

УДК 621.37: 519.213

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА ОБОБЩЕННОГО ВИНЕРОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

© 2001 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Получены асимптотические аппроксимации для функции распределения величины абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля. Границы применимости асимптотических выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения вероятностных распределений абсолютных (наибольших) максимумов гауссовских случайных процессов и полей встречается в различных приложениях физики, в том числе в радиофизике и радиотехнике [1, 2]. Несмотря на большое число теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению максимумов случайных функций, общие выражения для распределений абсолютного максимума гауссовского случайного поля остаются неизвестными.

В [3, 4] найдены асимптотически точные (с ростом h) выражения для функции распределения $F(h)$ абсолютного максимума однородного гауссовского случайного поля. На практике часто встречаются винеровские случайные процессы и поля, которые существенно неоднородны. Под винеровским случайным процессом $L_0(t)$, $t \geq 0$ понимается чисто диффузионный центрированный гауссовский марковский случайный процесс с нулевым коэффициентом сноса, постоянным коэффициентом диффузии и с корреляционной функцией $R(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$ [5]. Такой процесс описывает броуновское движение частиц в различных средах, флуктуации фазы колебаний автогенератора при наличии тепловых и дробовых шумов, поведение решающей статистики последовательного обнаружителя сигналов при наличии шума и др. Обобщением понятия винеровского процесса на случай двумерной области определения является винеровское поле $L_0(\eta, \kappa)$, $\eta \geq 0$, $\kappa \geq 0$ [3, 6, 7], которое представляет собой гауссовское центрированное

случайное поле с корреляционной функцией $R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = \min(\eta_1, \eta_2) \min(\kappa_1, \kappa_2)$. Сечения винеровского случайного поля $L_0(\eta, \kappa)$ по переменным η и κ являются винеровскими случайными процессами.

В [3] получено асимптотически точное (с ростом h) выражение для вероятности $\alpha(h) = 1 - F(h)$ превышения порога h величиной абсолютного максимума винеровского случайного поля $L_0(\eta, \kappa)$ в пределах области определения, задаваемой условиями $\eta \in [0; 1]$, $\kappa \in [0; 1]$. Анализ асимптотического выражения [3] показывает, что его точность при конечных значениях h может оказаться неудовлетворительной. В частности значения вероятности $\alpha(h)$, рассчитанные по формуле из [3], могут быть значительно больше единицы, а соответствующие значения функции распределения $F(h)$ — меньше нуля, причем $\alpha(h) \rightarrow \infty$ и $F(h) \rightarrow -\infty$ при $h \rightarrow 0$. Это противоречит смыслу функций $\alpha(h)$ и $F(h)$ как вероятностных мер, лежащих в диапазоне значений от 0 до 1. Отметим также, что часто необходимо знать распределение максимума винеровского поля на интервалах $\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$, $\kappa \in [\kappa_{\min}; \kappa_{\max}]$, где $\eta_{\min} \geq 0$ и $\kappa_{\min} \geq 0$. Асимптотическая формула [3], полученная при $\eta_{\min} = 0$ и $\kappa_{\min} = 0$, не учитывает влияние ненулевых значений η_{\min} и κ_{\min} на распределение абсолютного максимума поля.

В ряде практических приложений статистической радиофизики и радиотехники необходимо вычислять вероятностные распределения абсолютных максимумов неоднородных гауссовских случайных полей, являющихся

аддитивной суперпозицией винеровского случайного поля и некоторого детерминированного поля. Такие случайные поля, которые далее будем называть обобщенными винеровскими полями, возникают в задачах обработки квазидетерминированных и стохастических сигналов с неизвестными разрывными энергетическими параметрами [8—10], при обработке фрагментов изображений с априори неизвестными размерами и др. В отличие от винеровского случайного поля, обобщенное винеровское поле имеет математическое ожидание, изменяющееся в пределах области определения. Это не позволяет воспользоваться методикой [3, 4] для получения асимптотических распределений абсолютного максимума обобщенного винеровского поля. В [8, 9] методами теории марковских процессов [5] получено точное выражение для функции распределения абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного процесса с кусочно-постоянными коэффициентами сноса и диффузии. Однако методов точного решения аналогичной задачи для обобщенного винеровского случайного поля в настоящее время не существует.

