УДК 517.982:988

О ЛОКАЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНДЕФИНИТНО АККРЕТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2001 г. В. В. Юргелас

Воронежский государственный университет

Установлено свойство локальной ограниченности индефинитно аккретивных операторов. В качестве приложения приведена итерационная процедура построения нулей операторов из указанного класса.

1. Дуальное отображение и свойство Бёрлинга-Ханнера.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольное (вещественное или комплексное) банахово пространство, $\mathfrak{X}^*$ – пространство, сопряженное $\mathfrak{X}$. Нормы элементов в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ будем обозначать через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ соответственно.

Каждое из отображений $\Phi_\alpha : \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{X}^*}$, $\alpha > 1$ называется **дуальным**, если при каждом $x \in \mathfrak{X}$

$$\Phi_\alpha(x) = \big\{\eta \in \mathfrak{X}^* \,:\, Re\langle \eta, x\rangle = \|x\|^\alpha,$$
$$\|\eta\|_* = \|x\|^{\alpha-1},\, \alpha > 1\big\};$$

здесь $Re\langle \eta, x\rangle$ – вещественная часть значения линейного непрерывного функционала $\eta \in \mathfrak{X}^*$ на элементе $x \in \mathfrak{X}$ (в литературе имеются и другие названия для этого отображения: дуализирующее [1], дуализующее [2], отображение двойственности [3] и др.)

В практику нелинейного функционального анализа дуальное отображение было введено М.М. Вайнбергом [4] и – независимо от него – А. Бёрлингом и А. Ливингстоном [5] в 1961 году и с тех пор является частью стандартной техники. Хорошо известно, что различным геометрическим характеристикам банахова пространства отвечают различные аналитические свойства его дуального отображения [6 – 13]. Например, $\mathfrak{X}$ строго выпукло точно тогда, когда каждое из Φ_α строго монотонно, т.е. $Re\langle \eta - \mu, x - y\rangle > 0$ для всех $x, y \in \mathfrak{X}$, $\eta \in \Phi_\alpha(x)$, $\mu \in \Phi_\alpha(y)$, $x \neq y$; $\mathfrak{X}^*$ равномерно выпукло точно тогда, когда Φ_α однозначно и равномерно непрерывно на ограниченных подмножествах $\mathfrak{X}$; Φ_α – сюръективно точно тогда, когда $\mathfrak{X}$ рефлексивно и т.д. Приведем – в дополнение к известным – еще одно утверждение, отвечающее и целям нашего дальнейшего изложения.

Будем говорить, что пространство $\mathfrak{X}$ обладает свойством Бёрлинга-Ханнера или кратко (BH)-**свойством**, если при некотором $p \geqslant 2$ для любых $x, y \in \mathfrak{X}$

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leqslant \big(\|x\|+\|y\|\big)^p + \big|\|x\|-\|y\|\big|^p \quad (1)$$

Этим свойством обладают, например, пространства $L_p(\Omega, \mu)$, $p \geqslant 2$ с σ-аддитивной мерой μ на некоторой σ-алгебре подмножеств из множества Ω (ср. [14]).

Теорема 1. *Если банахово пространство $\mathfrak{X}$ обладает (BH)-свойством, то все его дуальные отображения Φ_α равномерно монотонно в следующем смысле*

$$Re\langle \eta - \mu, x - y\rangle \geqslant \frac{2}{\tau(2^{\tau-1}-1)}\|x-y\|^\tau \qquad (2)$$

при всех $\tau \geqslant p \geqslant 2$ для любых $\eta \in \Phi_\alpha(x)$, $\mu \in \Phi_\alpha(y)$, $x, y \in \mathfrak{X}$.

Доказательство. Установим сначала, что при выполнении (1) в $\mathfrak{X}$ имеет место так называемое **нижнее неравенство параллелограмма** (терминология работы [8]):

$$\|x+y\|^\tau + \|x-y\|^\tau - 2^{\tau-1}\big(\|x\|^\tau + \|y\|^\tau\big) \leqslant 0 \quad (3)$$

при $\tau \geqslant p \geqslant 2$ и для любых $x, y \in \mathfrak{X}$. С этой целью введем в рассмотрение величину

$$\inf_{x \neq y} \frac{2^{\tau-1}\big(\|x\|^\tau + \|y\|^\tau\big) - \|x+y\|^\tau}{\|x-y\|^\tau}$$

