РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКА

УДК 539.374: 519.6

ВАРИАНТ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2002 г. М. А. Артемов, С. Н. Пупыкин, А. В. Рыжков

Воронежский государственный университет

В теории течения пластических материалов можно выделить два направления, связанных с использованием гладких и кусочно-гладких функций текучести [1, 2]. При описании поведения анизотропных пластических материалов, как правило, используется условие пластичности Мизеса и его обобщения [3—8]. Обобщение условия пластичности Треска на анизотропные материалы проводилось путем введения пределов текучести в соответствующих направлениях [1, 9]. В настоящей работе рассматривается подход, при котором условие текучести материала записывается в виде $f(\boldsymbol{\pi})=0$, где $\boldsymbol{\pi}$ — тензор активных напряжений. Данное условие текучести является общей формой записи условий текучести идеально-пластических материалов (когда $\boldsymbol{\pi}$ — тензор напряжений), пластических материалов, проявляющих трансляционное упрочнение, вязкопластических материалов, а также ряда условий текучести анизотропных материалов.

1. Статически определимые задачи теории пластического течения анизотропных материалов. В теории пластичности [1, 15] рассмотрен вопрос о выборе определяющих соотношений идеально пластического материала, приводящих к локально статически определимой пространственной задаче. Было показано, что состояние идеального жесткопластического изотропного материала при условии полной пластичности для кусочно-линейных условий текучести [12] будет локально статически определимым. Покажем, что при условии равенства двух главных значений тензора активных напряжений, независимо от выбора условия текучести, напряженное состояние идеально-пластического материала будет локально статически определимым.

Обозначим через $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$, и p_i, p, p_k, собственные векторы и собственные значения симметричного тензора $\boldsymbol{\pi}$ соответственно. Справедливо представление

$$\boldsymbol{\pi} = \pi_1\mathbf{E} + (\pi_2 - \pi_1)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + (\pi_3 - \pi_1)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор. Введем тензор

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\pi} - \pi_1\mathbf{E} - (\pi_2 - \pi_1)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}. \quad (1.2)$$

Если равны два собственных значения тензора $\boldsymbol{\pi}$, например $\pi_1 = \pi_2$, то из равенств (1.1), (1.2) следует, что

$$\boldsymbol{\chi} = (\pi_3 - \pi_1)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}.$$

Так как все миноры второго порядка матрицы тензора $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ равны нулю, то компоненты тензора, составленного из алгебраических дополнений компонент тензора $\boldsymbol{\chi}$, также будут равны нулю. Следовательно, компоненты тензора $\boldsymbol{\pi}$ должны удовлетворять условиям

$$\begin{gathered}(\pi_{ii} - \pi_1 - (\pi_2 - \pi_1)m_i m_i)\times \\ \times(\pi_{jj} - \pi_1 - (\pi_2 - \pi_1)m_j m_j) = \pi_{ij}^2,\end{gathered} \quad (1.3)$$

$$(\pi_{ii} - \pi_1 - (\pi_2 - \pi_1)m_i m_i)\pi_{kj} = \pi_{ki}\pi_{ij}, \quad (1.4)$$

где индексы $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$.

Рассмотрим случай, когда функция текучести является гладкой, и равны два главных значения тензора активных напряжений

$$f(\boldsymbol{\pi}) = 0, \ \boldsymbol{\pi}\cdot\cdot(\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} - \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}) = 0. \quad (1.5)$$

Тогда

$$\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} = q(p), \quad (1.6)$$

где $p = \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\pi})$ — среднее нормальное активное напряжение. Из равенств (1.1), (1.6) следует, что тензор активных напряжений

$$\boldsymbol{\pi} = q\mathbf{E} + 3(p-q)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \qquad (1.7)$$

при этом соотношения (1.3), (1.4) принимают вид

$$(\pi_{ii} - q)(\pi_{jj} - q) = \pi_{ij}^2,\ i \neq j, \qquad (1.8)$$

$$(\pi_{ii} - q)\pi_{kj} = \pi_{ki}\pi_{ij},\ i \neq j \neq k. \qquad (1.9)$$

Тензор пластической деформации определяется согласно ассоциированному закону пластического течения

$$\epsilon^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \qquad (1.10)$$

Из уравнений (1.5), (1.10) следует, что в общем случае для анизотропных материалов, в отличие от изотропных, никакие два главных значения тензора пластической деформаций не равны между собой $\epsilon_i^p \neq \epsilon_j^p,\ i \neq j$.