Далее получены лишённые недостатков [3] асимптотически точные выражения для функции распределения величины абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля с постоянными и кусочно-постоянными сносом и диффузией. Границы применимости найденных асимптотических выражений установлены экспериментально, с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА ВИНЕРОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Согласно [3, 6, 7] под винеровским полем будем понимать центрированное неоднородное гауссовское случайное поле $L_0(\eta, \kappa)$, $\eta \geq 0$, $\kappa \geq 0$ с корреляционной функцией

$$R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = \langle L_0(\eta_1, \kappa_1) L_0(\eta_2, \kappa_2) \rangle = \min(\eta_1, \eta_2) \min(\kappa_1, \kappa_2). \quad (1)$$

Получим асимптотически точное (с ростом h) выражение для функции распределения $F(h)$ величины абсолютного максимума винеровского случайного поля в пределах области определения Λ , задаваемой условиями $\eta \in [\eta_{\min}^*, 1]$,

$\kappa \in [\kappa_{\min}^*, 1]$, $0 \leq \eta_{\min} \leq 1$, $0 \leq \kappa_{\min} \leq 1$. Отметим, что функцию распределения абсолютного максимума винеровского поля на произвольной области определения $\eta \in [\eta_{\min}^*, \eta_{\max}^*]$, $\kappa \in [\kappa_{\min}^*, \kappa_{\max}^*]$ нетрудно рассчитать по формуле $F(h) = F^*(h / \sqrt{\eta_{\max}^* \kappa_{\max}^*})$, где $F^*(h)$ — функция распределения абсолютного максимума поля при $\eta \in [\eta_{\min}^* / \eta_{\max}^*, 1]$, $\kappa \in [\kappa_{\min}^* / \kappa_{\max}^*, 1]$.

Известно [3], что распределение $F(h)$ абсолютного максимума винеровского случайного поля $L_0(\eta, \kappa)$ при больших h определяется поведением поля в окрестности значений $\eta = \eta_m$, $\kappa = \kappa_m$ из области определения Λ , при которых дисперсия поля максимальна. В рассматриваемом здесь случае $\eta_m = 1$, $\kappa_m = 1$. Поэтому для нахождения асимптотически точного (с ростом h) выражения для функции распределения $F(h)$ достаточно исследовать поведение корреляционной функции поля $L_0(\eta, \kappa)$ в малой окрестности точки (1, 1). При $\delta_R = \max(|\eta_1 - 1|, |\eta_2 - 1|, |\kappa_1 - 1|, |\kappa_2 - 1|) \rightarrow 0$ корреляционная функция (1) допускает асимптотическое представление

$$R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = R_0(\eta_1 - 1/2, \eta_2 - 1/2) + R_0(\kappa_1 - 1/2, \kappa_2 - 1/2) + o(\delta_R), \quad (2)$$

$$R_0(t_1, t_2) = \max[0; \min(t_1, t_2)]. \quad (3)$$

Обозначим $L_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые совместно гауссовские центрированные случайные процессы с корреляционными функциями $R_0(t_1, t_2)$ (3). Такие процессы при $t < 0$ тождественно равны нулю, а при $t \geq 0$ являются винеровскими случайными процессами [5]. Из (1), (2) следует, что корреляционные функции гауссовских случайных полей $L_0(\eta, \kappa)$ и $L^*(\eta, \kappa) = L_1(\eta - 1/2) + L_2(\kappa - 1/2)$ асимптотически (при $\delta_R \rightarrow 0$) совпадают. Следовательно, винеровское случайное поле $L_0(\eta, \kappa)$ при $\delta = \max(|\eta - 1|, |\kappa - 1|) \rightarrow 0$ сходится по распределению к сумме статистически независимых гауссовских случайных процессов $L_1(\eta - 1/2)$ и $L_2(\kappa - 1/2)$. Поэтому функцию распределения $F(h)$ величины абсолютного максимума случайного поля $L_0(\eta, \kappa)$ можно представить в виде

$$F(h) = P \left[\sup_{\eta \in \Lambda_1} L_1(\eta) + \sup_{\kappa \in \Lambda_2} L_2(\kappa) < h \right] = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(h - x) W_1(x) dx, \quad (4)$$