и заметим, что она не изменится, если infimum вычислять для всех $x, y \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющих условию $\|x-y\| = 1$. И если положить $\xi = \|x\|$, $\lambda = \|y\|$, $\nu = \|x+y\|$, то доказываемое утверждение можно переформулировать следующим образом: найти точную нижнюю грань множества значений функции $g(\xi,\lambda,\nu)=2^{\tau-1}(\xi^\tau+\lambda^\tau)-\nu^\tau$ на множестве, определяемом системой неравенств

$$\begin{cases} \xi \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0, \\ \nu^p + 1 \leqslant (\xi+\lambda)^p + |\xi-\lambda|^p. \end{cases}$$

Решение этой задачи приводит к соотношению

$$\min g(\xi,\lambda,\nu) = (\nu^p+1)^{\frac{\tau}{p}} - \nu^\tau \geqslant 1,$$

равносильному (3).

Итак, если $\mathfrak{X}$ обладает (ВН)-свойством, то в этом пространстве имеет место нижнее неравенство параллелограмма в форме (3). Но тогда требуемое неравенство (2) немедленно следует из теоремы 5 работы [8]. Теорема доказана.

2. Локальная ограниченность индефинитно аккретивного оператора.

Свойства дуального отображения играют первостепенную роль при исследовании задач с аккретивными операторами (итерационные процессы, дифференциальные уравнения и т.д.), поскольку класс этих операторов определяется с помощью дуального отображения: оператор $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathfrak{X} \to 2^{\mathfrak{X}}$ называется **аккретивным**, если для каждой пары $x, y \in \mathcal{D}(F)$, $u \in F(x)$, $v \in F(y)$ и некоторого $\eta \in \Phi_\alpha(x-y)$ выполняется неравенство $Re\langle \eta, u-v\rangle \geqslant 0$. (Отметим, что термин "аккретивный"был введен К. Фридрихсом [15] для выделения класса линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и таких, что $Re(Ax,x) \geqslant 0\ \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$, хотя собственно изучение аккретивных операторов берет свое начало с известной работы Р. Филлипса [16]).

Итак, пусть F (вообще говоря, многозначный) оператор в $\mathfrak{X}$. При этом под $\mathcal{D}(F)$, как обычно, понимается множество $\mathcal{D}(F) = \{x \in \mathfrak{X} : F(x) \neq \varnothing\}$. Говорят, что оператор F **локально ограничен** в точке $x \in int\,\mathcal{D}(F)$, если образ $F\big(\overline{S}(x,r)\big)$ некоторого замкнутого шара $\overline{S}(x,r) \subset int\,\mathcal{D}(F)$ является ограниченным в $\mathfrak{X}$ множеством. Условия, при которых аккретивный оператор обладает свойством локальной ограниченности в каждой внутренней точке области определения, изучались многими авторами: в частности, Н. Кенмоши [17] доказал это в случае, когда $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ рефлексивны и строго выпуклы, а Φ_α и Φ_α^{-1} непрерывны, П. Фитцпатрик, П. Хесс и Т. Като [18] получили этот результат в предположении, что $\mathfrak{X}^*$ равномерно выпукло.

Покажем, что свойством локальной ограниченности обладает более широкий класс аккретивных операторов при естественных предположениях регулярности исходного пространства.

Пусть банахово пространство $\mathfrak{X}$ представимо в виде прямой суммы подпространств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$. Обозначим через $\mathfrak{P}_1$ оператор проектирования на подпространство $\mathfrak{X}_1$ по направлению $\mathfrak{X}_2$, а через $\mathfrak{P}_2$ – оператор проектирования на $\mathfrak{X}_2$ по направлению $\mathfrak{X}_1$. Оператор F назовем **индефинитно аккретивным,** если для любых $x, y \in \mathcal{D}(F)$ и при некоторых $\alpha > 1$, $\eta_1 \in \Phi_\alpha\big(\mathfrak{P}_1(x-y)\big)$, $\eta_2 \in \Phi_\alpha\big(\mathfrak{P}_2(x-y)\big)$ справедливо неравенство

$$Re\Big(\langle \eta_1, \mathfrak{P}_1\big(F(x)-F(y)\big)\rangle - \\ -\langle \eta_2, \mathfrak{P}_2\big(F(x)-F(y)\big)\rangle\Big) \geqslant 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть банахово пространство $\mathfrak{X}$ таково, что его дуальное отображение Φ_α равномерно монотонно в следующем смысле:*

$$Re\langle \eta-\mu, x-y\rangle \geqslant a\big(\|x\|,\|y\|\big)b(\|x-y\|) \tag{5}$$

