормой

$$\|x\|_\infty = vrai \sup_{t\in R} \|x(t)\|_Y .$$

Символом $C_b(\mathbb{R}, Y)$ обозначим подпространство непрерывных ограниченных векторных функций из $L_\infty(\mathbb{R}, Y)$, символом $C_{ub}(\mathbb{R}, Y)$ — подпространство равномерно непрерывных векторных функций и символом $C^n(\mathbb{R}, Y)$ — пространство n-раз непрерывно дифференцируемых векторных функций с n-ой производной, принадлежащей $C_b(\mathbb{R}, Y)$.

Ключевым понятием, используемым при рассмотрении спектральных свойств функции из $L_\infty(\mathbb{R}, Y)$, является понятие спектра Берлинга.

Определение 1. Спектром Берлинга $\Lambda(x)$ функции $x \in L_\infty(\mathbb{R}, Y)$ назовем дополнение в $\mathbb{R}$ к множеству

$$\{\lambda_0 \in \mathbb{R} : \exists f \in L_1(\mathbb{R}), f * x = 0 \text{ и } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\},$$

где $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} dt$ — преобразование Фурье функции f.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} - Ax = f, \tag{1}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в Y, являющийся генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T(t), t \in \mathbb{R}_+\} \subset EndY$, и функции x, f принадлежат пространству $C_b(\mathbb{R}, Y)$.

Определение 2. Согласно [1], обобщенным решением (mild solution) уравнения (1) назовем функцию $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$, удовлетворяющую для всех $s \le t$ на R равенствам

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\tau) f(\tau) d\tau. \tag{2}$$

Мы можем также ввести понятие обобщенного решения следующим образом.

Определение 3. Обобщенным ограниченным решением уравнения (1) будем называть функцию $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ такую, что для любой функции $\phi \in L_1(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которой имеет компактный носитель, функция $x_*(t) = (\phi * x)(t)$ является классическим решением уравнения $\dot{x} - Ax = \phi * f$, т.е. $x_*(t) \in D(A)\ \forall t \in \mathbb{R}$ и $\dot{x}_* - Ax_* = \phi * f$.

Докажем эквивалентность обоих определений. Для доказательства нам потребуется следующее понятие.

Определение 4. Ограниченная последовательность функций $(f_n) \subset L_1(\mathbb{R})$ называется ограниченной аппроксимативной единицей (короче, о.а.е.), если она обладает следующими свойствами

* При поддержке РФФИ проект № 01-01-00408

1) все функции $\hat{f}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, n \geq 1$ имеют компактный носитель,

2) $\lim_{n\to\infty} f_n * f = f \; \forall f \in L_1(\mathbb{R})$,

3) $\hat{f}_n = 1$ в некоторой окрестности нуля $\forall n \geq 1$.

Лемма 1. *Определения 2 и 3 эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ является обобщенным решением уравнения (1) в смысле определения 2, т. е. x удовлетворяет условию (2). Рассмотрим линейный оператор $L : D(L) \subset C_b(\mathbb{R}, Y) \to C_b(\mathbb{R}, Y)$, с областью определения $D(L) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, Y):$ существует $f \in C_b(R, Y)$ такая, что x удовлетворяет условию 2)$\}$. Положим $Lx = f$. Очевидно, что для любого x, являющегося классическим решением уравнения (1), $Lx = \dot{x} - Ax$. Так как полугруппа $\{T(t), t \geq 0\}$ сильно непрерывна, то существует такое $\omega > 0$, что $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$. Для любого $\lambda_0 > \omega$ оператор $L - \lambda_0 I$ обратим и $(L - \lambda_0 I)^{-1} = R_L(\lambda_0)x = G * x$, где $G(t) = T(t)e^{-\lambda_0 t}$ при $t \geq 0$ и $G(t) = 0$ при $t < 0$. Пусть $\Phi : C_b(\mathbb{R}, Y) \to$ $\to C_b(\mathbb{R}, Y)$ — ограниченный оператор, определяемый равенством $(\Phi x)(t) = (\phi * x)(t)$, где $x \in C_b(\mathbb{R}, Y), \phi \in L_1(\mathbb{R})$ и $supp\,\hat{\phi}$ — компакт. В силу свойств свертки $R_L(\lambda_0)\Phi x = G * \phi * x =$ $= \phi * G * x = \Phi R_L(\lambda_0)x$. Откуда следует, что $\Phi D(L) \subset D(L)$. Так как оператор $L - \lambda_0 I$ обратим, то для любого $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ существует такое $y \in D(L)$, что $x = (L - \lambda_0 I)y$. Для любого $y \in D(L)$ имеем $(L - \lambda_0 I)R_L(\lambda_0)\Phi y =$ $= (L - \lambda_0 I)\Phi R_L(\lambda_0)y$. Откуда получаем $\Phi(L - \lambda_0 I)x = (L - \lambda_0 I)\Phi x \; \forall x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$. Из этого равенства следует, что L также коммутирует с Φ, т. е. $\phi * Lx = L\phi * x$, для всех $x \in D(L)$. Так как $\hat{\phi}$ имеет компактный носитель, то $\phi * x$ и $\phi * f \in C^1(\mathbb{R}, Y)$. Откуда, согласно результатам [4], получаем, что $\phi * x$ — классическое решение уравнения (1). Таким образом, x является обобщенным решением уравнения (1) в смысле определения 3.

