УДК 517.912:517.954

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕПОЛНОЙ БЛОЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ С ДИАГОНАЛЬНОЙ КОМПЕНСАЦИЕЙ

© 2002 г. М. Е. Эксаревская

Воронежский государственный университет

В работе получены оценки элементов матрицы компенсации, необходимые для исследования скорости сходимости методов неполной блочной факторизации с диагональной компенсацией для решения трехмерных эллиптических краевых задач.

1. Введение

Методы неполной факторизации являются одними из наиболее эффективных при решении больших систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами, возникающих в результате разностной аппроксимации трехмерных эллиптических краевых задач [1]. Использование диагональной компенсации улучшает свойства сходимости метода [2]. Сходимоть рассматриваемых методов определяется числом обусловленности матрицы-предобуславливателя [3], поэтому актуально получение оценок числа обусловленности. В методе с диагональной компенсацией для получения таких оценок сначала необходимо оценить элементы матрицы компенсации.

2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерную эллиптическую краевую задачу с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Mu \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z), \\ u\,|_{\Gamma} = \varphi(x,y,z), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $(x,y,z) \in \Pi$, Π — замкнутая гладкая выпуклая область, Γ — граница Π, $f(x,y,z)$ — непрерывная функция.

Задав в области Π равномерную кубическую сетку с шагом h, в результате разностной аппроксимации (2.1) на семиточечном шаблоне [1] получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f$$

относительно значений функции $u_{i,j,k}$ в узлах сетки, где $f = \{f_{i,j,k}h^2\}$, а матрица A имеет блочно-трехдиагональный вид

$$\begin{aligned} A &= tridiag\{Q_i, P_i, R_i\}, \\ P_i &= tridiag\{-D_{ij}, E_{ij}, -F_{ij}\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где блок E_{ij} есть $(l_{ij} \times l_{ij})$-матрица; D_{ij} — $(l_{ij} \times l_{ij-1})$-матрица; F_{ij} — $(l_{ij} \times l_{ij+1})$-матрица; Q_i — $(l_{ii} \times l_{i-1i})$-матрица; R_i — $(l_{ii} \times l_{i+1i})$-матрица. Если разбить матрицы Q_i и R_i на блоки Q_{ij} размерностью $(l_{ij} \times l_{i-1j})$ и R_{ij} размерностью $(l_{ij} \times l_{i+1j})$ соответственно, получим, что матрица A имеет блочно-пятидиагональный вид $A = fivediag\{-Q_{ij}, -D_{ij}, E_{ij}, -F_{ij}, -R_{ij}\}$.

Матрица E_{ij} имеет трехдиагональный вид $E_{ij} = tridiag\{-1, 6, -1\}$, а в строках и столбцах матриц $D_{ij}, F_{ij}, Q_{ij}, R_{ij}$ может быть отличен от нуля только один элемент, равный единице. Его расположение зависит от формы области Π. В частности, если область имеет форму куба $(s = l = n)$, эти матрицы являются единичными. Кроме того, для кубической области все матрицы являются квадратными, размерности $(n \times n)$, а общее количество внутренних узлов (размерность вектора u) равно n^3.

Замечание 1. Из условия гладкости области Π и порядка нумерации внутренних узлов области следует, что любой ν-й столбец матриц D_{ij}, F_{ij} содержит один ненулевой элемент в строке $\nu + l^{01}$, где $l^{01} = \pm |k_{ij} - k_{ij-1}| = O(1)$, а также что любой ν-й столбец матриц Q_{ij}, R_{ij} содержит один ненулевой элемент в строке $\nu + l^{10}$, где $l^{10} = \pm |k_{ij} - k_{i-1j}| = O(1)$.

Для решения СЛАУ будем использовать предобусловленный метод сопряженных градиентов [1] с предобуславливателем типа неполной блочной факторизации с диагональной компенсацией [4]. Будем рассматривать неполную блочную факторизацию матрицы A с диагональной компенсацией

$$\breve{A} = (\breve{G} - D - Q)\breve{G}^{-1}(\breve{G} - F - R), \qquad (2.3)$$

где $\breve{G}$ — блочно-диагональная матрица, определяемая по формуле

$$\breve{G}_{ij} = G_{ij} + S_{ij}, \qquad (2.4)$$

где диагональные матрицы S_{ij} в (2.4) выбираются из условий диагональной компенсации [4]:

$$\begin{aligned}
&S_{11}e = 4G_{11}^{-1}e,\\
&S_{1j}e = (4G_{1j}^{-1} - D_{1j}\hat{G}_{1j-1}F_{1j-1} - D_{1j}\hat{G}_{1j-1}B_{1j-1})e,\\
&\qquad j = 2,\dots,s_1\\
&S_{i1}e = (4G_{i1}^{-1} - Q_{i1}\hat{G}_{i-11}F_{i-11} - Q_{i1}\hat{G}_{i-11}B_{i-11})e,\\
&\qquad i = 2,\dots,p\\
&S_{ij}e = (4G_{ij}^{-1} - D_{ij}\hat{G}_{ij-1}F_{ij-1} - D_{ij}\hat{G}_{ij-1}B_{ij-1} -\\
&\qquad -Q_{ij}\hat{G}_{i-1j}F_{i-1j} - Q_{ij}\hat{G}_{i-1j}B_{i-1j})e,\\
&\qquad i = 2,\dots,n,\ j = 2,\dots,s_i,
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

где e − единичный вектор G_s матрицы $G = diag\{G_s\}$ определяются с помощью метода матричной прогонки [5]

$$\begin{gathered}
G_1 = E_1, G_{s+1} = E_{s+1} - D_{s+1}G_s^{-1}F_s -\\
-D_{s+1}G_s^{-1}R_s - Q_{s+1}G_s^{-1}F_s - Q_{s+1}G_s^{-1}R_s, \qquad (2.6)\\
s = 1,2,\dots,\sum_{i=1}^{n} s_i - 1.
\end{gathered}$$

3. Оценки элементов матрицы компенсации

Теорема Пусть матрицы S_{km} определяются из (2.4). Тогда для диагональных элементов $s_{km,j}$ этих матриц справедливы оценки

$$\left|s_{km,j}\right| \le \frac{C}{\min\{j, l_{km} + 1 - j\}} + \frac{C}{k} + \frac{C}{m}, \qquad (3.1)$$

где $1 \le k \le n$ и $1 \le m \le s_k$ (p и s_k были описаны при постановке задачи).