В случае, когда ребро поверхности пластичности

$$f_1(\boldsymbol{\pi}) = 0,\ f_2(\boldsymbol{\pi}) = 0 \qquad (1.11)$$

лежит в плоскости $\boldsymbol{\pi}\cdot\cdot(\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} - \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}) = 0$, также имеют место равенства (1.7)—(1.9). Тензор скорости пластических деформаций определяется из обобщенного закона пластического течения, ассоциированного с (1.11)

$$\epsilon^p = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$

Итак, если имеет место равенство двух главных значения тензора активных напряжений, то система уравнений равновесия и условий текучести идеально-пластического материала будет локально статически определимой.

2. Условие квазинесжимаемости анизотропных пластических материалов. Имеющиеся экспериментальные данные показывают, что для анизотропных материалов условие несжимаемости пластических деформаций (равенство нулю первого инварианта тензора пластических деформаций) не выполняется [10, 11]. В работе [13], в рамках теории пластического течения идеально жесткопластических ортотропных материалов при рассмотрении квадратичных условий текучести было введено понятие квазинесжимаемости, которое определяет равенство нулю первого инварианта образа тензора скорости пластической деформаций относительно некоторого специального автоморфизма.

Рассмотрим вариант теории течения анизотропных идеально-пластических материалов, когда условие текучести имеет вид

$$f(\boldsymbol{\pi}) = 0,\ \boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma}. \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{A}$ — симметричный тензор четвертой валентности, характеризующий свойства материала, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений.

Согласно ассоциированному закону пластического течения

$$\epsilon^p = \lambda\mathbf{f}\cdot\cdot\mathbf{A},\ \mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\pi}}. \qquad (2.2)$$

Если $\mathbf{A}$ — невырожденный тензор, то

$$\mathbf{B}\cdot\cdot\epsilon^p = \lambda\mathbf{f},\ \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Следуя [13], будем называть равенство

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\cdot\epsilon^p) = 0 \qquad (2.3)$$

условием квазинесжимаемости анизотропного идеально-пластического материала при условии текучести (2.1). Условие (2.3) будет иметь место, если тензор $\mathbf{f}$ является девиатором, то есть функция текучести не должна зависеть от среднего нормального активного напряжения. Для изотропного материала условие квазинесжимаемости переходит в условие несжимаемости скоростей пластических деформаций $\mathrm{tr}(\epsilon^p) = 0$.

В качестве примера рассмотрим кусочно-линейное условие текучести

$$(a\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} + b\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + c\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\cdot\boldsymbol{\pi} = 1, \qquad (2.4)$$

где a,b,c — const. Из уравнений (2.2), (2.4) следует, что

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\cdot\epsilon^p) = \lambda(a+b+c).$$

При условии $a+b+c=0$, в пространстве главных значений тензора активных напряжений уравнение (2.4) определяет плоскость, параллельную оси среднего нормального активного напряжения.

В работах [3, 5, 13] рассматривался случай, когда $\mathbf{A}$ — вырожденный тензор, причем $\mathbf{A} = \mathbf{D}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{A}}$, где $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ — симметричный тензор, $\mathbf{I}$ — единичный тензор четвертой валентности. В этом случае тензор $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ будет девиатором и, следовательно, будет иметь место условие несжимаемости скоростей пластических деформаций.

