ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 2

УДК 517.956

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ 3-ГО ПОРЯДКА

© 2001 г. Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

Для сингулярного вязко-упругого трансзвукового уравнения рассматривается 6 краевых задач в областях типа "четверть плоскости". Доказываются теоремы единственности, строятся в явном виде функции Грина, а с их помощью — и точные решения рассматриваемых задач.

Так называемое стационарное осесимметрическое вязкое трансзвуковое уравнение (см. [1], [2]):

$$Lu = \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} + y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}y\frac{\partial}{\partial y}\right]u = f(x,y), \qquad (1)$$

явилось предметом повышенного интереса в 70-х годах по двум причинам: во-первых, оно достаточно хорошо описывает структуру слабой ударной волны в реальных (т.е., вязких и теплопроводящих) газах; во-вторых, В. Н. Диесперовым и Л. А. Ломакиным была построена в явном виде функция Грина сингулярной краевой задачи для уравнения (1) в полуплоскости $x \in R$, $y > 0$ (см. [2]), что позволило, в свою очередь, установить адекватность математической модели экспериментальным данным. Однако другой более сложный (но не менее важный с точки зрения физических приложений) случай области типа "четверть плоскости" оставался неизученным вплоть до настоящего момента (аналогичная ситуация имеет место и для других уравнений 3-го порядка схожей структуры. Например, для уравнения Кортевега — де Фриза).

Настоящая работа и призвана восполнить этот пробел. Предлагаемый ниже для уравнения (1) "комплексный метод отражения" в областях типа "четверть плоскости" может быть легко перенесен и на другие уравнения схожей структуры (например, на уравнение Кортевега — де Фриза).

§ 1. Постановка задачи и вспомогательные результаты

Пусть $R_+=\{y>0\}$, $R_\pm=\{\pm x>0\}$, $R_+{}^2=\{(x;y): y>0\}$, $\Omega_\pm=\{(x,y): \pm x>0,\ y>0\}$.

Введем в рассмотрение линейные формы:

$$\langle u,v\rangle_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)dx,\ \ \langle u,v\rangle_1 = \int_0^{+\infty} u(y)v(y)dy;$$

$$\langle u,v\rangle_{0,1} = \int_{R_+^2} u(x,y)v(x,y)dx\,y\,dy;$$

$$\langle u,v\rangle_{(\pm),0} = \langle \theta(\pm x)u;v\rangle_0;\ \ \langle u,v\rangle_{(\pm),0,1} = \langle \theta(\pm x)u;v\rangle_{0,1},$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Как обычно, $S'(R), \overset{\circ}{S}'(\bar{R}_\pm)$ означают пространства Шварца распределений умеренного роста с линейными формами $\langle;\rangle_0$, $\langle;\rangle_{(\pm),0}$ соответственно, а $S'_+(\bar{R}_+)$, $S'_+(\bar{R}^2_+)$, $\overset{\circ}{S}'_+(\bar{\Omega}_\pm)$ — пространства Киприянова—Шварца (см. [3]) с линейными формами $\langle;\rangle_1$, $\langle;\rangle_{0,1}$, $\langle;\rangle_{(\pm),0,1}$ соответственно.

Фиксируя пару индексов (j,k), $0 \le j < k \le 2$, рассмотрим в области Ω_+ следующую задачу для уравнения (1):

$$Lu_+(x,y) = f_+(x,y),\ (x,y)\in\Omega_+ \qquad (2)$$

$$y\frac{\partial u_+}{\partial y}\bigg|_{y=+0} = g_+(x),\ x\in R_+ \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^m u_+}{\partial x^m}\bigg|_{x=+0} = h_m(y),\ y\in R_+,\ m=j,k \qquad (4)$$

$$u_+(x,y) = o(1),\ x,y\to+\infty, \qquad (5)$$

где $u_+, f_+ \in \overset{\circ}{S}'_+(\bar{\Omega}_\pm)$, $g_+ \in \overset{\circ}{S}'_+(\bar{R}_\pm)$, $h_m \in S'_+(\bar{R}^2_+)$, причем f_+, g_+, $h_m = o(1)$, $x,y\to+\infty$.