В обратную сторону доказательство проводится с использованием того факта, что алгебра $L_1(\mathbb{R})$ обладает о.а.е. (ϕ_n). Так как $\{T(t), t \geq 0\}$ — сильно непрерывное представление, то для любого $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ выполняется [2] условие

$$x(t) = \lim_{n\to\infty}(\phi_n * x)(t) \; \forall t \in \mathbb{R},$$

причем на каждом конечном промежутке существует равномерный предел $\lim \phi_n * x = x$.

Пусть $x_n = \phi_n * x$ и $f_n = \phi_n * f$. Тогда, согласно определению 3, имеем

$$x_n = Ax_n + f_n \; \forall n \geq 1. \tag{1'}$$

Так как $x_n, n \geq 1$, классические решения уравнения (1′), то

$$x_n(t) = T(t-s)x_n(s) + \int_s^t T(t-\tau)f_n(\tau)d\tau, \; \forall n \geq 1.$$

Устремив n к бесконечности, в пределе получим $x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau$. Таким образом, для любого $t \geq s$ функция x удовлетворяет условию (2) и, следовательно, является решением уравнения (1) в смысле определения 2. Теорема доказана.

Символом $AP(\mathbb{R}, Y)$ обозначим множество почти периодических функций, действующих из $\mathbb{R}$ в Y. Подпространство $AP(\mathbb{R}, Y)$ является замыканием в $C_{ub}(\mathbb{R}, Y)$ множества тригонометрических полиномов, т.е. функций вида

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j e^{i\lambda_j t}, \; y_1, ..., y_n \in Y, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

Спектр Берлинга $\Lambda(y)$ функции $y \in AP(\mathbb{R}, Y)$ состоит из точек $\lambda_j, j = 1..n$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{x} - Ax = 0, \tag{3}$$

соответствующее уравнению (1). Пусть $X_0 \subset C_b(\mathbb{R}, Y)$ — подпространство всех ограниченных непрерывных решений однородного уравнения (3). Символом σ_0 обозначим замыкание множества $\bigcup_{x\in X_0} \Lambda(x)$, т. е. $\sigma_0 =$ $= \Lambda(X_0) = \overline{\{\lambda \in \Lambda(x) : x \in X_0\}}$.

Докажем лемму, на которую опирается основной результат данной статьи.

Лемма 2. *Пусть $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ — обобщенное решение уравнения (1) и спектр $\Lambda(f)$ функции f, стоящей в правой части уравнения, не имеет предельных точек на $\mathbb{R}$. Тогда спектр решения $\Lambda(x) \subset \sigma_0 \cup \Lambda(f)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(f)$ и $V(\lambda_0)$ — некоторая окрестность точки λ_0 такая, что $V(\lambda_0) \cap \Lambda(f) = \varnothing$. Тогда существует функция $\phi \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что $supp\hat{\phi} \subset V(\lambda_0), \phi * f = 0$ и $\hat{\phi}(\lambda_0) \neq 0$. Откуда получаем, что функция $x_0 = \phi * x$ является решением однородного уравнения (3). Согласно определению множества σ_0, если $\lambda_0 \notin \sigma_0$, то $\lambda_0 \notin \Lambda(x_0)$. Спектр $\Lambda(x_0) = \Lambda(\phi * x) = supp\hat{\phi} \cap \Lambda(x)$, и так как $\lambda_0 \in supp\hat{\phi}$, то $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Лемма доказана.

Опираясь на доказанное выше включение и известный результат А. Г. Баскакова [3], мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $x \in C_b(\mathbb{R}, Y)$ *- обобщенное решение уравнения (1), множество* $\sigma_0 \cup \Lambda(f)$ *— счетно и пространство* Y *не содержит подпространств, изоморфных пространству* c_0*, сходящихся к нулю последовательностей комплексных чисел. Тогда* $x \in AP(\mathbb{R}, Y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Engel K. J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations// Springer-Verlag, 2000, 586 c.

2. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов// Воронеж, ВГУ, 1987.

3. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений//Мат. зам., 1978, Т. 24, 2, С. 195—207.

4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве//М. Наука, 1967, 464 с.