УДК 519.854.33

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРОДАЖ ПРОДУКЦИИ ФИРМЫ С РЕНТНООРИЕНТИРОВАННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

© 2001 г. Н. А. Жданкина

Воронежский государственный университет

В настоящее время происходит перестройка всей сложившейся в народном хозяйстве системы реализации продукции. Переход к оптовой торговле, отказ от фондов, лимитов и принудительной системы реализации и снабжения привели к новым проблемам, решение которых требует разработки новых подходов, связанных, например, с анализом рынка, реализацией того или иного товара, выявления экономического поля сбыта, рекламы и т.д. Некоторые из этих направлений достаточно хорошо исследованы, например, влияние рекламы на сбыт и эффект конкуренции достаточно хорошо освещены в [5, 6, 7, 8], другие же не изучены, такие например, как сопровождение эффективной экономической политики фирмы.

Как известно, реализация продукции крупных фирм осуществляется через группу менеджеров или торговых агентов. Такая система сбыта получила название **рентноориентированного менеджмента**. Крупные фирмы в переходной экономике максимизируют не только общий объем продаж, но одновременно менеджеры максимизируют свой суммарный доход. Важнейшей проблемой является согласование этих целей. При этом особую роль принимает определение управляемых параметров, влиять на которые могла бы сама фирма и поиск зависимостей между ними и величинами, важными для оценки эффективности текущей политики.

В настоящей статье рассматривается следующая ситуация: реализация продукции фирмы осуществляется через торговых агентов, при этом предприятие имеет достаточно устойчивые торговые связи с фирмами-клиентами (т.е. свой рынок сбыта) либо с посредниками, которые заказывают товар у поставщика определенными партиями. Если некоторую часть клиентов или посредников посетит представитель фирмы по стимулированию и продвижению товаров, то размер соответствующего заказа увеличится. Управляемой переменной здесь является количество посещений каждого клиента (либо посредника) за определенный период — n_t. Мы полагаем, что конкуренция отсутствует, т.е. все предприятия-клиенты покупают товар этого вида только у нашей фирмы.

Задачей данного исследования является определение аналитического вида функции продаж $E(n_t)$, которая показывает количество заказанного клиентом (посредником) продукции предприятия в течении периода t, если за этот период он посещался представителями предприятия n_t раз. В общем случае, нам необходимо найти такую функцию $E(n_t)$, которая удовлетворяла бы **общематематическим требованиям**: непрерывности; непрерывной дифференцируемости (по крайней мере, дважды); монотонного возрастания на промежутке $[0...N_t]$ и **предположениям эвристического характера**:

П. 1. Объем продаж тем выше, чем больше затрачиваемых на сбыт усилий. Практический опыт работы сбытовых организаций подтверждает, что это так.

П. 2. Темп роста объема продаж падает с ростом их масштаба. Причиной возникновения этого требования является логика поведения потребителей: с увеличением поездок к клиенту спрос на продукт растет не безгранично, а с постоянно убывающей скоростью, достигая при этом определенного уровня насыщения.

П. 3. Спрос неотрицателен. (В некоторых случаях, при наличии договора с конкретным клиентом на закупку не менее, чем заранее оговоренное количество продукции, данное условие может выглядеть следующим образом — объем продаж не может быть меньше заранее установленной величины С).

П. 4. Объем потребления с теением времени стремится к определенному уровню α. Данное условие имеет место, например, в промышленности, когда предприятие закупает ресурсов не более, чем ему необходимо для поддержания текущего уровня производства.

Эти эвристические соображения приводят к следующим системным требованиям:

1) $\dfrac{\partial E}{\partial n_t} \geq 0$, где $0 \leq n_t \leq N_t$

2) $\dfrac{\partial^2 E}{\partial n_t^2} \leq 0$, где $0 \leq n_t \leq N_t$

3) $E(0) \geq 0$, где $(E(0) = C)$

4) наличие горизонтальной асимптоты: $y = \alpha$.

Для построения функции продаж предлагается следующий алгоритм:

1. Выбор набора базовых функций, удовлетворяющих вышеприведенным математическим требованиям. Обозначим их через:

$$<\varphi_1(n_t),\ \varphi_2(n_t),\ \ldots\ \varphi_N(n_t)>$$

2. Поиск функции продаж в виде выпуклой линейной комбинации базовых зависимостей $<\varphi_1(n_t),\ \varphi_2(n_t),\ \ldots\ \varphi_N(n_t)>$

$$E(n_t)\sum_{k-1}^{N} \lambda_k \varphi_k(n_t), \text{ где } \lambda_k \geq 0 \text{ и } \sum_k \lambda_k = 1.$$

При этом параметры каждой из базовых функций $\varphi_i(n_t)$ подбираются таким образом, чтобы выполнялись заданные выше условия (1)—(4).