Доказательство. Из условий (2.4) для $k \ge 2$, $m \ge 2$ имеем

$$\begin{gathered}
S_{km}e = |\,(4G_{km}^{-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}F_{km-1} +\\
+D_{km}(G_{km-1}^{-1} - (G_{km-1} + S_{km-1})^{-1})F_{km-1} -\\
-D_{km}G_{km-1}^{-1}B_{km-1} +\\
+D_{km}(G_{km-1}^{-1} - (G_{km-1} + S_{km-1})^{-1})B_{km-1} -\\
-Q_{km}G_{k-1m}^{-1}F_{k-1m} +\\
+Q_{km}(G_{k-1m}^{-1} - (G_{k-1m} + S_{k-1m})^{-1})F_{k-1m} -\\
-Q_{km}G_{k-1m}^{-1}B_{k-1m} +\\
+Q_{km}(G_{k-1m}^{-1} - (G_{k-1m} + S_{k-1m})^{-1})B_{k-1m})e\,|,
\end{gathered}$$

где e — единичный вектор.

Поскольку G_{km} являются M — матрицами, а $S_{km} \ge 0$, то

$$\begin{gathered}
(D_{km}(G_{km-1}^{-1} - (G_{km-1} + S_{km-1})^{-1})F_{km-1} +\\
+D_{km}(G_{km-1}^{-1} - (G_{km-1} + S_{km-1})^{-1})B_{km-1} +\\
+Q_{km}(G_{k-1m}^{-1} - (G_{k-1m} + S_{k-1m})^{-1})F_{k-1m} +\\
+Q_{km}(G_{k-1m}^{-1} - (G_{k-1m} + S_{k-1m})^{-1})B_{k-1m})e \ge 0.
\end{gathered}$$

Поэтому индукцией по k и m определяем, что $S_{km} \le \tilde{S}_{km}$. Здесь диагональные матрицы $\tilde{S}_{km}$ определяются из условий

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}_{11} = S_{11},\\
&\tilde{S}_{1m}e = r_{1m} + (D_{1m}(G_{1m-1}^{-1} - (G_{1m-1} + \tilde{S}_{1m-1})^{-1})F_{1m-1} +\\
&\qquad +D_{1m}(G_{1m-1}^{-1} - (G_{1m-1} + \tilde{S}_{1m-1})^{-1})B_{1m-1})e,\\
&\qquad m \ge 2,\\
&\tilde{S}_{k1}e = r_{k1} + (Q_{k1}(G_{k-11}^{-1} - (G_{k-11} + \tilde{S}_{k-11})^{-1})F_{k-11} +\\
&\qquad +Q_{k1}(G_{k-11}^{-1} - (G_{k-11} + \tilde{S}_{k-11})^{-1})B_{k-11})e,\\
&\qquad k \ge 2,\\
&\tilde{S}_{km}e = r_{km} + (D_{km}(G_{km-1}^{-1} - (G_{km-1} + \tilde{S}_{km-1})^{-1})F_{km-1} +\\
&\qquad +D_{km}(G_{km-1}^{-1} - (G_{km-1} + \tilde{S}_{km-1})^{-1})B_{km-1} +\\
&\qquad +Q_{km}(G_{k-1m}^{-1} - (G_{k-1m} + \tilde{S}_{k-1m})^{-1})F_{k-1m} +\\
&\qquad +Q_{km}(G_{k-1m}^{-1} - (G_{k-1m} + \tilde{S}_{k-1m})^{-1})B_{k-1m})e,\\
&\qquad k \ge 2, m \ge 2,
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned}
&r_{1m} = |\,(4G_{1m}^{-1} - D_{1m}G_{1m-1}^{-1}F_{1m-1} - D_{1m}G_{1m-1}^{-1}B_{1m-1})e\,|,\\
&\qquad m \ge 2,\\
&r_{k1} = |\,(4G_{k1}^{-1} - Q_{k1}G_{k-11}^{-1}F_{k-11} - Q_{k1}G_{k-11}^{-1}B_{k-11})e\,|,\\
&\qquad k \ge 2,\\
&r_{km} = |\,(4G_{km}^{-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}F_{km-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}B_{km-1} -\\
&\qquad -Q_{km}G_{k-1m}^{-1}F_{k-1m} - Q_{km}G_{k-1m}^{-1}B_{k-1m})e\,|,\\
&\qquad k \ge 2, m \ge 2.
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Аналогично (3.2) рассмотрим для некоторого $\sigma > 0$ диагональные матрицы, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}
&S_{11,\sigma} = S_{11},\\
&S_{1m,\sigma}e = r_{1m} + (D_{1m}G_{1m-1}^{-1}S_{1m-1,\sigma}(G_{1m-1} -\\
&\quad -\sigma S_{1m-1,\sigma})^{-1}F_{1m-1} + D_{1m}G_{1m-1}^{-1}S_{1m-1,\sigma}(G_{1m-1} -\\
&\quad -\sigma S_{1m-1,\sigma})^{-1}B_{1m-1})e,\ m \ge 2,\\
&S_{k1,\sigma}e = r_{k1} + (Q_{k1}G_{k-11}^{-1}S_{k-11,\sigma}(G_{k-11} -\\
&\quad -\sigma S_{k-11,\sigma})^{-1}F_{k-11} + Q_{k1}G_{k-11}^{-1}S_{k-11,\sigma}(G_{k-11} -\\
&\quad -\sigma S_{k-11,\sigma})^{-1}B_{k-11})e,\ k \ge 2,\\
&S_{km,\sigma}e = r_{km} + (D_{km}G_{km-1}^{-1}S_{km-1,\sigma}(G_{km-1} -\\
&\quad -\sigma S_{km-1,\sigma})^{-1}F_{km-1} + D_{km}G_{km-1}^{-1}S_{km-1,\sigma}(G_{km-1} -\\
&\quad -\sigma S_{km-1,\sigma})^{-1}B_{km-1} + Q_{km}G_{k-1m}^{-1}S_{k-1m,\sigma}(G_{k-1m} -\\
&\quad -\sigma S_{k-1m,\sigma})^{-1}F_{k-1m} + Q_{km}G_{k-1m}^{-1}S_{k-1m,\sigma}(G_{k-1m} -\\
&\quad -\sigma S_{k-1m,\sigma})^{-1}B_{k-1m})e,\ k \ge 2, m \ge 2.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Для дальнейшего доказательства теоремы будем использовать несколько следующих утверждений.