3. Пространственное состояние анизотропного идеальнопластического материала при *условии равенства двух главных значений тензора активных напряжений*. Рассмотрим случай, когда напряженное состояние соответствует ребру поверхности текучести анизотропного идеально-пластического материала

$$(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}-\mathbf{m}\otimes\mathbf{m})\cdot\cdot\mathbf{A}\cdot\cdot\boldsymbol{\sigma}=2k. \quad (3.1)$$

При выполнении условий (3.1) тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{B}\cdot\cdot((p\mp\frac{2}{3}\mathrm{k})\mathbf{E}\pm 2k\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}). \quad (3.2)$$

В рассматриваемом случае напряженное состояние анизотропного идеально-пластического материала определяется из решения системы уравнений

$$\nabla\cdot\mathbf{B}\cdot\cdot((p\mp\frac{2}{3})\mathbf{E}\pm 2\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=0,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1. \quad (3.3)$$

Рассмотрим ортотропный материал. Если оси симметрии материала параллельны осям декартовой ортогональной системы координат, то на шестимерном пространстве матрица тензора $\mathbf{A}$ является клеточной

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{12} & A_{22} & A_{23}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}A_{44} & 0 & 0\\ 0 & A_{55} & 0\\ 0 & 0 & A_{66}\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+\delta\sigma_{ij}',\ \pi_{ij}=\pi_{ij}^0+\delta\pi_{ij}',$$
$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^0+\delta\varepsilon_{ij}',\ \mathbf{v}_{ij}=v_{ij}^0+\delta v_{ij}'$$

где δ — малый параметр. Будем считать, что

$$\sigma_{ii}^0-\mathrm{const},\ \sigma_{ij}^0=0, \text{когда}\ i\neq j,$$

тогда из равенства (2.2) следует, что матрица компонент тензора $\boldsymbol{\sigma}'$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}p'\alpha_1 & 0 & \sigma_{13}'\\ 0 & p'\alpha_2 & \sigma_{23}'\\ \sigma_{13}' & \sigma_{23}' & p'\alpha_3\end{pmatrix}, \alpha_i=\sum_{k=1}^{3}B_{ki}.$$

Подставляя компоненты тензора $\boldsymbol{\sigma}'$ в уравнения равновесия, получим

$$\alpha_1\frac{\partial p'}{\partial x_1}+\frac{1}{A_{55}}\frac{\partial \mathrm{n}_1'}{\partial x_3}=0,\ \alpha_2\frac{\partial p'}{\partial x_2}+\frac{1}{A_{44}}\frac{\partial \mathrm{n}_2'}{\partial x_3}=0,$$
$$\alpha_3\frac{\partial p'}{\partial x_3}+\frac{1}{A_{55}}\frac{\partial \mathrm{n}_1'}{\partial x_1}+\frac{1}{A_{44}}\frac{\partial \mathrm{n}_2'}{\partial x_2}=0. \quad (3.4)$$

Используя подстановку

$$p'=-\frac{\partial U}{\partial x_3},\ \frac{\mathrm{n}_1'}{A_{55}}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1},\ \frac{\mathrm{n}_2'}{A_{44}}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2},$$

получаем, что система уравнений (2.4) приводится к гиперболическому уравнению

$$\alpha_1\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\alpha_2\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}=\alpha_3\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}.$$

Выбирая в качестве пластического потенциала функцию текучести. Из уравнения пластического течения следует условие соосности тензоров $\mathbf{B}\cdot\cdot\boldsymbol{\epsilon}^p$ и $\boldsymbol{\pi}$, которое можно записать в виде[1]

$$(\mathbf{B}\cdot\cdot\boldsymbol{\epsilon}^p)\times\cdot\boldsymbol{\pi}=0, \quad (3.5)$$

а также условие квазинесжимаемости идеального жесткопластического материала

$$\mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\cdot\boldsymbol{\epsilon}^p)=0. \quad (3.6)$$

Для жесткопластических материалов тензор скоростей пластических деформаций связан с вектором скорости перемещения соотношением

$$\boldsymbol{\epsilon}^p=\frac{1}{2}(\nabla\otimes\mathbf{v}+\nabla\otimes\mathbf{v}^{\mathrm{T}}). \quad (3.7)$$