для любых $x, y \in \overline{S}(\theta,1)$, $\eta \in \Phi_\alpha(x)$, $\mu \in \Phi_\alpha(y)$, где числовые функции $a(t,s)$ $(0 \leqslant t,s \leqslant 1)$ и $b(\varepsilon)$ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2)$ таковы, что $a(0,0)=0$, $b(0)=0$, $a(t,s) > 0$ при $|t|+|s| > 0$ и $b(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$. Тогда всякий индефинитно аккретивный оператор F, действующий в $\mathfrak{X}$, локально ограничен в каждой внутренней точке своей области определения.

Доказательство. Пусть $u \in int\,\mathcal{D}(F)$ и для некоторого $r > 0$ $\overline{S}(u,r) \subset int\,\mathcal{D}(F)$. Без ограничения общности можно считать, что $u = \theta$, ибо в противном случае можно перейти к рассмотрению оператора $\widetilde{F}(x)=F(x+u)$, для которого нуль является внутренней точкой области определения. Покажем, что оператор F переводит некоторый шар $\overline{S}(\theta,\delta) \subseteq \overline{S}(\theta,r)$ в ограниченное множество.

Заметим, прежде всего, что с помощью множеств

$$\mathfrak{M}_k = \{x \in \overline{S}(\theta,r) \,:\, F(x) \in \overline{S}(\theta,k)\},$$

$$k \in N = \{1, 2, \ldots\}$$

шар $\overline{S}(\theta, k)$ представи́м в виде

$$\overline{S}(\theta, r) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$$

(если бы набор множеств $\mathfrak{M}_k$ был конечен, то утверждение было бы доказано). По теореме Бэра-Хаусдорфа о категориях [19] по крайней мере одно из множеств, скажем, $\mathfrak{M}_m$ содержит некоторый шар $\overline{S}(\xi, r')$, так что $\overline{S}(\xi, r') \subset \overline{S}(\theta, r) \cap \mathfrak{M}_m$. При этом можно считать, что $\xi \neq \theta$ и r' таковы, что

$$\|\xi\| - \frac{r'}{3} \geqslant 2r' \max\{\|\mathfrak{P}_1\|; \|P_2\|\},$$

$$\overline{S}(\theta, \frac{r'}{3}) \cap \overline{S}(\xi, 2r') = \varnothing.$$

В силу индефинитной аккретивности F для произвольных $x \in \overline{S}(\theta, r'/3)$, $y \in \overline{S}(\xi, r')$ можно указать такие $\eta_j \in \varPhi_\alpha\big(\mathfrak{P}_j(y-x)\big)$, $\mu_j \in \varPhi_\alpha\big(\mathfrak{P}_j(x+\xi)\big)$, $j = 1, 2$, что будут иметь место неравенства

$$Re\langle \eta_1, \mathfrak{P}_1 F(x)\rangle - Re\langle \eta_2, \mathfrak{P}_2 F(x)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant m\Big(\|\mathfrak{P}_1\|^\alpha + \|\mathfrak{P}_2\|^\alpha\Big)\big(r + \frac{r'}{3}\big)^{\alpha-1}$$

$$Re\langle \mu_2, \mathfrak{P}_2 F(x)\rangle - Re\langle \mu_1, \mathfrak{P}_1 F(x)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|F(-\xi)\|\Big(\|\mathfrak{P}_1\|^\alpha + \|\mathfrak{P}_2\|^\alpha\Big)\big(r + \frac{r'}{3}\big)^{\alpha-1}.$$

Складывая последние неравенства, получаем

$$Re\langle \eta_1 - \mu_1, \mathfrak{P}_1 F(x)\rangle - Re\langle \eta_2 - \mu_2, \mathfrak{P}_2 F(x)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \big(m + \|F(-\xi)\|\big)\big(\|\mathfrak{P}_1\|^\alpha + \|\mathfrak{P}_2\|^\alpha\big)\big(r + \frac{r'}{3}\big)^{\alpha-1} \equiv c_1. \tag{6}$$

Положим, далее,

$$y = 2x + \xi + \frac{r'}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x).$$