Список базовых функций выглядит следующим образом:

1) $y = ax + b$, где $a > 0$, $b > 0$ (условия на параметры возникли из требований монотонного возрастания и неотрицательности в нуле);

2) $y = ax^2 + bx + c$, где $a < 0$, $b > 0$, $-b/2a > N_T$ (условия также порождены требованиями монотонного возрастания, неотрицательности в нуле, а также выпуклости вверх);

3) $y = ax/(x + b)$, где $a > 0$, $b > 0$. Данная функция изначально была предложена Торнквистом [3] как функция спроса на предметы первой необходимости, и может интерпретироваться также как функция спроса на ресурс, закупаемый промышленным предприятием (например, спрос на огнеупорные изделия, закупаемые металлургическими комбинатами). Параметр a определяет горизонтальную асимптоту данной функции, т.е. $\lim_{n_t \to \infty} E(n_t) = a$. Параметр b является параметром, определяющим эластичность* функции по числу посещений за период, т.е. на сколько процентов увеличится сбыт продукта данной фирме при увеличении числа визитов менеджеров на один процент, т.е. b определяется следующим образом:

$$\frac{n_t}{E(n_t)} * \frac{\partial E(n_t)}{\partial n_t} = \frac{b}{n_t + b};$$

4) $y = (ax - c)/(x + b)$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Данная функция Торнквиста [3], как известно, является функцией спроса на предметы относительной роскоши. Для нашего случая, это функция спроса на ресурс, имеющий высокое качество и обладающий либо повышенной ценностью для предприятия-потребителя, либо дефицитностью. Так, для огнеупорных заводов, в качестве такой продукции могут выступать периклазоуглеродистые огнеупорные изделия). Параметр а также, как и в предыдущем случае, определяет горизонтальную асимптоту данной функции, т.е. $\lim_{n_t \to \infty} E(n_t) = a$.

Эластичность функции по числу посещений за период определяется здесь следующим образом: $\dfrac{n_t}{E(n_t)} * \dfrac{\partial E(n_t)}{\partial n_t} = \dfrac{(ab + c)n_t}{(n_t + b)(an_t - c)}$;

5) $y = ax(x - c)/(x + b)$, где $a > 0$, $b > 0$, $(b + c) < 0$.

Данная функция Торнквиста[3] интерпретируется как функция спроса на предметы роскоши. В нашем случае, это функция спроса на особо дорогостоящий или особо дефицитный ресурс, который обладает высоким качеством. Ее особенностью является то, что она имеет наклонную асимптоту вида: $y = an_t - a(b + c)$, что

* Под **эластичностью** понимается степень влияния того или иного параметра на сбыт товара или долю рынка. Это безразмерная величина, которая равна отношению скорости изменения сбыта или доли рынка к скорости изменения той или иной маркетинговой переменной, например, эластичность спроса (x) от цены (p), определяется как: $\dfrac{\partial x / x}{\partial p / p}$.

подтверждается несложной математической проверкой: $\lim_{n_t \to \infty} E(n_t) = an_t - a(b + c)$.

Эластичность функции по числу посещений за период определяется следующим образом:

$$\frac{n_t}{E(n_t)} * \frac{\partial E(n_t)}{\partial n_t} = \frac{n_t + b}{n_t - c} - \frac{b(b + c)}{(n_t + b)(n_t - c)} \xrightarrow[n_t \to \infty]{} 1;$$

6) **S-образная функция** $y = \dfrac{b}{ce^{-ax} + 1}$, где $0 < a < 1$, $b > 0$; где данная кривая описывает рост с насыщением, b является верхней границей y.

7) **Логарифмическая функция** $y = a\ln(x + b)$, где $a > 0$, $b > 0$

8) Функция вида $y = -a/e^x + b$, где $a > 0$, $b > 0$.

Выбор всех параметров также определяется требованиями (1)—(4).

Далее, предлагается следующая **интерактивная процедура нахождения функции продаж** на продукт в зависимости от числа посещений агентом предприятия потребителей продукции данного предприятия за период:

I. Пусть имеется некоторая статистика объема закупок данного продукта и количества визитов агентов нашего предприятия к клиенту за период, т.е. заданы V_t и n_t для $t = 0...T$. Будем считать, что искомая функция зависит от времени только косвенно, через количество визитов n_t.

Будем последовательно перебирать базовые функции из нашего списка, и параметры каждой из них подбирать методом наименьших квадратов (МНК) [1, 4] на основе имеющейся статистики.

Выберем функцию, дающую минимальную сумму квадратов отклонений полученных с ее помощью значений от реальных данных статистики, и представим ее ЛПР как наилучшую.