Линеаризация уравнений (3.6)—(3.7) дает систему уравнений для определения компонент вектора $\mathbf{v}'$:

$$\alpha_1\frac{\partial u'}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial v'}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial w'}{\partial x_3}=0, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x_3}=2B_{55}a_{13}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1}-\frac{\partial w'}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial v'}{\partial x_3}=2B_{44}a_{23}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2}-\frac{\partial w'}{\partial x_2}, \quad (3.8)$$

где $a_{13}=\sum_{k=1}^{3}\frac{(B_{1k}-B_{3k})\varepsilon_k^0}{(A_{1k}-A_{3k})\sigma_k^0},\ a_{23}=\sum_{k=1}^{3}\frac{(B_{2k}-B_{3k})\varepsilon_k^0}{(A_{2k}-A_{3k})\sigma_k^0}$

(по индексу k ведется суммирование).

Исключая из уравнений (3.8), (3.9) компоненты u', v', получаем:

$$\alpha_1\frac{\partial^2 w'}{\partial x_1^2}+\alpha_2\frac{\partial^2 w'}{\partial x_2^2}-\alpha_3\frac{\partial^2 w'}{\partial x_3^2}=$$
$$=2\left(\alpha_1 B_{55}a_{13}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\alpha_2 B_{44}a_{23}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2^2}\right).$$

[1] Условия соосности тензоров напряжений и скорости деформации в декартовой системе координат были рассмотрены А. Ю. Ишлинским [14].

4. Осесимметричное состояние. Рассмотрим осесимметричное состояние идеально жесткопластического ортотропного материала, оси симметрии которого параллельны векторам базиса цилиндрической системы координат ρ, θ, z. Ось z — ось вращения.

Кусочно-линейное условие текучести (3.4) в цилиндрической системе координат можно записать в виде:

$$\begin{gathered}(2cA_{2k}\sigma_{kk}+(a+b)(A_{1k}\sigma_{kk}+A_{3k}\sigma_{kk})-2)^2-\\ -(a-b)^2((A_{1k}\sigma_{kk}-A_{3k}\sigma_{kk})^2+4(A_{44}\tau_{\rho z})^2)=0,\\ (2c\pi_\theta+(a+b)(\pi_\rho+\pi_z)-2)^2-\\ -(a-b)^2((\pi_\rho-\pi_z)^2+4\pi_{\rho z}^2)=0.\end{gathered} \tag{4.3}$$

По индексу k ведется суммирование и предполагается, что значения индекса $k=1,2,3$ соответствуют координатам ρ, θ, z.

Рассматривая правую часть равенства (4.3) в качестве пластического потенциала, получаем следующие выражения для компонентов тензора пластической деформации

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\lambda}\varepsilon_n=[2cA_{2k}\sigma_k+(a+b)(A_{1k}\sigma_k+A_{3k}\sigma_k)-2]\times\\ \times[2cA_{1n}+(a+b)(A_{1n}+A_{3n})]-\\ -(a-b)^2(A_{1k}\sigma_k-A_{3k}\sigma_k)(A_{1n}-A_{3n}),\ n=1,2,3,\\ \frac{1}{\lambda}\varepsilon_{\rho z}=4(a-b)^2A_{44}^2\tau_{\rho z}.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Если $a+b+c=0$, то выполняется условие квазинесжимаемости (3.3), которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\alpha_1\varepsilon_\rho^p+\alpha_2\varepsilon_\theta^p+\alpha_3\varepsilon_z^p=0,\ \alpha_i=\sum_{j=1}^{3}\mathrm{B}_{ji}. \tag{4.5}$$

Переходя к скоростям пластических деформаций, из (4.3)—(4.5) следует, что

$$\begin{gathered}\alpha_1\frac{\partial u}{\partial\rho}+\alpha_2\frac{\partial w}{\partial z}+\alpha_3\frac{u}{\rho}=0,\\ \left(d_1\frac{\partial u}{\partial\rho}+d_2\frac{u}{\rho}+d_3\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+B_{55}^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)^2=\\ =\left(\frac{a-b}{c}\right)^2\left(B_{21}\frac{\partial u}{\partial\rho}+B_{22}\frac{u}{\rho}+B_{23}\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,\end{gathered}$$

где u, w — радиальная и осевая компоненты вектора скорости перемещения, $d_1=B_{11}-B_{12}$, $d_2=B_{12}-B_{23}$, $d_3=B_{13}-B_{33}$.