где $F_1(x) = P \left[\sup_{\eta \in \Lambda_1} L_1(\eta) < x \right]$ и

$F_2(x) = P \left[\sup_{\kappa \in \Lambda_2} L_2(\kappa) < x \right]$ — функции распре-

деления величин абсолютных максимумов случайных процессов $L_1(\eta)$ и $L_2(\kappa)$ при $\eta \in \Lambda_1$ и $\kappa \in \Lambda_2$ соответственно, $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ — плотность вероятности величины абсолютного максимума случайного процесса $L_1(\eta)$ при $\eta \in \Lambda_1$, а Λ_1 и Λ_2 — интервалы возможных значений параметров η и κ , задаваемые условиями $\eta \in [\eta_{\min} - 1/2; 1/2]$ и $\kappa \in [\kappa_{\min} - 1/2; 1/2]$ соответственно. Воспользовавшись результатами [8, 9], получаем

$$F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_i}} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{(u - \sqrt{2}x)^2}{2\rho_i} \right] \left[2\Phi \left(\frac{u}{\sqrt{1-\rho_i}} \right) - 1 \right] du, \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

где $\rho_1 = \max(0; 2\eta_{\min} - 1)$, $\rho_2 = \max(0; 2\kappa_{\min} - 1)$, а

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$ — интеграл вероятности [1]. Тогда из (4) с учетом (5) получаем

$$F(h) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\rho_2}} \int_{-\infty}^\infty \exp(-x^2) \Phi \left[x \sqrt{\frac{2(1-\rho_1)}{\rho_1}} \right] \times \left\{ \int_0^\infty \exp \left[-\frac{[u - \sqrt{2}(h-x)]^2}{2\rho_2} \right] \left[2\Phi \left(\frac{u}{\sqrt{1-\rho_2}} \right) - 1 \right] du \right\} dx. \tag{6}$$

Точность выражения (6) возрастает с увеличением h .

В [3] получено асимптотически точное (с ростом h) выражение для вероятности $\alpha(h) = 1 - F(h)$ превышения порога h реализацией винеровского случайного поля $L_0(\eta, \kappa)$ при $\eta_{\min} = 0$, $\kappa_{\min} = 0$, откуда находим

$$F(h) = 1 - 2\sqrt{2} \exp(-h^2/2) / \sqrt{\pi h}. \tag{7}$$

Сравним асимптотически точные выражения (6) и (7). При $h \rightarrow \infty$ из формулы (6) получаем $F(h) = 1 - 2\sqrt{2/\pi} \exp(-h^2/2) [1/\sqrt{h} + o(1/h)]$. Следовательно, выражения (6) и (7) асимптотически (при $h \rightarrow \infty$) совпадают. При конечных значениях h формула (7) дает существенно завышенные значения для вероятности $\alpha(h)$,

которые могут быть больше 1. При этом соответствующие значения функции $F(h)$ могут быть меньше нуля. Так при $h = 0,3$ по формуле (7) получаем $\alpha(h) \approx 5,07$, $F(h) \approx -4,07$, а при $h = 0,1$ получаем $\alpha(h) \approx 15,88$, $F(h) \approx -14,88$, причем $\alpha(h) \rightarrow \infty$ и $F(h) \rightarrow -\infty$ при $h \rightarrow 0$. Вместе с тем значения α , рассчитанные по формуле (6) не превосходят 1, а соответствующие значения $F(h)$ неотрицательны, что полностью соответствует смыслу функций $\alpha(h)$ и $F(h)$, как вероятностных мер, лежащих в диапазоне значений от 0 до 1.

С целью установления границ применимости асимптотически точных формул (6), (7) при конечных значениях h выполнялось статистическое моделирование на ЭВМ величины абсолютного максимума винеровского случайного поля $L_0(\eta, \kappa)$ с корреляционной функцией (1). В процессе моделирования с шагом $\Delta = 0,005$ по переменным η и κ формировались отсчеты

$$X_{ij} = L_0(i\Delta, j\Delta) = \Delta \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^j n_{lk}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

винеровского случайного поля, где n_{lk} — независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Величина X_m абсолютного максимума поля определялась как наибольшее значение X_{ij} для всех $i \in \{ \eta_{\min}/\Delta; \{1/\Delta\} \}$, $j \in \{ \kappa_{\min}/\Delta; \{1/\Delta\} \}$, где $\{x\}$ — целая часть числа x . Экспериментальные значения вероятностей $\alpha(h)$ и $F(h)$ для различных порогов h находились как относительные частоты превышения и непревышения порогов величиной X_m соответственно.