Легко видеть, что $y \in \overline{S}(\xi, r')$. Но тогда в силу (5)

$$Re\langle \eta_1 - \mu_1, \mathfrak{P}_1 F(x)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{r'}\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\| a\big(\|\mathfrak{P}_1(y-x)\|,$$

$$\|\mathfrak{P}_1(x+\xi)\|\big) b\Big(\frac{r'\|\mathfrak{P}_1 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}\Big), \tag{7}$$

$$-Re\langle \eta_2 - \mu_2, \mathfrak{P}_2 F(x)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{r'}\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\| a\big(\|\mathfrak{P}_2(y-x)\|,$$

$$\|\mathfrak{P}_2(x+\xi)\|\big) b\Big(\frac{r'\|\mathfrak{P}_2 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}\Big), \tag{8}$$

Сложение (7) и (8) приводит к неравенству

$$Re\langle \eta_1 - \mu_1, \mathfrak{P}_1 F(x)\rangle - Re\langle \eta_2 - \mu_2, \mathfrak{P}_2 F(x)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{r'}\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|\Big(a\big(\|\mathfrak{P}_1(y-x)\|,$$

$$\|\mathfrak{P}_1(x+\xi)\|\big)\Big) b\Big(\frac{r'\|\mathfrak{P}_1 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}\Big) +$$

$$+ a\big(\|\mathfrak{P}_2(y-x)\|, \|\mathfrak{P}_2(x+\xi)\|\big) \times$$

$$\times b\Big(\frac{r'\|\mathfrak{P}_2 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}\Big).$$

Поскольку при каждом $x \in \overline{S}(\theta, r'/3)$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\frac{r'\|\mathfrak{P}_1 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|} \geqslant \frac{r'}{6} \qquad \text{или}$$

$$\frac{r'\|\mathfrak{P}_2 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|} \geqslant \frac{r'}{6}$$

(пусть, для определенности, выполняется второе из них), то справедливо по крайней мере одно из неравенств

$$\|\mathfrak{P}_1(y-x)\| \geqslant \frac{r'}{12}, \quad \|\mathfrak{P}_2(x+\xi)\| \geqslant \frac{r'}{12},$$

откуда следует существование постоянной $c_2 > 0$ такой, что при любом $x \in \overline{S}(\theta, r'/3)$

$$a\big(\|\mathfrak{P}_1(y-x)\|, \mathfrak{P}_1(x+\xi)\big) \times$$

$$\times b\Big(\frac{r'\|\mathfrak{P}_1 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}\Big) +$$

$$+ a\big(\|\mathfrak{P}_2(y-x)\|, \mathfrak{P}_2(x+\xi)\big) \times$$

$$\times b\Big(\frac{r'\|\mathfrak{P}_2 F(x)\|}{3\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\|}\Big) \geqslant c_2 > 0. \tag{9}$$

Таким образом, согласно (6) и (9)

$$\|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x)\| \leqslant c_1 r/(3c_2),$$

а, значит,

$$\|F(x)\| = \|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)^2 F(x)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2\| \, \|(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)F(x))\| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 r \|\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2\|/(3c_2)$$

для произвольного $x \in \overline{S}(\theta, r'/3)$, что и завершает доказательство.

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие. Если банахово пространство $\mathfrak{X}$ обладает (BH)-свойством, то всякий индефинитно аккретивный оператор, действующий в $\mathfrak{X}$, локально ограничен в каждой внутренней точке своей области определения.

3. Итерационный процесс.

При обосновании сходимости некоторых итерационных процессов для уравнения вида

$$F(x) = \theta \tag{10}$$

с аккретивным оператором F существенно используется свойство его локальной ограниченности [10, 20, 21]. Схема рассуждений, например, теоремы 1.1 из [10] с естественными изменениями может быть перенесена на приводимый ниже итерационный процесс построения решения уравнения (10) с индефинитно аккретивным оператором F. Чтобы придать формулировке соответствующего утверждения "вычислимый смысл", предположим, что пространство $\mathfrak{X}$ обладает (BH)-свойством, $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ индефинитно (p, γ)-аккретивен, т.е. $Re\Big(\langle \eta_1, \mathfrak{P}_1\big(F(x) - F(y)\big)\rangle - \; -\langle \eta_2, \mathfrak{P}_2\big(F(x) - F(y)\big)\rangle\Big) \geqslant \gamma\|x - y\|^p$ с четным p.