Итак, для идеального жесткопластического ортотропного материала, как и для идеально-пластического материала, осесимметричная задача является локально кинематически определимой.

Рассмотрим случай, когда напряженное состояние идеального жесткопластического ортотропного материала удовлетворяет условию текучести

$$\begin{gathered}(a_1\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+b_1\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+c_1\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\cdot\boldsymbol{\pi}=1,\\ (a_2\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+b_2\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+c_2\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot\cdot\boldsymbol{\pi}=1,\\ a_i+b_i+c_i=0,\ i=1,2.\end{gathered} \tag{4.6}$$

При выполнении (4.6) компоненты тензора напряжений можно выразить через среднее нормальное активное напряжение и угол, образуемый первой главной ось тензора активных напряжений и осью z:

$$\begin{gathered}\sigma_\rho=\alpha_1p+d_1k_3\cos2\varphi+h_1(k_2-k_1),\\ \sigma_\theta=\alpha_2p+d_2k_3\cos2\varphi+h_2(k_2-k_1),\\ \sigma_z=\alpha_3p+d_3k_3\cos2\varphi+h_3(k_2-k_1),\\ \sigma_{\rho z}=B_{44}k_3\sin2\varphi,\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $k_1=\dfrac{1}{2m}(a_2-a_1)$, $k_2=\dfrac{1}{2m}(b_2-b_1)$,

$k_3=\dfrac{1}{2m}(c_2-c_1)$, $m=a_1c_2-a_2c_1$, $\alpha_j=\sum\limits_{k=1}^{3}B_{jk}$,

$h_j=B_{2j}$, индекс j принимает значения 1, 2, 3.

После подстановки соотношений (4.7) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\ \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0,$$

получаем систему квазилинейных уравнений относительно p и φ

$$\begin{gathered}\alpha_1\frac{\partial p}{\partial\rho}-2d_1k_3\sin2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+B_{44}k_3\cos2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\\ =-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)p+(d_1-d_2)k_3\cos2\varphi+(h_1-h_2)(k_2-k_1)}{\rho},\\ \alpha_3\frac{\partial p}{\partial z}+2B_{44}k_3\cos2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+2d_3k_3\sin2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\\ =-\frac{B_{44}k_3\sin2\varphi}{\rho}.\end{gathered}$$

Характеристики системы (4.8) определяются уравнениями

$$\left.\frac{dz}{d\rho}\right|_{1,2} = \frac{(d_3\alpha_1 - d_1\alpha_3)\sin 2\varphi}{\alpha_1 B_{44}\cos 2\varphi} \pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{(d_3\alpha_1 - d_1\alpha_3)^2 \sin^2 2\varphi + 2\alpha_1\alpha_3 B_{44}^2 \cos^2 2\varphi}}{\alpha_1 B_{44}\cos 2\varphi}. \qquad (4.8)$$

Так как $\alpha_1\alpha_2 > 0$, то система уравнений (4.8) — гиперболическая. Вдоль характеристик выполняются условия:

$$k_3((d_z\alpha_p + d_\rho\alpha_z)\sin 2\varphi \pm$$

$$\pm\sqrt{(d_z\alpha_p - d_\rho\alpha_z)^2 \sin^2 2\varphi + 2\alpha_p\alpha_z B_{44}^2 \cos^2 2\varphi})\mathrm{d}\varphi\text{-}\alpha_p\alpha_z dp =$$

$$= \frac{B_{44}k_3 \sin 2\varphi\alpha_\rho dz - ((\alpha_p - \alpha_\theta)p}{p} +$$

$$+\frac{(d_\rho - d_\theta)k_3\cos 2\varphi + (h_\rho - h_\theta)(k_2 - k_1))\alpha_z d\rho}{\rho}.$$

$$(4.9)$$

Из ассоциированного закона пластического течения при выполнении условий (4.6) следуют уравнения:

$$\alpha_1\varepsilon_\rho^p + \alpha_2\varepsilon_\theta^p + \alpha_3\varepsilon_z^p = 0,$$

$$\frac{d_k\varepsilon_k^p}{B_{55}\varepsilon_{\rho z}^p} = \frac{c_k\sigma_k^p}{A_{55}\sigma_{\rho z}^p},\ c_k = A_{1k} - A_{3k}. \qquad (4.10)$$