На рис. 1 нанесены экспериментальные значения вероятности $\alpha(h) = 1 - F(h)$, полученные на основе обработки не менее 10 000 реализаций винеровского случайного поля. Там же сплошными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости $\alpha(h)$, рассчитанные по формуле (6). С вероятностью 0,95 границы доверительных интервалов на рис. 1 отклоняются от экспериментальных значений не более чем на 20 % при $\alpha \geq 0,01$ и не более чем на 40 % при $\alpha \geq 0,003$. Кривые 1 и крестики на рис. 1 соответствуют $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 0,4$, кривые 2 и треугольники — $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 0,7$, а кривые 3 и квадраты — $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 0,9$. Кружочками на рис. 1 нанесены экспериментальные значения α при $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 0$, а соответствующая теоретичес-

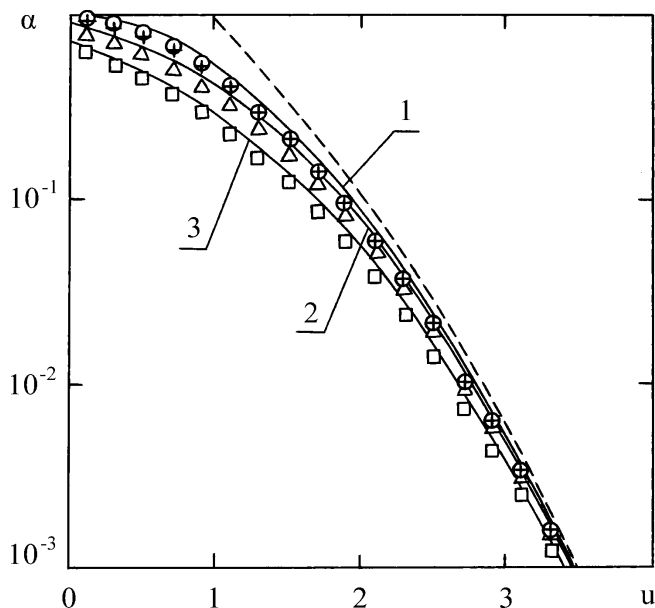


Рис. 1. Вероятность превышения порога величиной абсолютного максимума винеровского случайного поля

кая кривая, рассчитанная по формуле (6), совпадает с кривой 1. Для сравнения штриховой линией показана теоретическая зависимость $\alpha(h)$, рассчитанная по формуле (7) для случая $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 0$. Из рис. 1 и других результатов моделирования следует, что полученная в работе теоретическая формула (6) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные для всех значений $h \geq 0$, η_{\min} и κ_{\min} . Формула (7), полученная в [3], имеет невысокую точность при малых значениях h , ее рекомендуется использовать при $h \geq 3$, когда $\alpha \leq 0,01$.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА ОБОБЩЕННОГО ВИНЕРОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С ПОСТОЯННЫМИ СНОСОМ И ДИФФУЗИЕЙ

Рассмотрим обобщенное винеровское случайное поле $L(\eta, \kappa)$, $\eta \geq 0$, $\kappa \geq 0$ с математическим ожиданием

$$S(\eta, \kappa) = \langle L(\eta, \kappa) \rangle = -z\eta\kappa, \quad z > 0, \quad (8)$$

и корреляционной функцией

$$R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = \langle [L(\eta_1, \kappa_1) - \langle L(\eta_1, \kappa_1) \rangle] \times [L(\eta_2, \kappa_2) - \langle L(\eta_2, \kappa_2) \rangle] \rangle = \min(\eta_1, \eta_2) \min(\kappa_1, \kappa_2). \quad (9)$$

Отметим, что сечения $v_1(\eta) = L(\eta, \kappa^*)$, $\kappa^* = \text{const}$ и $v_2(\kappa) = L(\eta^*, \kappa)$, $\eta^* = \text{const}$ поля $L(\eta, \kappa)$ по пе-

ременным η и κ являются гауссовскими марковскими диффузионными случайными процессами с постоянными коэффициентами сноса $K_1 = -z\kappa^*$, $K_1 = -z\eta^*$ и диффузии $K_2 = \kappa^*$, $K_2 = \eta^*$ соответственно [5].