Далее, фиксируя индекс l: $0\le l\le 2$, в области Ω_- для уравнения (1) рассмотрим задачу:

$$Lu_-(x,y) = f_-(x,y),\ (x,y)\in\Omega_- \qquad (6)$$

$$y\left.\frac{\partial u_-}{\partial y}\right|_{y=+0} = g_-(x),\ x\in R_- \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial^l u_-}{\partial x^l}\right|_{x=-0} = h_m(y),\ y\in R_+, \qquad (8)$$

$$u_-(x,y) = o(1),\ x\to-\infty,\ y\to+\infty, \qquad (9)$$

где $u_+, f_+ \in \overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_\pm)$, $g_+ \in \overset{\circ}{S}{}'_+(\bar R_\pm)$, $h_l \in S'_+(\bar R^2_+)$, причем f_-, g_-, $h_l = o(1)$, $-x,y\to+\infty$.

Теорема 1. *Решения* $u_\pm \in \overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_\pm)$ *задач* (2)—(5) и (6)—(9) *единственны в соответствующих классах.*

Доказательство основано на применении к распределениям $u_\pm(x,y)$ преобразования Бесселя порядка 0 по переменной y и следующем утверждении (см. [4]):

Лемма 1. *Если распределение* $u_\pm \in \overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_\pm)$ *удовлетворяет равенствам* (2), (3) *или* (6), (7), *с нулевыми* $f_\pm$, $g_\pm$, *то на самом деле*:

$$supp(Lu_\pm)\cap\{y=0\}=\varnothing.$$

§ 2. Построение функций Грина

Рассмотрим в $S'_+(\bar R^2_+)$ уравнение:

$$LE(x,y)=\delta(x)\otimes\delta_+(y), \qquad (10)$$

где L — оператор, определенный равенством (1), а $\delta_+(\cdot)\in S'_+(\bar R_+)$ — весовая “дельта” — мера Дирака, ассоциированная с линейной формой $\langle;\rangle_1$:

$$\langle\delta_+(y);\varphi_+(y)\rangle_1=\varphi_+(0),\ \forall\varphi_+\in S_+(\bar R^2_+). \qquad (11)$$

Справедливы следующие утверждения (см. [2], [4]):

Предложение 1. *Фундаментальное решение* $E\in S'_+(\bar R^2_+)$ *уравнения* (10) *есть регулярное распределение следующего вида*:

$$E(x,y) = -2^{-1/3}3^{-1}y^{-2/3}\Psi(1/3,2/3,z),$$
$$z = -(4/27)x^3y^{-2}, \qquad (12)$$

где $\Psi(a,c;z)$ — *вещественная ветвь вырожденной гипергеометрической функции Трикоми* (*см.* [5], [4]).

Предложение 2. *Фундаментальное решение* $E(x,y)$, *определяемое равенством* (12), *удовлетворяет следующим соотношениям*:

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right|_{x=\pm0}=\left(\frac{1}{6}\pm\frac{1}{2}\right)\delta_+(y),\ \left.\left(y\frac{\partial E}{\partial y}\right)\right|_{y=+0}=\delta(x), \qquad (13)$$

$$E(x,y) = O(y^{-2/3}),\ y\to+\infty \qquad (14)$$

$$E(x,y)\sim\begin{cases} x^{-1}\,{}_2F_0(1/3;2/3;-z^{-1}), & |\arg(x)|\in[0;\frac{\pi}{6});\\ 2^{-1}3^{1/3}x^{-1}\exp(z^3)\,{}_2F_0(z^{-1}), & |\arg(x)|\in[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}];\\ & \text{при } x\to\infty \text{ или } y\to0\\ 2^{-1}x^{-1}\,{}_2F_0(1/3;2/3;-z^{-1}), & \arg(x)\in(\frac{\pi}{2};\pi], \end{cases} \qquad (15)$$

где распределение $\delta_+(\cdot)\in S'_+(\bar R_+)$ *определено равенством* (11), *а* ${}_2F_0(a,b;\cdot)$ — *обобщенная гипергеометрическая функция Гаусса* [5].

Перейдем к непосредственному построению функций Грина $G^+_{j,k}$ задач (2)—(5) и $G^{(-)}_l$ задач (6)—(9). Введем в рассмотрение следующие распределения:

$$I_{(+)}(x,\xi,y) = \theta(x,y)E(e^{i2\pi/3}x-\xi;y),\ x,\xi,y>0; \qquad (16)$$

$$I_{(-)}(x,\xi,y) = I_{(+)}(-\xi,-x,y),\ x,\xi<0,\ y>0, \qquad (17)$$

где $\theta(x,y) = \theta(x)\theta(y)$, а распределение $E(x,y)$ определено равенством (12).