Лемма 1. Лемма 1. *Матрица $G_{l_n}^{-1}$ может быть представлена в виде*

$$\begin{gathered}
G_{l_n}^{-1} = G^{(1)} - G^{(2)},\\
0 < G^{(1)}e \le 1,\ 0 < G^{(1)}e \le 1,
\end{gathered} \tag{3.5}$$

причем для элементов $g_{ij}^{(k)}$ матриц $G^{(k)}$ $(k = 1,2)$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}
g_{ij}^{(1)} = O^*\left(\frac{1}{(1+|i-j|)^2}\right),\\
g_{ij}^{(2)} = O^*\left(\frac{1}{(1+i+j)^2} + \frac{1}{(2(l_n+1)-(i-j))^2}\right) + O\left(\frac{1}{l_n^2}\right).
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Лемма 2. *Для строчных сумм σ_{i,l_n} матриц $G_{l_n}^{-1}$ справедливы оценки*

$$0 < \sigma_{i,l_n} \le 1 - \frac{C}{\min\{i, l_n + 1 - i\}}. \tag{3.7}$$

Эти леммы доказаны в [6].

Лемма 3. Для элементов $r_{km,j}$, $j = 1,\dots,l_{km}$ вектора r_{km}, определяемого из соотношения (3.3), справедливы оценки

$$|r_{km,j}| \le \frac{C}{\min\{j^2, (l_{km}+1-j)^2\}}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\begin{gathered}
4G_{km}^{-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}F_{km-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}B_{km-1} -\\
-Q_{km}G_{k-1m}^{-1}F_{k-1m} - Q_{km}G_{k-1m}^{-1}B_{k-1m}.
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Представим матрицу (3.9) в виде

$$\begin{gathered}
(G_{km}^{-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}F_{km-1}) + (G_{km}^{-1} - D_{km}G_{km-1}^{-1}B_{km-1}) +\\
(G_{km}^{-1} - Q_{km}G_{k-1m}^{-1}F_{k-1m}) + (G_{km}^{-1} - Q_{km}G_{k-1m}^{-1}B_{k-1m}).
\end{gathered}$$

Пусть $g_{km,ij}^{(-1)}$ и $g_{km-1,ij}^{(-1)}$ — элементы матриц G_{km}^{-1} и G_{km-1}^{-1}. Для определенности положим, что $l_{km} \ge l_{km-1}$. Используя результаты [7], получаем для $1 \le i, j \le l_{km}$

$$\begin{gathered}
|g_{km,ij}^{(-1)} - g_{km-1,ij}^{(-1)}| \le \Bigl| 2\int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y) \times\\
\times \frac{\mu(x,y)(\mu(x,y))^{2(l_{km-1}+1)}}{(1-(\mu(x,y))^2)(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km-1}+1)})} \times\\
\times \frac{(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km}-l_{km-1})})}{(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km}+1)})}\eta_{ij}^{km}(x,y)dxdy +\\
+2\int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y) \times\\
\times \frac{\mu(x,y)}{(1-(\mu(x,y))^2)(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km-1}+1)})} \times\\
\times\left(\eta_{ij}^{km}(x,y) - \eta_{ij}^{km-1}(x,y)\right)dxdy\Bigr| = |I_1 + I_2|,
\end{gathered} \tag{3.10}$$

где $\eta_{ij}^{km}(x,y) = (\mu(x,y)^{|i-j|} - \mu(x,y)^{i+j}) \times (1-\mu(x,y)^{2(l_{km}+1)-2\max\{i,j\}})$.

Учитывая, что $|l_{km} - l_{km-1}| \le C^*$ (из условия гладкости области Π) и $0 \le \mu(x,y) \le 1$, имеем

$$\begin{gathered}
|I_1| \le C^*\int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y) \times\\
\times \frac{(\mu(x,y))^{2l_{km}+3}}{(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km-1}+1)})(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km}+1)})} \times\\
\times \eta_{ij}^{km}(x,y)dxdy.
\end{gathered}$$

Для I_2 аналогичным образом имеем

$$\begin{gathered}
|I_2| \le C^*\int_0^1\int_0^1 \sin^2(\pi x)\sin^2(\pi y) \times\\
\times \frac{\mu(x,y)(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km}-l_{km-1})})}{(1-(\mu(x,y))^2)(1-(\mu(x,y))^{2(l_{km-1}+1)})} \times\\
\times\left((\mu(x,y))^{|i-j|} - (\mu(x,y))^{i+j}\right) \times\\
\times\left(1-(\mu(x,y))^{2l_{km-1}-2\max\{i,j\}}\right)dxdy.
\end{gathered}$$

Из (3.10) и двух последних неравенств получим

$$\left|g_{km,ij}^{(-1)} - g_{km-1,ij}^{(-1)}\right| \le$$
$$\le \frac{C^*}{\min\{(i+j)^3, (2(l_{km}+1)-(i+j))^3\}}. \quad (3.11)$$

Аналогично получаются оценки

$$\left|g_{km,ij}^{(-1)} - g_{k-1m,ij}^{(-1)}\right| \le$$
$$\le \frac{C^*}{\min\{(i+j)^3, (2(l_{km}+1)-(i+j))^3\}}. \quad (3.12)$$

Заметим, что элементы матриц $D_{km}G_{km-1}F_{km-1}$, $D_{km}G_{km-1}B_{km-1}$, $Q_{km}G_{k-1m}F_{km-1}$, $Q_{km}G_{k-1m} \times B_{k-1m}$ получаются из элементов матрицы сдвигом вдоль главной диагонали, причем в силу условия гладкости области Π величина сдвига есть $O(1)$. Поэтому из (3.11)—(3.12), полагая $C = 4C^*$, для элементов $\tilde g_{km,ij}$ матрицы (3.9) получаем оценки

$$\left|\tilde g_{km,ij}\right| \le \frac{C}{\min\{(i+j)^3, (2(l_{km}+1)-(i+j))^3\}}. \quad (3.13)$$

С учетом (3.3) из (3.13) получаем оценки (3.8). Лемма доказана.