Получим асимптотически точное (с ростом z) выражение для функции $F(h)$ распределения величины абсолютного максимума случайного поля $L(\eta, \kappa)$ в пределах области определения Λ , задаваемой условиями $\eta \in [1; \eta_{\max}]$, $\kappa \in [1; \kappa_{\max}]$. Используя это выражение, нетрудно записать функцию распределения $F(h)$ для произвольной области определения $\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$, $\kappa \in [\kappa_{\min}; \kappa_{\max}]$.

Учтем, что в пределах области Λ математическое ожидание (8) случайного поля $L(\eta, \kappa)$ достигает абсолютного максимума в точке (1,1), а дисперсия поля в этой точке минимальна. Математическое ожидание поля убывает с ростом η и κ пропорционально $z\eta\kappa$, а дисперсия поля возрастает пропорционально $\eta\kappa$. Поэтому при $z \gg 1$ положение абсолютного максимума поля $L(\eta, \kappa)$ расположено в малой окрестности точки (1,1), причем при $z \rightarrow \infty$ координаты η_m и κ_m положения абсолютного максимума поля сходятся к значениям $\eta = 1$ и $\kappa = 1$ в среднеквадратическом [11]. Тогда для нахождения асимптотически точного (с ростом z) выражения для функции распределения $F(h)$ абсолютного максимума поля $L(\eta, \kappa)$ достаточно исследовать поведение его математического ожидания и корреляционной функции в малой окрестности точки (1,1). При $\delta = \max(|\eta - 1|, |\kappa - 1|) \rightarrow 0$ математическое ожидание (8) представляется в виде

$$S(\eta, \kappa) = S_1(\eta - 1) + S_1(\kappa) + o(\delta), \quad S_1(t) = -zt, \quad (10)$$

а корреляционная функция (9) при $\delta_R = \max(|\eta_1 - 1|, |\eta_2 - 1|, |\kappa_1 - 1|, |\kappa_2 - 1|) \rightarrow 0$ допускает представление

$$R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = R_1(\eta_1 - 1, \eta_2 - 1) + R_1(\kappa_1, \kappa_2) + o(\delta_R), \quad (11)$$

$$R_1(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2). \quad (12)$$

Обозначим $L_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые совместно гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $S_1(t)$ (10) и корреляционными функциями $R_1(t_1, t_2)$ (12). Из (8)—(11) следует, что математические ожидания и корреляционные функции гауссовских случайных полей $L(\eta, \kappa)$ и $L^*(\eta, \kappa) = L_1(\eta - 1) + L_2(\kappa)$ асимптотически (при $\delta \rightarrow 0$, $\delta_R \rightarrow 0$) совпадают. Следовательно,

гауссовское случайное поле $L(\eta, \kappa)$ при $\delta \rightarrow 0$ сходится по распределению к сумме статистически независимых гауссовских случайных процессов $L_1(\eta - 1)$ и $L_2(\kappa)$. Поэтому функцию распределения $F(h)$ величины абсолютного максимума случайного поля $L(\eta, \kappa)$, аналогично (4), можно представить в виде

$$F(h) = P \left[\sup_{\eta \in \Lambda_1} L_1(\eta) + \sup_{\kappa \in \Lambda_2} L_2(\kappa) < h \right] = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(h - x) W_1(x) dx, \tag{13}$$

где $F_1(x) = P \left[\sup_{\eta \in \Lambda_1} L_1(\eta) < x \right]$ и

$F_2(x) = P \left[\sup_{\kappa \in \Lambda_2} L_2(\kappa) < x \right]$ — функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $L_1(\eta)$ и $L_2(\kappa)$, $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ — соответствующая плотность вероятности величины абсолютного максимума случайного процесса $L_1(\eta)$, а Λ_1 и Λ_2 — интервалы возможных значений параметров η и κ , задаваемые условиями $\eta \in [0; \eta_{\max} - 1]$ и $\kappa \in [1; \kappa_{\max}]$ соответственно. Случайные процессы $L_1(\eta)$ и $L_2(\kappa)$ являются непрерывными гауссовскими марковскими диффузионными процессами [5] с коэффициентами сноса ($-z$) и единичными коэффициентами диффузии. Распределения величин абсолютных максимумов таких процессов известны [8,9] и определяются как

$$F_1(x) = \begin{cases} \Phi(zd_1 + \frac{x}{d_1}) - \exp(-2zx)\Phi(zd_1 - \frac{x}{d_1}), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \tag{14}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(y - x - z)^2}{2} \right] \times \left[\Phi \left(zd_2 + \frac{y}{d_2} \right) - \exp(-2zy)\Phi \left(zd_2 - \frac{y}{d_2} \right) \right] dy,$$

