ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2002, № 1

УДК 539.5

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О СЖАТО-СКРУЧЕННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

© 2002 г. Д. Е. Елагин, А. Н. Спорыхин, Ю. Д. Щеглова

Воронежский государственный университет

Проявление разнообразных свойств материалов в зависимости от условий работы, типа нагрузок, структуры материала требует использовать при расчетах сложные модели сплошных сред и исследовать различные виды сложного нагружения. В работе принята модель упрочняющегося упруговязкопластического материала [1], которая проявляет свойства ползучести и релаксации. Для данного материала в рамках плоской деформации решена задача о напряженно-деформированном состоянии толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления [2], и задача кручения цилиндрического стержня кругового поперечного сечения [6]. Ниже получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии сжато-скрученного цилиндрического стержня.

Пусть имеется цилиндрический стержень кругового поперечного сечения радиуса a. Введем цилиндрическую систему координат ρ, θ, z так, что координатная ось z направлена по оси стержня. Предположим, что под действием заданной системы поверхностных сил, приложенных на торцах, стержень упруго сжимается (или растягивается) вдоль оси z силами с равнодействующей P и закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил с моментом M. Боковая поверхность стержня свободна от нагрузок. Будем считать, что величина крутящего момента M такова, что пластическая зона целиком охватывает контур поперечного сечения, и для каждого значения крутящего момента существует упругопластическая граница L_S.

Следуя обычной теории кручения цилиндрических стержней кругового поперечного сечения [4], а также учитывая решение задачи об одноосном упругом сжатии (растяжении) стержня [5] поле напряжений примем в виде:

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\rho\theta} = \sigma_{\rho z} = \sigma_{\theta\theta} = 0;$$

$$\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(\rho,\theta), \sigma_{zz} = \frac{P}{\pi R^2}. \qquad (1)$$

В данных предположениях система уравнений, определяющая напряженно-деформированное состояние стержня из упруговязкопластического упрочняющегося материала имеет следующий вид.

Уравнения равновесия сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0. \qquad (2)$$

В пластической области полная деформация складывается из упругой и пластической составляющих

$$\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon^e_{\theta z} + \varepsilon^p_{\theta\ z}, \varepsilon_{zz} = \frac{P}{2G\pi R^2}. \qquad (3)$$

Условия совместности деформаций запишутся в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial \rho} + \frac{\varepsilon_{\theta z}}{\rho} = \omega. \qquad (4)$$

Напряжения связаны с упругими деформациями законом Гука

$$\tau_{\theta z} = 2G\varepsilon^e_{\theta z}, \sigma_{zz} = 2G\varepsilon^e_{zz}. \qquad (5)$$

В пластической области выполняется условие пластичности [2]

$$\left(\sigma_{\theta z} - c\varepsilon^p_{\theta z} - \eta\dot{\varepsilon}^p_{\theta z}\right)^2 + \sigma^2_{zz} = 1, \qquad (6)$$

где c — коэффициент упрочнения, η — коэффициент вязкости.

При этом ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$\dot{\varepsilon}^p_{\theta z} = \lambda\left(\sigma_{\theta z} - c\varepsilon^p_{\theta z} - \eta\dot{\varepsilon}^p_{\theta z}\right). \qquad (7)$$

На упругопластической границе L_s выполняются условия непрерывности решений поставленной задачи

$$\left[\tau_{\theta z}\right]\Big|_{L_S} = 0. \tag{8}$$

При заданном поле напряжений граничные условия на боковой поверхности выполняются автоматически.

Предполагается, что момент времени $t=0$ совпадает с началом пластического течения, тогда начальные условия имеют вид

$$\tau_{\theta z}\big|_{t=0} = G\omega\rho,\ \varepsilon_{\theta z}\big|_{t=0} = \frac{1}{2}\omega\rho. \tag{9}$$

Касательное напряжение $\tau_{\theta z}$ должно уравновесить безразмерный крутящий момент, то есть

$$M = \iint \tau_{\theta z}\rho^2 d\rho\, d\theta. \tag{10}$$

Система уравнений (1)—(10) записана в безразмерном виде. Все величины, имеющие размерность длины отнесены к радиусу поперечного сечения стержня, а величины, имеющие размерность напряжений — к пределу пластичности при чистом сдвиге. Символ “e” вверху подчеркивает принадлежность величин к упругой области, а символ “p” — к пластической.