Лемма 4 Найдутся такие константы $C > 0$ и $\sigma_i > 0$, что для любого $\sigma \in [0, \sigma_0]$ справедливы оценки

$$0 \le S_{km,\sigma} \le C. \quad (3.14)$$

Доказательство. Докажем (3.14) для $\sigma = 0$. Пусть $C = \max\{(l^{01}+1)\frac{C_1}{C_2}, (l^{10}+1)\frac{C_1}{C_2}, 1\}$, где l^{01}, l^{10} — константы из замечания 1, C_1 — константа из леммы 3, C_2 — из леммы 2. Будем доказывать лемму с помощью метода математической индукции по k и m. Используя предположение индукции, замечание 1 и в силу леммы 2 для любого j $(1 \le j \le l_{km})$ имеем

$$\begin{aligned}(S_{km,0})_j &= (r_{km} + D_{km}G_{km-1}^{-1}S_{km-1,0}G_{km-1}^{-1}F_{km-1} + \\ &+ D_{km}G_{km-1}^{-1}S_{km-1,0}G_{km-1}^{-1}B_{km-1} + \\ &+ Q_{km}G_{k-1m}^{-1}S_{k-1m,0}G_{k-1m}^{-1}F_{k-1m} + \\ &+ Q_{km}G_{k-1m}^{-1}S_{k-1m,0}G_{k-1m}^{-1}B_{k-1m})_j \le \\ &\le \frac{C_1}{\min\{j^2, (l_{km}+1-j)^2\}} + \\ &+ \left(4 - \frac{2C_2}{\min\{j+l^{01}, l_{km}+1-j+l^{01}\}} - \right. \\ &\left. - \frac{2C_2}{\min\{j+l^{10}, l_{km}+1-j+l^{10}\}}\right)\frac{C}{4} \le C.\end{aligned} \quad (3.15)$$

Шаг индукции завершен. Далее заметим, что $G_{km-1}^{-1} \ge 0$ и $G_{km-1}^{-1} \ge 0$ (в силу свойств M-матриц), причем в силу теоремы об оценках элементов матриц $G_{l_n}^{-1}$, доказанной в [6], для некоторой константы $C_3 > 0$ имеем $diag\{g_{11}^{-1}, \ldots, g_{l_{km}l_{km}}^{-1}\} \ge C_3$, где C_3 не зависит от k и m. Поэтому выбирая $\sigma_0 = \frac{C_3}{C}$, индукцией по k и m из (3.4) получаем, что при $\sigma \in [0, \sigma_0]$ будут справедливы неравенства

$$0 \le S_{km,\sigma} \le S_{km,0} \le C.$$

Лемма 5 Найдется такая константа $\sigma_1 \in [0, \sigma_0]$, что для любого $\sigma \in [0, \sigma_1]$ справедливы неравенства

$$0 \le \tilde S_{km} \le S_{km,\sigma}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Из (3.2) с учетом того, что для любых k и m верно $G_{km}^{-1}\tilde S_{km}(G_{km} + \tilde S_{km})^{-1} = G_{km}^{-1} - (G_{km} + \tilde S_{km})^{-1}$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde S_{km}e &= r_{km} + D_{km}G_{km-1}^{-1}\tilde S_{km-1}(G_{km-1} + \\ &+ \tilde S_{km-1})^{-1}F_{km-1} + D_{km}G_{km-1}^{-1}\tilde S_{km-1} \times \\ &\times (G_{km-1} + \tilde S_{km-1})^{-1}B_{km-1} + Q_{km}G_{k-1m}^{-1}\tilde S_{k-1m} \times \\ &\times (G_{k-1m} + \tilde S_{k-1m})^{-1}F_{k-1m} + Q_{km}G_{k-1m}^{-1}\tilde S_{k-1m} \times \\ &\times (G_{k-1m} + \tilde S_{k-1m})^{-1}B_{k-1m}.\end{aligned} \quad (3.17)$$

Но так как G_{km-1} и G_{k-1m} являются M-матрицами, $\tilde S_{km-1}$ и $\tilde S_{k-1m}$ — диагональные матрицы, а $\| G_{km-1}^{-1} \|_\infty \le 1$ и $\| G_{k-1m}^{-1} \|_\infty \le 1$, то при достаточно малом $C_4 \in (0,1)$ имеем

$$\begin{aligned}&(G_{km-1}^{-1} + \tilde S_{km-1})^{-1} \le (G_{km-1}^{-1} + C_4\tilde S_{km-1})^{-1} \le \\ &\le G_{km-1}^{-1} - \frac{1}{2}G_{km-1}^{-1}C_4\tilde S_{km-1}G_{km-1}^{-1} \le G_{km-1}^{-1} - \sigma_1\tilde S_{km-1},\end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\sigma_1 = \min\{\sigma_0, \frac{C_4C_3^2}{2}\}$, а константа C_3 определяется из леммы 4. Аналогично определяются оценки

$$(G_{k-1m}^{-1} + \tilde S_{k-1m})^{-1} \le G_{k-1m}^{-1} - \sigma_1\tilde S_{k-1m}.$$

Поэтому при $\sigma_1 \in [0, \sigma_0]$ из (3.2) индукцией по k и m из соображений монотонности получаем (3.16). Лемма доказана.

