УДК 517.927

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ РАЗНОПОРЯДКОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ

© 2002 г. Т. В. Белоглазова

Воронежский государственный университет

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи Штурма—Лиувилля для уравнения второго порядка на графах, достаточно хорошо изучены (см., например, [1]—[5], где получены аналоги теорем Штурма, изучена неосцилляция и спектральная задача). Такие задачи возникают при описании упругих колебаний системы, образованной из скрепленных между собой струн. Для систем из стержней, описываемых уравнениями четвертого порядка на произвольных графах, изучена разрешимость, установлено существование и положительность функции Грина [6]. В частных случаях осцилляционность спектра задач для цепочки стержней установлена в [7]—[10], а для цепочки стержней и струн в [8]. В данной работе рассматривается модельная задача для обыкновенного дифференциального уравнения на геометрическом графе с циклом, когда на части ребер заданы уравнения четвертого порядка, а на остальной части — уравнения второго порядка. Вариационным методом поставлена линейная краевая задача, доказаны ее однозначная разрешимость, существование непрерывной и положительной функции Грина откуда следует положительность и простота ведущего собственного значения спектральной задачи.

2. ВЫВОД КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Пусть Γ — геометрический граф в $\mathbb{R}^3$, состоящий из шести вершин $\{a_k, k=\overline{1,6}\}$ и шести отрезков (ребер) $\gamma_1=[a_1,a_2]$, $\gamma_2=[a_2,a_3]$, $\gamma_3=[a_3,a_1]$, $\gamma_4=[a_1,a_4]$, $\gamma_5=[a_2,a_5]$, $\gamma_6=[a_3,a_6]$. Механическая система образована треугольником из шарнирно-сочлененных стержней, растянутым за вершины тремя струнами и имеет положение равновесия Γ так, что стержни совпадают с γ_1, γ_2, γ_3, а струны — с γ_4, γ_5, γ_6, причем концы струн закреплены в a_4, a_5, a_6. Будем считать, что смещение точек механической системы от положения равновесия происходит параллельно некоторой прямой под действием внешней нагрузки, направленной вдоль этой прямой. Тогда отклонение и плотность внешней нагрузки можно описать функциями $u, f:\Gamma\to\mathbb{R}$ соответственно. Введем обозначения $\partial\Gamma=\{a_4,a_5,a_6\}$ — множество граничных вершин, а $J(\Gamma)=\{a_1,a_2,a_3\}$ − множество внутренних вершин графа Γ. Параметризуем ребра $\gamma_k, k=\overline{1,6}$ следующим образом. Пусть $[a,b]$ — произвольное ребро графа длины ρ, тогда натуральная параметризация задается формулой: $x=\varphi(t)\ (0\le t\le\rho)$, где $\varphi(t)=a+t(b-a)/\rho$. Сужение функции $u(x)$ на ребро γ будем обозначать $u_\gamma(x)$, а вместо $u_{\gamma_i}(x)$ будем писать просто $u_i(x)$. При выбранной параметризации ребра γ_i функция $u(\varphi_i(t))$ оказывается обычной функцией на отрезке из $\mathbb{R}$.

Производная функции на графе определяется следующим образом. Если для данной параметризации $x=\varphi_i(t)\ (t\in[0,\rho_i])$ ребер $\gamma_i, i=\overline{1,6}$ оказывается, что для функции u при всех i и t существует производная $\frac{d}{dt}u(\varphi_i(t))$, то будем говорить, что на Γ определена производная $u'(x)$. При этом на ребре $u'(x)=\frac{d}{dt}u(\varphi_i(t))$, если $x=\varphi_i(t), t\in[0,\rho_i]$. В каждой вершине $a\in J(\Gamma)$ производная определена как набор производных $u'_i(a)$ по направлению ребер, примыкающих к a. Аналогично определяются производные высших порядков. Заметим, что на каждом ребре можно ввести две натуральные параметризации различной ориентации, и, естественно, производные нечетного порядка зависят от ориентации ребра, а производные четного порядка — нет. При формулировании условий согласования, содержащих производные нечетного порядка, нам удобнее пользоваться производными по направлению «от вершины», которые будем обозначать $u^{(j)}(a+0)$.