II. Если ЛПР согласен с расчетами, полученными на основе найденной таким путем функции продаж, то мы получили решение. В противном случае, ЛПР выбирает новые функции из базового списка, которые будут составлять выпуклую линейную комбинацию, которая и будет затем использоваться для идентификации функции продаж.

Выбор коэффициентов свертки λ_k также будем осуществлять, применяя МНК, с использованием имющейся статистики. В итоге получим некоторую линейную комбинацию:

$$E(n_t) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_k(n_t), \text{ где } \lambda_k \geq 0, \sum_k \lambda_k = 1,$$

которую и представляем для оценки ЛПР. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден устраивающий ЛПР вид зависимости, вернее, пока его не устроят результаты, полученные на ее основе.

В программной реализации данного исследования лицу, принимающему решение (ЛПР), на выбор предоставляется набор из вышеприведенных 8-ми базовых функций. При этом он может выбрать одну, несколько или сразу все функции из данного списка. Определение параметров и коэффициентов свертки осуществляется по описанному принципу. Программа реализована на языке Object Pascal в среде Delphi 3.0.

При выводе уравнений метода наименьших квадратов [4] существенным было предположение о линейной зависимости от параметров. Зачастую, однако, вид этой функции этому условию не удовлетворяет, например:

$$y = ax/(x + b),\ y = (ax - c)/(x + b),$$

$$y = ax(x - c)/(x + b),\ y = \frac{1}{ce^{-ax} + 1}$$

Для преодоления этого препятствия имеются три основных приема [1].

Во-первых, можно попытаться сделать преобразование, приводящее зависимость к линейному виду. Для первых двух примеров (из четырех приведенных выше) это легко получается.

$y = ax/(x + b)$ эквивалентно $Y = y(x + b) = ax$ или $yx = ax - by$ (и, рассматривая $Yi = y_i x_i$ как исходные данные, приходим к уже подробно рассмотренному выше случаю);

$y = (ax - c)/(x + b)$ эквивалентно $y(x + b) = ax - c$ или $yx = ax - by - c$, поэтому, обозначая $Y = yx$, приходим к зависимости: $Y = a_0\varphi_0 + a_q\varphi_1 + a_2\varphi_2$.

В третьем примере, действуя указанным способом, получаем зависимость:

$y = ax(x - c)/(x + b) \leftrightarrow yx = ax^2 - acx - by$. Обозначая через $Y = yx$, $\varphi_0 = x^2$, $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = y$, $a_0 = a$, $a_1 = -ac$, $a_2 = -b$, путем простой замены переменных опять приходим к линейному случаю.

Для последнего примера такое преобразование невозможно, но есть второй путь:

если зафиксировать один из параметров, то или сразу получаем линейную зависимость, или возможность привести к ней. Так, фиксируя параметр b, получаем:

$$\frac{b}{y}-1=ce^{-ax} \text{ или } Y=a_0+a_1x, \text{ где } Y=\ln\left(\frac{b}{y}-1\right),$$

$a_0 = \ln c,\ a_1 = -a.$

Поскольку диапазон изменений таких фиксируемых параметров или их приближенные значения обычно известны (для четвертой зависимости, описывающей S-образную кривую, рост с насыщением, b является верхней границей y, его пределом при $x \to \infty$ и может быть приблизительно оценено для конкретной фирмы ЛПР), перебирая с заданной точностью значения этого параметра и для каждого варианта оценивая остальные параметры, можно выбрать такое его значение, которое отвечает минимуму суммы квадратов отклонений.

Если и этот прием нереализуем, остается использовать общие процедуры минимизации функции $S(a)$ или специальные методы, использующие известные свойства этой функции. Эти процедуры трудоемки, и пользоваться ими следует лишь тогда, когда другие подходы не приводят к желаемым результатам.

Для исследования реальной экономической ситуации и получения численных результатов была использована статистика сбыта продукции за 1999 год, предоставленная одним из огнеупорных заводов Воронежской области. Этот огнеупорный завод имеет широкий круг постоянных потребителей, реализация продукции которым ведется двумя отделами завода — отделом продаж и отделом маркетинга, при этом стимулирование сбыта огнеупорных изделий осуществляется в ходе постоянных командировок представителей завода к предприятиям-потребителям. В основном потребителями онеупорной продукции являются металлургические комбинаты России и ближнего зарубежья, которые используют продукцию завода в качестве одного из основных производственных ресурсов. Данные, полученные в результате применения этих моделей, были представлены руководству предприятия, которое подтвердило их приемлимость для использования на практике. Пример расчета фукции продаж для одного из основных потребителей методом наименьших квадратов приведен ниже.