Из леммы 5 следует, что для доказательства (3.1) достаточно установить аналогичные оценки для матриц (3.4) при некотором малом $\sigma > 0$, не зависящем от N. Зафиксируем некоторое значение σ, требование на малость которого уточним в процессе доказательства. Рассмотрим векторы $\hat S_{km} = S_{km,\sigma}e = \{\hat s_{km,j}\}$, $1 \le j \le l_{km}$, определяемые из формул

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_{11} = S_{11}e,\\
&\hat{S}_{1m} = r_{1m} + 2D_{1m}G^{-1}_{1m-1}(\hat{S}_{1m-1} - \sigma\hat{S}_{1m-1}),\\
&\hat{S}_{k1} = r_{k1} + 2Q_{k1}G^{-1}_{k-11}(\hat{S}_{k-11} - \sigma\hat{S}_{k-11}),\\
&\hat{S}_{km} = r_{km} + 2D_{km}G^{-1}_{km-1}(\hat{S}_{km-1} - \sigma\hat{S}_{km-1}) +\\
&\qquad +2Q_{km}G^{-1}_{k-1m}(\hat{S}_{k-1m} - \sigma\hat{S}_{k-1m}).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Учитывая, что из леммы 2 $G^{-1}_{km-1}e \le e$, $G_{k-1m}e \le e$, и сравнивая (3.19), (3.18) и (3.17) получаем, что $\hat{S}_{km} \ge S_{km,\sigma}e \ge S_{km}e$, т.е достаточно доказать оценку

$$\left|\hat{s}_{km,j}\right| \le \frac{C}{\min\{j, l_{km} + 1 - j\}} + \frac{C}{k} + \frac{C}{m}. \tag{3.20}$$

Разобьем r_{km} в (3.19) на сумму двух векторов $r^1_{km} + r^2_{km}$ таким образом, чтобы выполнялось $r^1_{km,j} = r^2_{km,j}$ при $j \le [l_{km}/2]$, $r^1_{km,j} = 0$ при $j \ge [l_{km}/2]$. Тогда в силу леммы 3 имеем

$$\left|r^1_{km,j}\right| \le \frac{C}{j^2}, \left|r^2_{km,j}\right| \le \frac{C}{(l_{km} + 1 - j)^2}. \tag{3.21}$$

Рассмотрим вектора $\hat{S}^p_{km}$ $(p = 1,2)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}
&\hat{S}^p_{11} = S_{11}e,\\
&\hat{S}^p_{1m} = r^p_{1m} + 2D_{1m}G^{-1}_{1m-1}(\hat{S}^p_{1m-1} - \sigma(\hat{S}^p_{1m-1})^2),\\
&\hat{S}^p_{k1} = r^p_{k1} + 2Q_{k1}G^{-1}_{k-11}(\hat{S}^p_{k-11} - \sigma(\hat{S}^p_{k-11})^2),\\
&\hat{S}^p_{km} = r^p_{km} + 2D_{km}G^{-1}_{km-1}(\hat{S}^p_{km-1} - \sigma(\hat{S}^p_{km-1})^2) +\\
&\qquad +2Q_{km}G^{-1}_{k-1m}(\hat{S}^p_{k-1m} - \sigma(\hat{S}^p_{k-1m})^2).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Учитывая, что $0 \le r^p_{km} \le r_{km}$, в силу леммы 4 из соображений монотонности при $\sigma \in [0, \sigma_0]$ имеем

$$0 \le \hat{S}^p_{km} \le C. \tag{3.23}$$

Покажем, что при достаточно малом $\sigma > 0$

$$\hat{S}_{km} \le \hat{S}^1_{km} + \hat{S}^2_{km}. \tag{3.24}$$

Действительно, обозначим $R_{km} = \hat{S}^1_{km} + \hat{S}^2_{km}$. В силу неравенства $(\hat{S}^1_{km})^2 + (\hat{S}^2_{km})^2 \le (\hat{S}^1_{km} + \hat{S}^2_{km})^2$ из (3.22) имеем

$$\begin{aligned}
R_{km} \ge r_{km} + 2(&D_{km}G^{-1}_{km-1}(R_{km-1} - \sigma R_{km-1}) +\\
&+Q_{km}G^{-1}_{k-1m}(R_{k-1m} - \sigma R_{k-1m})),
\end{aligned}$$

откуда с учетом (3.19) получаем

$$\begin{aligned}
&R_{km} - \hat{S}_{km} \ge 2D_{km}G^{-1}_{km-1} \times\\
&\times(I - \sigma(R_{km-1} + \hat{S}_{km-1}))(R_{km-1} - \hat{S}_{km-1}) +\\
&+2Q_{km}G^{-1}_{k-1m}(I - \sigma(R_{k-1m} + \hat{S}_{k-1m}))(R_{k-1m} - \hat{S}_{k-1m}).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Из (3.23) и неотрицательности матриц G^{-1}_{km-1} и G^{-1}_{k-1m} вытекает, что если положить $\sigma \le \frac{1}{4C}$ то (3.24) получается из (3.25) индукцией по k и m.

Из (3.24) следует, что для доказательства теоремы 3.2 достаточно установить, что для элементов $\hat{s}^p_{km,j}$, $p = 1,2$, $1 \le j \le l_{km}$ векторов $\hat{S}^p_{km}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&\left|\hat{s}^1_{km,j}\right| \le \frac{C}{j} + \frac{C}{k} + \frac{C}{m},\\
&\left|\hat{s}^2_{km,j}\right| \le \frac{C}{l_{km} + 1 - j} + \frac{C}{k} + \frac{C}{m}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Докажем первую из оценок (3.26) (доказательство второй аналогично). Будем строить для $\hat{S}^1_{km}$ мажоранту в виде

$$\begin{aligned}
&M_{km} = \{M_{km,j}\},\\
&M_{km,j} = \frac{C_1}{k + \xi} + \frac{C_2}{m + \xi} + \frac{C_3}{j + \xi},\\
&j = 1, \ldots, l_{km},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

где C_1, C_2, C_3, ξ — независящие от N параметры, определяемые из соотношений

$$C_1 = C_2 = \|S_{11}\|_\infty (\xi + 1), C_3 = \frac{\xi}{\sigma^{3/4}}, \tag{3.28}$$

а $\sigma \in [0, \sigma_1]$ — константа из леммы 5.