Переходя к компонентам скоростей перемещений, учитывая формулы (4.7), уравнения (4.10) запишем в виде

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial\rho} + \alpha_2\frac{u}{\rho} + \alpha_3\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\left(d_1\frac{\partial u}{\partial\rho} + d_2\frac{u}{\rho} + d_3\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sin 2\varphi -$$

$$-\mathrm{B}_{55}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial\rho}\right)\cos 2\varphi = 0.$$

Уравнения характеристик этой системы имеют вид

$$\left.\frac{dz}{d\rho}\right|_{1,2} = \frac{\alpha_3 d_1\sin 2\varphi}{2\alpha_1 B_{55}\cos 2\varphi} \pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{(d_1\alpha_3)^2\sin^2 2\varphi + 4\alpha_1\alpha_3 B_{55}\cos 2\varphi(d_3\sin 2\varphi + B_{55}\cos 2\varphi)}}{2\alpha_1 B_{55}\cos 2\varphi}.$$

Итак, осесимметрическое состояние идеально пластического ортотропного материала является локально статически определимым. Условия текучести в плоскости ρz приводятся к условию максимального касательного активного напряжения.

В случае, когда **A** — единичный тензор четвертой валентности, соотношения теории течения анизотропных пластических материалов, приведенные в данной работе, переходят в аналогичные соотношения для изотропного материала [1].

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. — М.: Наука, 1966. — 232 с.
2. *Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д.* Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 528 с.
3. *Mises R.* Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen // Zeitschrift fur angewadte Mathematik und Mechanik. — 1928. — Bd. 8 . — H. 3. — S. 161—185.
4. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 407 с.
5. *Матченко Н. М., Толоконников Л. И.* Общая плоская задача теории идеальной пластичности анизотропных материалов // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. — № 3. — 1973. — С. 113—115.
6. *Гольденблат И. И., Копнов В. А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. — М.: Машиностроение, 1968. — 192 с.
7. *Дель Г. Д.* Техническая механика. — М.: Машиностроение, 1978. — 174 с.
8. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. — М.: Мир, 1979. — 302 с.
9. *Ху П., Мэрин Ж.* Анизотропные функции нагружения для сложных напряженных состояний в пластической области // Сб. пер. и обзоров иностр. период. лит. Механика, 1956. — № 2. — С. 172—188.
10. *Бриджмен П.* Исследование больших пластических деформаций и разрыва. — М.: ИЛ, 1955. — 444 с.
11. *Жуков А. М.* Прочность и пластичность сплава Д16Т при сложном напряженном состоянии. // Изв. АН СССР, ОТН, 1954. — № 6. С. 53—61.
12. *Хаар А., Карман Т.* Теория пластичности. Сборник статей. М.: Гос. изд-во ИЛ, 1948. — С. 41—56.
13. *Матченко Н. М., Матченко И. Н., Кузнецов Е. Е., Захарова И. А., Колотилин А. Н., Костиков И. А.* Гипотеза квазинесжимаемости в теории идеальной пластичности ортотропного тела // Сб. матер. междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии». Тула: ТулГУ, 2001. — С. 65—67.
14. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости. // Учен. записки МГУ. — Механика. — 1946. — Вып. 117. — С. 90—108. Так же см. Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. — Т. 1. — М.: Наука, 1986. — С. 62—83.
15. *Артемов М. А., Ивлев Д. Д.* О статических и кинематических соотношениях в теории идеальной пластичности при кусочно-линейных условиях текучести. // Изв. РАН Механика тв. тела. — 1995. — № 3. С. 94—103.