где $d_1 = \sqrt{\eta_{\max} - 1}$, $d_2 = \sqrt{\kappa_{\max} - 1}$. Тогда из (13) с учетом (14) получаем

$$F(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{d_1} \exp \left[-\frac{(x + zd_1)^2}{2d_1^2} \right] + 2z \exp(-2zx)\Phi \left(zd_1 - \frac{x}{d_1} \right) \right\} \times \left\{ \int_0^{\infty} \exp \left[-\frac{(y - h + x - z)^2}{2} \right] \left[\Phi \left(zd_2 + \frac{y}{d_2} \right) - \exp(-2zy)\Phi \left(zd_2 - \frac{y}{d_2} \right) \right] dy \right\} dx. \tag{15}$$

Точность выражения (15) возрастает с увеличением z .

С целью установления границ применимости асимптотически точной формулы (15) при конечных значениях z выполнялось статистическое моделирование на ЭВМ величины абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля $L(\eta, \kappa)$ с математическим ожиданием (8) и корреляционной функцией (9). В процессе моделирования с шагом $\Delta = 0,005$ по переменным η и κ формировались отсчеты

$$X_{ij} = L(i\Delta, j\Delta) = \Delta \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^j n_{lk} - zij\Delta^2, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

случайного поля. Величина X_m абсолютного максимума поля $L(\eta, \kappa)$ определялась как наибольшее значение X_{ij} для всех $i \in [\{1/\Delta\}; \{\eta_{\max}/\Delta\}]$, $j \in [\{1/\Delta\}; \{\kappa_{\max}/\Delta\}]$. Экспериментальные значения вероятностей $\alpha(h)$ и $F(h)$ для различных порогов h находились как относительные частоты превышения и непревышения порогов величиной X_m соответственно.

На рис. 2 нанесены экспериментальные значения вероятности $\alpha(h) = 1 - F(h)$, полученные на основе обработки не менее 10 000 реализаций случайного поля при $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 2$, а на рис. 3 — при $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 4$. Там же сплошными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости $\alpha(h)$, рассчитанные по формуле (15). Границы доверительных интервалов на рис. 2, 3 совпадают с соответствующими границами на рис. 1. Кривые 1 и квадраты на рис. 2, 3 соответствуют $z = 2$, кривые 2 и треугольники — $z = 1,5$, кривые 3 и крестики — $z = 1$, кривые 4 и кружочки — $z = 0,5$. Из рис. 2, 3 и других результатов моделирования следует, что теоретическая формула (15) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальные данные уже при $z \geq 0,5..1$.

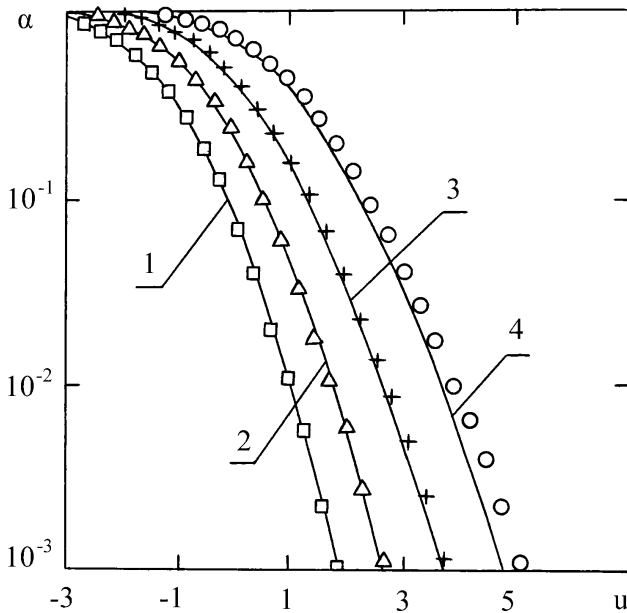


Рис. 2. Вероятность превышения порога величины абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля при $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 2$