Лемма 6. Пусть $\Lambda_{km} = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{km}\}$, $\lambda^{-1}_j = \frac{1}{j+\xi}$. Найдется такая независящая от ξ константа C, что для строчных сумм $\tilde{\sigma}_j$ матриц $\Lambda_{km}G^{-1}_{km}\Lambda^{-1}_{km}$ ($1 \le k \le n$, $1 \le m \le s_k$, p и s_k были описаны при постановке задачи) справедливы оценки

$$\tilde{\sigma}_j \le 1 + \frac{C}{j + \xi}.$$

Доказательство. Зафиксируем j-ю строку матрицы $\Lambda_{km}G^{-1}_{km}\Lambda^{-1}_{km}$. Пусть $\Delta\tilde{\sigma}_j$ — приращение строчной суммы матрицы $\Lambda_{km}G^{-1}_{km}\Lambda^{-1}_{km}$ по сравнению с матрицей G^{-1}_{km}. Обозначим $s_1 = max\{[j/2], 2j - l_{km}\}$, $s_2 = min\{[3j/2], l_{km}\}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\sigma}_j = \sum_{s=1}^{s_1-1}\left(\frac{j+\xi}{s+\xi} - 1\right)g^{(-1)}_{js} + \sum_{s=s_1}^{s_2}(\cdots) + \sum_{s=s_2+1}^{l_km}(\cdots) =\\
= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.
\end{aligned}$$

Далее, в силу результатов [7] имеем

$$\left|\Sigma_1\right| \le \sum_{s=1}^{s_1-1}\left|\frac{j-s}{s+\xi}\right| \times \left(\frac{(2+j)s}{(j-s+1)^2(j+s-1)^2} + \right.$$

$$+\frac{s(4(l_{km}+1)-2j)}{(2(l_{km}+1)-(j+s))^2(2(l_{km}+1)-(j-s))^2}+ +O\left(\frac{1}{l_{km}^2}\right)\Bigg). \tag{3.29}$$

Заметим, что при $j > s$ справедливы неравенства

$$\frac{4(l_{km}+1)-2j}{(2(l_{km}+1)-(j-s))^2} \le l_{km}, \ \frac{(j-s)(2+j)}{j-s+1} \le j.$$

Тогда из (3.29) имеем

$$|\Sigma_1| \le \sum_{s=1}^{s_1-1} \frac{s}{s+\xi}\left(\frac{j}{(j-s+1)(j+s-1)^2}+ +\frac{j-s}{(2(l_{km}+1)-(j+s))^2} l_{km} + O\left(\frac{1}{l_{km}^2}\right)\right). \tag{3.30}$$

Из (3.30) при $j \ge \xi$ имеем

$$|\Sigma_1| \le \sum_{s=1}^{s_1-1} \frac{((l_{km}-s)-(l_{km}-j))}{((l_{km}-s)+(l_{km}-j)+2)^2} l_{km} + +\frac{C}{j}\begin{cases} 1, & j \le 2l_{km}/3, \\ \ln(l_{km}/(l_{km}-j+1)), & j > 2l_{km}/3 \end{cases} \le \le \frac{C}{j+\xi}\begin{cases} 1, & j \le 2l_{km}/3, \\ \ln(l_{km}/(l_{km}-j+1)), & j > 2l_{km}/3. \end{cases} \tag{3.31}$$

При $j \le \xi$ имеем

$$|\Sigma_1| \le \frac{C}{j^2}\sum_{s=1}^{j}\frac{s}{s+\xi} \le \frac{C}{j^2}\frac{j}{j+\xi} j = \frac{C}{j+\xi}. \tag{3.31}$$

Для оценки Σ_2 представим ее в виде $\Sigma_2 = \Sigma_{2,1} + \Sigma_{2,2}$, где

$$\Sigma_{2,k} = \sum_{s=s_1}^{s_2}\left(\frac{j+\xi}{s+\xi}-1\right)g_{js}^{(k)}, k=1,2,$$

а элементы $g_{js}^{(k)}$ определяются из леммы 1 (3.6). Тогда

$$|\Sigma_{2,2}| \le C\sum_{s=s_1}^{s_2}\left|\frac{j-s}{s+\xi}\right| \times \times\left(\frac{1}{(j+s+1)^2}+\frac{1}{(2(l_{km}+1)-(j+s))^2}+ +O\left(\frac{1}{l_{km}^2}\right)\right) \le \sum_{s=s_1}^{s_2}\frac{j}{j+\xi}\frac{1}{j^2}+\frac{C}{j+\xi}\times$$

$$\times\sum_{s=s_1}^{s_2}\frac{|(l_{km}-s)-(l_{km}-j)|}{((l_{km}-s)+(l_{km}-j)+2)^2} \le \frac{C}{j+\xi}+ +\frac{C}{j+\xi}\begin{cases} \dfrac{(s_2-s_1)}{l_{km}}, & j \le 2l_{km}, \\ \displaystyle\sum_{s=2j-l_{km}}^{l_{km}} \frac{1}{(l_{km}-s)+(l_{km}-j)+2}, & j > 2l_{km} \end{cases} \le \le \frac{C}{j+\xi}. \tag{3.33}$$

Для $\Sigma_{2,1}$, учитывая равенство $g_{jj+\nu}^{(1)} = g_{jj-\nu}^{(1)}$ и оценки полученные в теореме об оценках элементов матриц $G_{l_n}^{-1}$, доказанной в [6], получаем

$$|\Sigma_{2,1}| = \left|\sum_{\nu=s_1}^{s_2}\frac{j-s}{s+\xi}g_{jj+\nu}^{(1)}\right| = \left|\sum_{\nu=s_1-j}^{s_2-j}\frac{-\nu}{j+\nu+\xi}g_{jj+\nu}^{(1)}\right| \le \le \left|\sum_{\nu=0}^{s_2-j} g_{jj+\nu}^{(1)}\left(-\frac{\nu}{j+\nu+\xi}+\frac{\nu}{j-\nu+\xi}\right)\right| \le \le C\sum_{\nu=0}^{s_2-j}\frac{1}{(\nu+1)^2}\frac{\nu^2}{(j+\nu+\xi)(j-\nu+\xi)} \le \frac{C}{j+\xi}. \tag{3.34}$$