Пусть $p(\cdot)$ характеризует упругость стержней $\gamma_i, i=\overline{1,3}$, а $q(\cdot)$ характеризует силы натяжения струн $\gamma_i, i=\overline{4,6}$. Будем считать функции $q_i(\cdot)$, заданными на $\gamma_i, i=\overline{4,6}$, положительными, непрерывно дифференцируемыми (т.е. $q_i(\cdot)\in C^1(\gamma_i), i=\overline{4,6}$) и $q_i(\cdot)\equiv 0, i=\overline{1,3}$, а функции $p_i(\cdot)$, заданные на $\gamma_i, i=\overline{1,3}$, положительными, дважды непрерывно дифференцируемыми (т.е. $p_i(\cdot)\in C^2(\gamma_i), i=\overline{1,3}$) и $p_i(\cdot)\equiv 0, i=\overline{4,6}$.

Функция $f(\cdot)$, заданная на Γ и непрерывная на $\gamma_i, i=\overline{1,6}$, задает плотность внешней нагрузки, действующей на описанной выше систему.

Введем теперь класс функций $\mathcal{T}=\{u(\cdot):\Gamma\to\mathbb{R}\mid u_i\in C^4(\gamma_i), i=\overline{1,3}; u_i\in C^2(\gamma_i), i=\overline{4,6}\}$.

Условия закрепления концов струн, отличных от вершин треугольника, имеет вид

$$u_i(a_i)=0, i=\overline{4,6}. \tag{1}$$

В вершинах треугольника $a_1a_2a_3$, т.е. в точках соединения струн и стержней, должны выполняться условия непрерывности для функций $u_i(\cdot), i=\overline{1,6}$

$$\begin{aligned} u_1(a_2)&=u_3(a_1)=u_4(a_1),\\ u_1(a_2)&=u_2(a_2)=u_5(a_2),\\ u_3(a_3)&=u_2(a_3)=u_6(a_3). \end{aligned} \tag{2}$$

Условия шарнирного сочленения стержней в точках a_1, a_2, a_3 означают равенства

$$\begin{aligned} p_1(a_2+0)u_1''(a_2+0)&=p_2(a_2+0)u_2''(a_2+0)=0,\\ p_2(a_3+0)u_2''(a_3+0)&=p_3(a_3+0)u_3''(a_3+0)=0,\\ p_3(a_1+0)u_3''(a_1+0)&=p_1(a_1+0)u_1''(a_1+0)=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме того, в этих же точках должны выполняться условия баланса натяжений

$$\begin{aligned} &(p_1u_1'')'(a_1+0)+(p_3u_3'')'(a_1+0)-(q_4u_4')(a_1+0)=0,\\ &(p_2u_2'')'(a_2+0)+(p_1u_1'')'(a_2+0)-(q_5u_5')(a_2+0)=0,\\ &(p_3u_3'')'(a_3+0)+(p_2u_2'')'(a_3+0)-(q_6u_6')(a_6+0)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем справедливость (3), (4).

Теорема 1. *Если потенциальная энергия рассматриваемой задачи определяется функционалом*

$$\Phi(u)=\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i}\left[\frac{p_i}{2}u_i''^{2}-f_iu_i\right]dx+\sum_{i=4}^{6}\int_{\gamma_i}\left[\frac{q_i}{2}u_i'^{2}-f_iu_i\right]dx, \tag{5}$$

тогда для функций класса $\mathcal{T}$, удовлетворяющих условиям (1), (2), стационарное значение $u(\cdot)$ функционала (5) удовлетворяет условиям (3), (4) и следующим уравнениям:

$$(p_iu_i'')''=f_i, i=\overline{1,3}, \tag{6}$$

$$-(q_iu_i')'=f_i, i=\overline{4,6}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть h произвольная функция из класса $\mathcal{T}$, для которой выполняются условия (1), (2). Для компактности записи введем новые обозначения. Пусть $\gamma_1=[b_1,b_2]$, $\gamma_2=[b_3,b_4]$, $\gamma_3=[b_5,b_6]$, $\gamma_4=[b_7,b_8]$, $\gamma_5=[b_9,b_{10}]$, $\gamma_6=[b_{11},b_{12}]$, такие, что

$$b_1=b_6=b_7=a_1, b_2=b_3=b_9=a_2,$$
$$b_4=b_5=b_{11}=a_3, b_{10}=a_5, b_8=a_4, b_{12}=a_6.$$

Тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$\Phi(u)=\sum_{i=1}^{3}\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}\left[\frac{p_i}{2}u_i''^{2}-f_iu_i\right]dx+\sum_{i=4}^{6}\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}\left[\frac{q_i}{2}u_i'^{2}-f_iu_i\right]dx, \tag{8}$$

Для первой вариации после необходимых интегрирований по частям имеем:

$$\delta\Phi(u)h=\sum_{i=1}^{3}\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}\left[(p_iu_i'')''-f_iu_i\right]h_idx-\sum_{i=4}^{6}\int_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}\left[(q_iu_i')'+f_iu_i\right]h_idx+\sum_{i=1}^{3}\left[(p_iu_i'')h_i'-(p_iu_i'')'h_i\right]\Big|_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}+\sum_{i=4}^{6}q_iu_i'h_i\Big|_{b_{2i-1}}^{b_{2i}}.$$

В силу принципа Ферма $\delta\Phi(u)h=0$ для любого $h\in\mathcal{T}$. Выбирая h с носителем внутри отрезка γ_i, получим уравнения Эйлера (6), (7).

Если обозначить приращение u на произвольном отрезке $\gamma=[c,d]$ через $\Delta_\gamma u=u(d)-u(c)$, то имеем:

$$\delta\Phi(u)h=\sum_{i=1}^{3}\Delta_{\gamma_i}\left[(p_iu_i'')h_i'-(p_iu_i'')'h_i\right]+\sum_{i=4}^{6}\Delta_{\gamma_i}q_iu_i'h_i=0. \tag{9}$$

Из условия (1) следует выполнение равенств: $h_i(b_8)=h_i(b_{10})=h_i(b_{12})=0, i=\overline{4,6}$. Тогда, в силу произвольности выбора h из класса $\mathcal{T}$ и условий (1), (2), после приведения подобных в равенстве (9), получаются равенства (3) и (4). Теорема доказана.

Интересным представляется изучение свойств решений задачи.

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Назовем задачу (1)—(4), (6), (7) невырожденной, если она однозначно разрешима при любой f, для которой $f_i, i=\overline{1,6}$ непрерывны на $\gamma_i, i=\overline{1,6}$.

Теорема 2. *Однородная задача (1)—(4), (6) и (7) при* $f_i=0, i=\overline{1,6}$ *имеет только тривиальное решение* $u\equiv 0$ *на* Γ.

Доказательство. Для уравнений (6) и (7) соответствующие однородные уравнения имеют вид:

$$\left(p_i u_i''\right)''=0 \tag{10}$$

$$-\left(q_i u_i'\right)'=0. \tag{11}$$

Из равенства (2) следует, что $\left(p_i u_i''\right)'=c_i=$ $=const, i=\overline{1,3}$ на $\gamma_i, i=\overline{1,3}$, а $-q_i u_i'=c_i=const$, $i=\overline{4,6}$ на $\gamma_i, i=\overline{4,6}$. Тогда $p_i u_i''$ — линейные функции, которые по условию (3) обращаются в нуль на границах $\gamma_i, i=\overline{1,3}$, т.е. в точках a_1,a_2,a_3. Очевидно $p_i u_i''\equiv 0, i=\overline{1,3}$ на $\gamma_i, i=\overline{1,3}$. Отсюда следует, что $\left(p_i u_i''\right)'=0, i=\overline{1,3}$ на всех $\gamma_i, i=\overline{1,3}$. Из условия (4) вытекает справедливость равенств $-q_i u_i'=0, i=\overline{4,6}$ в точках a_1,a_2,a_3, а из уравнений (11)следует, что $-q_i u_i'\equiv 0$ на $\gamma_i, i=\overline{4,6}$. Отсюда получаем $u_i=c_i=const, i=\overline{4,6}$ на $\gamma_i, i=\overline{4,6}$ и в силу условия (1), они тождественно равны нулю на всех $\gamma_i, i=\overline{4,6}$. Из условий $p_i u_i''\equiv 0, i=\overline{1,3}$ на $\gamma_i, i=\overline{1,3}$ вытекает $u_i'=d_i=const, i=\overline{1,3}$ на $\gamma_i, i=\overline{1,3}$. Следовательно u_i — линейные функции, которые по доказанному выше и условию (2), обращаются в нуль на границах $\gamma_i, i=\overline{1,3}$. Значит они тождественно равны нулю на всех $\gamma_i, i=\overline{1,3}$. Итак, $u\equiv 0$, на Γ. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любой функций* f, *для которой* $f_i, i=\overline{1,6}$ *непрерывны на* γ_i, *задача (1)—(4), (6), (7) однозначно разрешима.*