Лемма 2. *Функции* $I_{(\pm)}(x,\xi,y)$, *определенные равенствами* (16), (17) *и рассматриваемые либо как функции переменных* $(x,y)\notin\Omega_\pm$, $(\pm\xi>0)$, *либо как функции переменных* $(\xi,y)\notin\Omega_\pm$, $(\pm x>0)$, *порождают регулярные распределения* $I_{(\pm)}\in\overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_\pm)$, причем:

$$L_{(x,y)}I_{(\pm)} = L^*_{(x,y)}I_{(\pm)} = 0,\ x^2+\xi^2+y^2>0; \qquad (18)$$

$$\left.\left(y\frac{\partial I_{(\pm)}}{\partial y}\right)\right|_{y=+0}=0,\ x,\xi\in R_\pm,\ x^2+\xi^2+y^2>0; \qquad (19)$$

$$I_{(\pm)}(x,\xi,y) = o(1),\ \pm x,\pm\xi,y\to+\infty, \qquad (20)$$

где

$$L^* = -\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}+y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}y\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (21)$$

Доказательство — вытекает непосредственно из формул (10), (12)—(17).

Определим распределения $G^{(+)}_{j,k}\in\overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_{+,(x,y)})\times\overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_{+,(\xi,y)})$ и $G^{(-)}_{j,k}\in\overset{\circ}{S}{}'_+(\bar\Omega_{-,(x,y)})\times S'_-(\bar\Omega_{+,(\xi,y)})$ следующими равенствами:

$$G^{(+)}_{j,k}(x,\xi,y)=\theta(x,\xi)E(x-\xi,y)+ +2\operatorname{Re}\{e^{i2\pi(j+k)/3}I_{(+)}(x,\xi,y)\}, \qquad (22)$$

$$G^{(-)}_l(x,\xi,y)=\theta(-x,-\xi)E(x-\xi,y)+ +2\operatorname{Re}\{e^{i2\pi(l+1)/3}I_{(-)}(x,\xi,y)\}, \qquad (23)$$

где распределения E, $I_{(+)}$ и $I_{(-)}$ определены равенствами (12), (16) и (17) соответственно.

На основании равенств (16), (17), (22), (23) следует справедливость:

Лемма 3. *Справедливы равенства*:

$$G^{(+)}_{j,k}(x,\xi,y) = G^{(-)}_{j+k-1}(-x,-\xi,y), \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G^{(+)}_{0,1} = -\frac{\partial}{\partial x}G^{(+)}_{1,2};\ \ \frac{\partial}{\partial\xi}G^{(-)}_{0} = -\frac{\partial}{\partial x}G^{(-)}_{1}; \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G^{(+)}_{0,2} = -\frac{\partial}{\partial x}G^{(+)}_{0,1};\ \ \frac{\partial}{\partial\xi}G^{(-)}_{1} = -\frac{\partial}{\partial x}G^{(-)}_{2}; \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G^{(+)}_{1,2} = -\frac{\partial}{\partial x}G^{(+)}_{0,2};\ \ \frac{\partial}{\partial\xi}G^{(-)}_{2} = -\frac{\partial}{\partial x}G^{(-)}_{0}. \tag{27}$$

Объединяя теперь равенства (24)—(27) с равенствами (10), (13)—(15), (18)—(21), устанавливаем справедливость:

Лемма 4. *Справедливы равенства*:

$$\begin{gathered} L_{(x,y)}G^{(\pm)} = L^{*}_{(\xi,y)}G^{(\pm)} = \delta(x-\xi)\otimes\delta_{+}(y), \\ (x,y),(\xi,y)\in\bar{\Omega}_{\pm},\ x^2+\xi^2>0, \end{gathered} \tag{28}$$

$$\left(y\frac{\partial G^{(\pm)}}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=+0} = \delta(x-\xi),\ x,\xi\in\bar{R}_{\pm},\ x^2+\xi^2>0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}G^{(+)}_{j,k}\bigg|_{x=+0} = 0;\ m=j,k;\ \xi>0,\ y\ge 0; \tag{30}$$