Таким образом, из (3.33), (3.34) имеем

$$|\Sigma_2| \le \frac{C}{j+\xi}. \tag{3.35}$$

Наконец, учитывая, что $\Sigma_3 \ne 0$ лишь при $j \le 2l_{km}/3$ и $s_2 = [3/2j]$, из той же теоремы для таких j получаем

$$|\Sigma_3| \le C\sum_{s=s_2+1}^{l_{km}}\frac{s-j}{j+\xi}\left(\frac{(2+j)s}{(s-j+1)^2(s+j+1)^2}+ +\frac{1}{l_{km}^2}\right) \le C\frac{j}{j+\xi}\sum_{s=s_2+1}^{l_{km}}\frac{1}{(j+s+1)^2} \le \le C\frac{j}{j+\xi}\frac{C}{j} \le \frac{C}{j+\xi}. \tag{3.36}$$

Из (3.32), (3.35) и (3.36) получаем

$$|\Delta\sigma_j| \le \frac{C}{j+\xi}\times\begin{cases} 1, & j \le l_{km}, \\ \ln(l_{km}/(l_{km}-j+1)), & j > 2l_{km}/3. \end{cases} \tag{3.37}$$

Так как $x^{-1}\ln(x) = O(1)$ при $x \to 0$, то в силу леммы 2 и (3.37) для достаточно большой, но независящей от l_{km} и ξ константы C из леммы 4 при $j \ge C(C+1)^{-1}l_{km}$ получаем $\sigma_j + \Delta\sigma_j \le 1 \le 1 + C/(j+\xi)$, а при $\le C(C+1)^{-1}l_{km}$

эта оценка вытекает непосредственно из леммы 2 и (3.37).

Лемма 7. Найдется константа $\sigma \in (0, \sigma_1]$ и натуральное число ξ, не зависящее от l_{km}, N, такие что для векторов, определяемых из (3.27), (3.28) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &M_{11} \geq S_{11}e, \\ &M_{1m} \geq r_{1m}^1 + 2D_{1m}G_{1m-1}^{-1}(M_{1m-1} - \sigma M_{1m-1}^2), \\ &M_{k1} \geq r_{k1}^1 + 2Q_{k1}G_{k-11}^{-1}(M_{k-11} - \sigma M_{k-11}^2), \\ &M_{km} \geq r_{km}^1 + 2D_{km}G_{km-1}^{-1}(M_{km-1} - \sigma M_{km-1}^2) + \\ &\qquad +2Q_{km}G_{k-1m}^{-1}(M_{k-1m} - \sigma M_{k-1m}^2). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Доказательство. Так как $C_1 = C_2 = \|S_{11}\|_\infty (\xi + 1)$, то $C_1\sigma \geq 1$, $C_2\sigma \geq 1$. Из этих соображений будем выбирать $\xi = |S_{11}|_\infty ([\sigma^{-1}] + 1)$. Рассмотрим выражения $M_{km-1} - \sigma M_{km-1}^2$ и $M_{k-1m} - \sigma M_{k-1m1}^2$. С учетом $C_3 = \xi/\sigma^{3/4}$ имеем для $j = 1, \ldots, l_{km-1}$

$$\begin{aligned} M_{km-1,j} - \sigma M_{km-1,j}^2 &\leq \frac{C_1}{k+\xi} + \frac{C_2}{m-1+\xi} + \frac{C_3}{j+\xi} - \\ &- \frac{C_1^2\sigma}{(k+\xi)^2} - \frac{C_2^2\sigma}{(m-1+\xi)^2} - \frac{C_3^2\sigma}{(j+\xi)^2} = \\ &= \frac{C_1}{k+\xi}\left(1 - \frac{C_1\sigma}{k+\xi}\right) + \frac{C_2}{m-1+\xi}\left(1 - \frac{C_2\sigma}{m-1+\xi}\right) + \\ &+ \frac{C_3}{j+\xi}\left(1 - \frac{C_3\sigma}{j+\xi}\right) = \\ &= \frac{C_1}{k+\xi}\frac{k+\xi-C_1\sigma}{k+\xi} + \frac{C_2}{m+\xi-1}\frac{m+\xi-C_2\sigma-1}{m+\xi-1} + \\ &+ \frac{C_3}{j+\xi}\frac{j+\xi-C_3\sigma}{j+\xi} \leq \frac{C_1}{k+\xi} + \frac{C_2}{m+\xi} + \frac{C_3}{j+\xi} - \\ &- \frac{C_3^2\sigma}{(j+\xi)^2} = \frac{C_1}{k+\xi} + \frac{C_2}{m+\xi} + \frac{C_3}{j+\xi} - \frac{\xi^2}{\sqrt{\sigma}(j+\xi)^2}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Умножим вектор $M_{km-1} - \sigma M_{km-1}^2$ слева на матрицу G_{km}^{-1} с неотрицательными элементами и рассмотрим результат с учетом оценок (3.39). Оценка j-го элемента этого вектора состоит из четырех слагаемых.