Следствие 2. *Существует единственная непрерывная на* $\Gamma\times\Gamma$ *функция* $G(x,s)$ *такая, что для любых* $f_i, i=\overline{1,6}$ *решение задачи (1)—(4), (6), (7) может быть записано в виде:*

$$u(x)=\int_\Gamma G(x,s)f(s)ds.$$

($G(x,s)$ естественно называть функцией Грина задачи (1)—(4), (6), (7)).

Теорема 3. *Функция Грина* $G(x,s)$ *задачи (1)—(4), (6), (7) неотрицательна на* $\Gamma\setminus\partial\Gamma\times\Gamma\setminus\partial\Gamma$.

Обозначим через Lu оператор, действующий на функциях $u:\Gamma\to R$, удовлетворяющих условиям (1)—(4), по правилу $Lu\equiv(p_i u_i'')''(x)$ на сужениях u на ребра $\gamma_i, i=\overline{1,3}$, и $Lu\equiv-(q_i u_i')'(x)$ на ребрах $\gamma_i, i=\overline{4,6}$. Тогда задачу (1)—(4), (6), (7) можно записать в виде:

$$Lu=f.$$

Интерес вызывает спектральная задача

$$Lu=\lambda m u (m>0). \tag{4}$$

Теорема 4. *Весь спектр задачи (12) — дискретный, вещественный, и наименьшее по модулю собственное значение строго положительное и простое.*

Можно рассмотреть нелинейную задачу

$$Lu=\lambda f(u). \tag{5}$$

Пусть $f(0)=0$ и $f(u)$ вогнута по u, в том смысле, что $f(\lambda u)>\lambda f(u)$ при $(0<\lambda<1)$ (см. [11]).

Теорема 5. *Пусть* $f(u)$ *строго возрастает по* u. *Тогда существует интервал* (λ_0,λ_1) *такой, что для любого* $\lambda\in(\lambda_0,\lambda_1)$ *существует единственная собственная функция задачи (5), причем* $u_\lambda(x)$ *строго возрастает по* λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н.* Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи. Пермь, 1983. С. 64—70.
2. *Пенкин О. М., Покорный Ю. В.* О краевой задаче на графе // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 4. С. 701—703.
3. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М.* Теоремы Штурма для уравнений на графах // ДАН СССР. 1989. Т. 309, № 6. С. 1306—1308.
4. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М.* О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц.уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1141—1190.
5. *Покорный Ю.В.* О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях //Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 661—671.
6. *Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвертого порядка на пространственной сети // Доклады РАН. 1995. Т. 345, № 6. С. 730—732.
7. *Покорный Ю. В., Лазарев К. П.* Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 658—670.
8. *Лазарев К.П.* О спектре некоторых негладких многоточечных задач // Дисс. ... к.ф.-м.н. Воронеж. ВГУ. 1988. 105 с.

9. *Покорный Ю. В., Мустафокулов Р.* О позитивной обратимости некоторых краевых задач для уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1358—1365.

10. *Покорный Ю.В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвертого порядка на графе // Изв. вузов. Математика. 1999. Т. 441, № 2. С. 75—82.

11. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.