Таким образом, было выявлено, что при определении аналитического вида функции продаж предприятия, во-первых, в качестве управляемого параметра может быть выбрано число визитов потребителю торговых агентов предприятия, во-вторых, данная функция должна удовлетворять ряду общематематических и эвристических требований и, в-третьих, для ее построения можно использовать статистику продаж за предыдущие периоды. В качестве метода построения предложен алгоритм, основанный на методе наименьших квадратов. Приведенные расчеты подтверждают эффективность предложенного метода построения функции продаж предприятия.

НЛМК (г. Липецк)

	Продажи	Визиты	$(y-ax-b)^2$	$(y-ax^2-bx-c)^2$	$(y-ax/(x+b))^2$
Январь	267	2	48.14804	45.13748	345.7468
Февраль	270	3	4610.503	3072.614	5422.957
Март	258	2	254.0479	5.2055	761.4437
Апрель	444	4	1775.569	211.004	3780.619
Май	425	4	535.344	20.01687	1805.123
Июнь	250	3	7726.531	5689.861	8768.587
Июль	210	1	0.000526	577.2096	418.471
Август	248	1	1445.743	195.2954	3417.17
Сентябрь	450	3	12566.26	15517.39	11312.29
Октябрь	286	2	145.4706	661.4383	0.164618
Ноябрь	291	3	2199.675	1185.505	2771.047
Декабрь	336	3	3.612616	111.7002	58.38079
ВСЕГО:	3735	31	31310.9	27292.38	38862

	$(y-(ax-c)/(x+b))^2$	$(y-ax(x-c)/(x+b))^2$	$(y-b/(c\exp-ax+1))^2$	$(y-a\ln x+b)^2$	$(y+a\exp x-b)^2$
Январь	2.440669	1179.138	12.2868	278.8032	1398.784
Февраль	4752.373	5113.427	4018.151	4916.443	4920.967
Март	111.5614	642.0434	30.19225	660.3565	2152.99
Апрель	1203.212	10.34282	1668.608	3456.31	8226.304
Май	246.0929	493.5518	477.3612	1583.28	5140.743
Июнь	7909.871	8373.756	6953.706	8121.137	8126.951
Июль	139.5453	8196.38	112.1404	2.965401	7.707851
Август	2481.328	16520.95	2360.953	1577.84	1662.707
Сентябрь	12334.89	11770.46	13598.15	12074.2	12067.11
Октябрь	304.0746	2845.004	506.4864	5.301956	338.5718
Ноябрь	2298	2551.081	1796.818	2412.514	2415.683
Декабрь	8.628659	30.3406	6.817912	16.9526	17.21919
ВСЕГО:	31792.02	57726.48	31541.67	35106.11	46475.74

1. Линейная зависимость
$A = 63.96181 \quad b = 146.0153$
2. Квадратичная зависимость
$a = 19.44662 \quad b = -32.0835 \quad c = 246.6621$
3. Функция Торнквиста вида: $ax/(x+b)$
$a = 579.0032 \quad b = 2.054726$
4. Функция Торнквиста вида: $(ax-c)/(x+b)$
$a = 9.62E{+}11 \quad b = 1.37E{+}10 \quad c = -1.7E{+}12$
5. Функция Торнквиста вида: $ax(x-c)/(x+b)$
$a = 91.91795 \quad b = 6.786104 \quad c = -9.11963$
6. S-образная функция вида: $b/(ce^{-ax}+1)$
$a = 0.427164 \quad b = 663.8042 \quad c = 3.569879$
7. Логарифмическая зависимость вида: $a\ln(x+b)$
$a = 225.5275 \quad b = 1.518126$
8. Экспотенциальная зависимость вида: $-a/e^x + b$
$a = 417.8846 \quad b = 360.9548$

Функция, удовлетворяющая всем математическим требованиям и устраивающая ЛПР — функция Торнквиста вида:

$y = 91.91795x(x + 9.11963)/(x + 6.786104)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жак С. В. Математические модели менеджмента и маркетинга. — Ростов-на-Дону: Ла По, 1997. — 316 с.
2. Кади Дж. Количественные методы в экономике. —М.: Прогресс, 1977. — 246 с.
3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Прогресс, 1975. — 632 с.
4. Уилкс С. Математическая статистика. — М.: Наука, 1967. — 606 с.
5. Dorfman R., Steiner P.O. Optimal advertising and optimal quality // Amer. Econ. Rev. — 1959. — V. 49. — P. 826—836.
6. Cooper L. G. Competitive maps: the structure underlying asymetric crosselasticities //Man. Sci. — 1988. — V. 34. — P. 707—723.
7. Peel P. The non-uniqueness of the Dorfman-Steiner condition: a note // Economica. — 1973. — V. 40. — P. 208—209.
8. Cowling K., Cubbin J. Price, quality and advertising competition: an econometric investigation of the UK car market // Economica. — 1971. — V. 38. — P. 378—394.