Теорема 3. *Итерационный процесс*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \beta_n \mathfrak{P}_1(h_n), \; y_{n+1} = y_n + \beta_n \mathfrak{P}_2(h_n), \\ d_{n+1} = \Big(1 - \dfrac{\beta_n}{\rho_n}\Big) d_n + \beta_n^2 \tau_n, \end{cases}$$

в котором

$$h_n = \frac{1}{\|F(u_n)\|} F(u_n), \quad u_n = x_n + y_n,$$

$$x_n \in \mathfrak{X}_1, \, y_n \in \mathfrak{X}_2,$$

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{p\gamma}{2\|F(u_n)\|} \min\Big\{\frac{1}{\|\mathfrak{P}_1\|^p}; \; \frac{1}{\|\mathfrak{P}_2\|^p}\Big\},$$

$$\tau_n = 2 \sum_{1 \leqslant j \leqslant \frac{p}{2}} \binom{p}{2j} d_n^{\frac{p-2j}{p}} \rho_n^{2j-2} \Big(\|\mathfrak{P}_1\|^{2j} + \|\mathfrak{P}_2\|^{2j}\Big);$$

а выбор итерационных параметров β_n подчинен условию $(\theta \in (0, 1/2])$

$$\theta \min\Big\{\rho_n; \; \frac{d_n}{\tau_n \rho_n}\Big\} \leqslant \beta_n \leqslant \min\Big\{\rho_n; \; (1 - \theta)\frac{d_n}{\tau_n \rho_n}\Big\},$$

сходится к решению u_* уравнения (10) со скоростью, характеризующейся неравенством

$$\|x_n - x_*\|^p + \|y_n - y_*\|^p \leqslant \frac{d_1}{1 + n d_1 c},$$

где $x_* = \mathfrak{P}_1(u_*)$, $y_* = \mathfrak{P}_2(u_*)$, $c = const > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirk W. A., Morales C. Fixed point theorems for local strong pseudo-contractions // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. — 1980. — V. 4, № 2. — P. 363—368.

2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 588 с.

4. Вайнберг М.М. О сходимости процесса наискорейшего спуска // Сиб. матем. журнал. — 1961. — Т. 2, № 2. — С. 201—220.

5. Beurling A., Livingston A. E. A theorem on duality mappings in Banach spaces // Ark. Math. — 1961, — № 4, — P. 405—411.

6. Petryshyn W. V. A characterization of strict convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings // J. Funct. Anal. — 1970. — № 6, — P. 282—291.

7. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

8. Юргелас В. В. О некоторых геометрических характеристиках банаховых пространств и аккретивных операторов // Изв. вузов. Математика. — 1982. — № 5. — С. 63—69.

9. Юргелас В. В. О некоторых геометрических характеристиках пространства l_p // Современные методы нелин. анализа: Тез. докл. конф., 26—29 апр. 1995 г. — Воронеж, 1995. — С. 99—100.

10. Юргелас В. В. Об итерационных процессах типа спуска и некоторых свойствах дуального отображения/ Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1989. — 30 с. — Деп. в ВИНИТИ 19.05.80, № 1912.

11. Нотик А. И. О свойствах дуального отображения с масштабной функцией // Изв. вузов. Математика. — 1985. — № 12. — С. 68—70.

12. Альбер Я. И., Нотик А. И. Геометрические свойства банаховых пространств и приближенные методы решения нелинейных операторных уравнений // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 276, № 5. — С. 1033—1037.

13. Zemek M. Strong monotonicity and Lipschitz-continuity of the duality mapping // Acta Univ. Carol. Math. et phys. — 1991. — V. 32, № 2. — P. 61—64.

14. Hanner O. On the uniform convexity of L^p and l^p//Ark. Math. — 1955. — V. 3, № 19. — P. 239—244.

15. Friedrichs K. O. Symmetric positive linear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1958. — № 11. — P. 333—418.

16. Phyllips R. S. Dissipative hyperbolic systems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1957. — V. 86. — P. 109—173.

17. Kenmochi N. Accretive mappings in Banach spaces // Hiroshima Math. J., 1972, V. 2, P. 163—177.

18. Fitzpatrick P. M., Hess P., Kato T. Local boundedness of monotone type operators // Proc. Jap. Acad. — 1972. — V. 48. — P. 275—277.

19. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

20. Перов А. И., Юргелас В. В. О сходимости одного итерационного процесса // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1977. — Т. 17, № 4. — С. 859—870.

21. Перов А. И. Об одном итерационном методе // Прикладной анализ. — Воронеж, 1979. — С. 76—81.