В упругой области решение рассматривается как суперпозиция двух известных решений [5]: для случая, когда действует только сжимающая (растягивающая) сила P, и для случая, когда приложен только закручивающий момент M. Распределение напряжений в упругой зоне имеет вид:

$$\sigma^e_{\theta z} = G\omega\rho,\ \sigma^e_{zz} = \frac{P}{\pi R^2}. \tag{11}$$

Из соотношений (6) и (4) после ряда преобразований получаем поле напряжений в пластической зоне:

$$\sigma^p_{\theta z} = \frac{G}{2G+c}\left(c\omega\rho + 2\sqrt{1-\left(\frac{P}{\pi R^2}\right)^2}\right)\times$$
$$\times\left(1-\exp\left(-\frac{2G+c}{\eta}t\right)\right) + G\omega\rho\exp\left(-\frac{2G+c}{\eta}t\right), \tag{12}$$
$$\sigma^p_{zz} = \frac{P}{\pi R^2}.$$

Подставляя соотношения (11) и (12) в условие (8) получаем соотношение для радиуса упругопластической границы

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{P}{\pi R^2}\right)^2}}{G\omega}. \tag{13}$$

Очевидно, что упругопластическая граница представляет собой окружность радиуса ρ_0.

Выражение для крутящего момента согласно (10) при учете (11)—(13), получаем в виде

$$M = \frac{\pi k_2^4}{2(G\omega)^3} +$$
$$+k_1\left(c\omega + 2G\omega\exp\left(-\frac{2G+c}{\eta}t\right)\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{k_2^4}{4(G\omega)^4}\right) + \tag{14}$$
$$+\frac{2k_1k_2}{3}\left(1-\exp\left(-\frac{2G+c}{\eta}t\right)\right)\left(1-\frac{k_2^3}{(G\omega)^3}\right),$$

где $k_1 = \dfrac{2\pi G}{2G+c},\ k_2 = \sqrt{1-\left(\dfrac{P}{\pi R^2}\right)^2}$.

Зависимость радиуса упругопластической границы от крутки ω определяет влияние крутящего момента, а также упрочнения и вязкости на поведение упругопластической границы. Из выражения для радиуса упругопластической границы следует, что с возрастанием нагрузки P пластическая зона также увеличивается, а при достижении сжимающими напряжениями предельного значения, равного единице, все поперечное сечение будет охвачено пластической зоной.

Из полученного решения при $P=0$ следует решение задачи кручения цилиндрического стержня из упруговязкопластического анизотропно упрочняющегося материала [6], из которого, при $c=0,\ \eta=0$ следуют известные решения задачи упруго-идеально-пластического кручения стержня кругового поперечного сечения [5]. В предельном случае при $t\to\infty$, что соответствует установившемуся течению, следует решение задачи кручения упрочняющегося упругопластического стержня [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спорыхин А. Н.* Об устойчивости деформирования упруго-вязкопластических тел. — Прикл. Механика и техн. физика. 1967, № 4, С. 52—58.

2. *Спорыхин А. Н.* Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: ВГУ. 1997. 361 с.

3. *Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д.* Метод возмущений в задачах упругопластического кручения стержней // Механика твердого тела, РАН — 2000 — № 5 — С. 54—64.

4. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М: Наука, 1966. 232 с.

5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1973, Т. 2, 584 с.

6. *Елагин Д. Е., Спорыхин А. Н., Щеглова Ю. Д.* // Об одном точном решении задачи кручения цилиндрического стержня // Современные проблемы механики сплошных сред. Материалы школы-семинара. Часть 1. — Воронеж: Воронеж. гос. университет, 2000. — С. 141—143.