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l}G^{(-)}_{l}\bigg|_{x=-0} = 0;\ \xi<0,\ y\ge 0; \tag{31}$$

$$\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial x^{j+k-1}}G^{(+)}_{j,k}\bigg|_{\xi=+0} = 0;\ x>0,\ y\ge 0; \tag{32}$$

$$\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial\xi^{2-m}}G^{(+)}_{j,k}\bigg|_{\xi=+0}\right)\right\|_{x=+0} = \begin{cases}0; & m\ne j,k;\\ (-1)^m\delta_{+}(y); & m=j,k;\end{cases} \tag{33}$$

$$\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial\xi^{2-m}}G^{(-)}_{l}\bigg|_{\xi=-0}\right)\right\|_{x=-0} = \begin{cases}0; & m\ne l;\\ (-1)^{l+1}\delta_{+}(y); & m=l;\end{cases} \tag{34}$$

$$\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial\xi^{2-m}}G^{(+)}_{j,k}\bigg|_{x=+0}\right)\right\|_{\xi=+0} = \begin{cases}0; & m\ne j,k;\\ (-1)^{m+1}\delta_{+}(y); & m=j,k;\end{cases} \tag{35}$$

$$\left\|\left(\frac{\partial^2}{\partial x^m\partial\xi^{2-m}}G^{(-)}_{j,k\to l}\bigg|_{x=+0}\right)\right\|_{\xi=+0} = \begin{cases}0; & m=l;\\ (-1)^{l}\delta_{+}(y); & m\ne l;\end{cases} \tag{36}$$

$$G^{(+)}_{j,k}(x,\xi,y), G^{(-)}_{l}(x,\xi,y) = o(1),\quad \pm x,\pm\xi,y\to+\infty. \tag{37}$$

Объединяя равенства (28)—(37) с хорошо известными свойствами оператора обобщенного сдвига T_η по переменной y (см. [3]):

$$(T_\eta g)(y) = \pi^{-1}\int_0^\pi g\left(\sqrt{y^2+\eta^2-2y\eta\cos\theta}\right)d\theta,$$

тем самым устанавливаем справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. *Распределения* $G^{(+)}_{j,k}$, $G^{(-)}_{l}$, *определенные равенствами* (12), (16), (22) *и* (12), (17), (23) *соответственно,являются функциями Грина задач* (2)—(5) и (6)—(9) *соответственно. Эти задачи корректно разрешимы в классах* $\overset{\circ}{S}{}'_{+}(\bar{\Omega}_{\pm})$, *а их решения* $u_{\pm}\in\overset{\circ}{S}{}'_{+}(\bar{\Omega}_{\pm})$ *могут быть представлены в виде*:

$$\begin{gathered} u_{+} = \sum_{m=j,k}(-1)^m\left\langle T_\eta\frac{\partial^{2-m}}{\partial\xi^{2-m}}G^{(+)}_{j,k};h_m(\eta)\right\rangle_1 + \\ +\left\langle G^{(+)}_{j,k};g_{+}(\xi)\right\rangle_{(+),0}+\left\langle T_\eta G^{(+)}_{j,k};f_{+}(\xi,\eta)\right\rangle_{(+),0,1}, \end{gathered} \tag{38}$$

$$\begin{gathered} u_{-} = (-1)^{l+1}\left\langle T_\eta\frac{\partial^{2-l}}{\partial\xi^{2-l}}G^{(-)}_{l};h_l(\eta)\right\rangle_1 + \\ +\left\langle G^{(-)}_{l};g_{-}(\xi)\right\rangle_{(-),0}+\left\langle T_\eta G^{(-)}_{l};f_{-}(\xi,\eta)\right\rangle_{(-),0,1}. \end{gathered}$$

Автор выражает глубокую признательность $\boxed{\text{И. А. Киприянову}}$ за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения потоком вязкого и тепопроводящего газа // Прикл. матем. и механ. — 1965. — Т. 29. № 6. — С. 1004—1014.

2. Диесперов В. Н., Ломакин Л. А. Об одной краевой задаче для осесимметрического ВТ-уравнения // Журн. вычисл. математики и матем. физ. — 1974. — Т. 4. № 5. — С. 1244—1260.

3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука; Физматлит, 1997. — 208 с.

4. Засорин Ю. В. Неклассическая задача для пространственного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. вычисл. математики и матем. физ. — 1995. — Т. 35. № 9. — С. 1401—1419.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 246 с.