Так как строчные суммы G_{km-1}^{-1} меньше единицы, для первого и второго слагаемых имеем

$$\begin{aligned} &\left\{G_{km-1}^{-1}\left\{\frac{C_1}{k+\xi}\right\}_{j=1}^{l_{km-1}}\right\}_j \leq \frac{C_1}{k+\xi}, \\ &\left\{G_{km-1}^{-1}\left\{\frac{C_2}{m+\xi}\right\}_{j=1}^{l_{km-1}}\right\}_j \leq \frac{C_2}{m+\xi}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Для третьего слагаемого в силу леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} &\left\{G_{km-1}^{-1}\left\{\frac{C_3}{j+\xi}\right\}_{j=1}^{l_{km-1}}\right\}_j = \\ &= \left\{\Lambda_{km-1}^{-1}(\Lambda_{km-1}G_{km-1}^{-1}\Lambda_{km-1}^{-1})\{C_3\}_{j=1}^{km-1}\right\}_j \leq \\ &\leq \left\{\Lambda_{km-1}^{-1}\left\{C_3\left(1 + \frac{C}{j+\xi}\right)\right\}_{j=1}^{l_{km-1}}\right\}_j = \\ &= \frac{C_3}{j+\xi} + \frac{CC_3}{(j+\xi)^2}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Таким образом, с учетом (3.40), (3.41), вида для C_3 (3.28), и неравенства $g_{ii}^{(-1)} \geq C_4 > 0$, для диагональных элементов матриц G_{km}^{-1} из (3.39) получим

$$\begin{aligned} &\left\{G_{km-1}^{-1}(M_{km-1} - \sigma M_{km-1}^2)\right\}_j \leq \\ &\leq \frac{C_1}{k+\xi} + \frac{C_2}{m+\xi} + \frac{C_3}{j+\xi} + \frac{CC_3 - C_4 n^2/\sqrt{\sigma}}{(j+\xi)^2}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Аналогично получаем оценки

$$\begin{aligned} &\left\{G_{k-1m}^{-1}(M_{k-1m} - \sigma M_{k-1m}^2)\right\}_j \leq \\ &\leq \frac{C_1}{k+\xi} + \frac{C_2}{m+\xi} + \frac{C_3}{j+\xi} + \frac{CC_3 - C_4 n^2/\sqrt{\sigma}}{(j+\xi)^2}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Заметим, что применение матриц Q_{k-1m} и D_{km-1} может сдвинуть компоненты вектора в левой части (3.42) и (3.43) на $O(1)$ позиций, т.е увеличить j-ю компоненту на

$$\max\left\{\frac{C_3}{j+\xi-l^{01}} - \frac{C_3}{j+\xi}, \frac{C_3}{j+\xi-l^{10}} - \frac{C_3}{j+\xi}\right\},$$

где $l^{01} = O(1)$ и $l^{10} = O(1)$ — константы из замечания 1.

Пусть теперь $\sigma \in (0, \sigma_1]$ столь мало, что

$$\frac{C_4\xi^2}{\sqrt{\sigma}} \geq CC_3 + \frac{C_3(j+\xi)^2}{j+\xi-l}, \; l = \max\{l^{01}, l^{10}\}, \tag{3.44}$$

и, кроме того,

$$\frac{C_3}{j+\xi} \geq r_{km,j}^1 \tag{3.45}$$

при всех k, m, j. Легко видеть, что неравенства (3.44), (3.45) с учетом формул $\xi = \|S_{11}\|_\infty ([1/\sigma] + 1)$, $C_3 = \xi/\sigma^{3/4}$ и оценок (3.21), могут быть удовлетворены за счет выбора $\sigma > 0$, не зависящего от N, l_{km}. Тогда имеем

$$r_{1m}^{1}+2D_{km}G_{km-1}^{-1}(M_{km-1}-\sigma M_{km-1}^{2})+$$
$$+2Q_{km}G_{k-1m}^{-1}(M_{k-1m}-\sigma M_{k-1m}^{2})\leq$$
$$\leq\frac{C_1}{k+\xi}+\frac{C_2}{m+\xi}+\frac{C_3}{j+\xi},$$

и неравенства (3.38) будут выполнены в силу принципа математической индукции. Лемма доказана.

В силу леммы 7 построение (3.27) возможно. Теперь заметим, что из вида мажоранты M_{km} и равенств (3.28) следует

$$\|M_{km}\|_{\infty}\leq\frac{C_5}{\sigma^{3/4}}, \tag{3.46}$$

где C_5 не зависит от σ. С другой стороны, из леммы 7 и (3.22) имеем

$$\begin{aligned}&M_{km}-\hat{S}_{km}^{1}\geq D_{km}G_{km-1}^{-1}((M_{km-1}-\hat{S}_{km-1}^{1})-\\&-\sigma(M_{km-1}^{2}-(\hat{S}_{km-1}^{1})^{2}))+Q_{km}G_{k-1m}^{-1}\times\\&\times((M_{k-1m}-\hat{S}_{k-1m}^{1})-\sigma(M_{k-1m}^{2}-(\hat{S}_{k-1m}^{1})^{2}))\geq 0,\end{aligned} \tag{3.47}$$

при условии $(M_{km-1}-\hat{S}_{km-1}^{1})-\sigma(M_{km-1}^{2}-(\hat{S}_{km-1}^{1})^{2})\geq 0$ и $(M_{k-1m}-\hat{S}_{k-1m}^{1})-\sigma(M_{k-1m}^{2}-(\hat{S}_{k-1m}^{1})^{2})\geq 0$. Последние неравенства будут иметь место, если $(M_{km-1}-\hat{S}_{km-1}^{1})\leq 1/\sigma$ и $(M_{k-1m}-\hat{S}_{k-1m}^{1})\leq 1/\sigma$. Поэтому выбирая $\sigma\in(0,\sigma_1]$ столь малым, что $\frac{C_5}{\sigma^{3/4}}\leq\frac{1}{2\sigma}$, из (3.46) и (3.47) индукцией по k и m получаем $\hat{S}_{km}^{1}\leq M_{km}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. — М.: Наука, 1995.

2. *Axelsson O.* Iterative solution methods. Cambridge. — University Press. — 1996.

3. *Ортега Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.

4. *Блатов И. А.* Об оценках LU-разложений разреженных матриц и их приложениях к методам неполной факторизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т. 37. № 3. С. 259—276.

5. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука. — 1980.

6. *Эксаревская М. Е.* Оценки предобуславливателей типа неполной блочной факторизации для эллиптических уравнений // Труды молодых ученых Воронежского государственного университета. — Воронеж, 1999. — Вып. 1. — С. 21—27.

7. *Эксаревская М. Е.* Исследование матриц-предобуславливателей при решении трехмерных эллиптических краевых задач первого рода//Труды молодых ученых Воронежского государственного университета. — Воронеж, 2001. — Вып. 1. — С. 25—32.