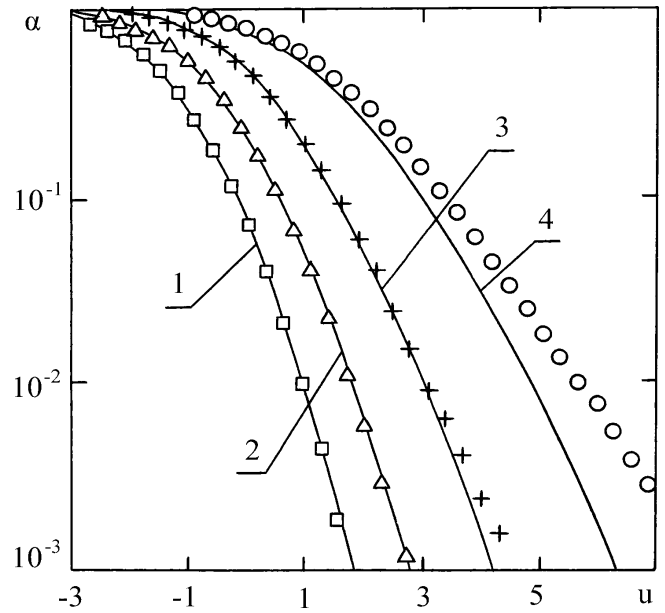


Рис. 3. Вероятность превышения порога величины абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля при $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 4$

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ
АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА
ОБОБЩЕННОГО ВИНЕРОВСКОГО
СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ
С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ СНОСОМ
И ДИФФУЗИЕЙ**

Рассмотрим обобщенное винеровское случайное поле $L(\eta, \kappa)$, $\eta \geq 0$, $\kappa \geq 0$ с математическим ожиданием

$$S(\eta, \kappa) = (z_1 + z_2)\min(1, \eta)\min(1, \kappa) - z_2\eta\kappa, \quad (16)$$

$z_1 > 0, z_2 > 0$

и корреляционной функцией

$$R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = (1 - g)\min(\eta_1, \eta_2)\min(\kappa_1, \kappa_2) + g \min(1, \eta_1, \eta_2)\min(1, \kappa_1, \kappa_2), \quad g < 1. \quad (17)$$

Отметим, что сечения $v_1(\eta) = L(\eta, \kappa^*)$, $\kappa^* = \text{const}$ и $v_2(\kappa) = L(\eta^*, \kappa)$, $\eta^* = \text{const}$ поля $L(\eta, \kappa)$ по переменным η и κ являются гауссовскими марковскими диффузионными случайными процессами с кусочно-постоянными коэффициентами сноса и диффузии [5].

Получим асимптотически точное (с ростом z_1 и z_2) выражение для функции распределения $F(h)$ величины абсолютного максимума случайного поля $L(\eta, \kappa)$ в пределах области определения Λ , задаваемой условиями $\eta \in [\eta_{\min}; \eta_{\max}]$, $\kappa \in [\kappa_{\min}; \kappa_{\max}]$, $\eta_{\min} \leq 1 \leq \eta_{\max}$, $\kappa_{\min} \leq 1 \leq \kappa_{\max}$. Учтем, что в пределах области Λ математическое ожидание (16) случайного поля $L(\eta, \kappa)$ достигает абсолютного максимума в точке (1,1). Действительно, $S(\eta, \kappa) = z_1\eta\kappa$ при $\kappa < 1$, $\eta < 1$, а при $\kappa \geq 1$,

$\eta \geq 1$ имеем $S(\eta, \kappa) = z_1 - z_2(\eta\kappa - 1)$. Дисперсия поля с ростом η и κ возрастает пропорционально $b\eta\kappa$, где $b \leq 1$. Поэтому аналогично [8—11] можно показать, что при $z_1 \gg 1$, $z_2 \gg 1$ положение абсолютного максимума поля $L(\eta, \kappa)$ расположено в малой окрестности точки (1,1), причем при $z_1 \rightarrow \infty$, $z_2 \rightarrow \infty$ координаты η_m и κ_m положения абсолютного максимума поля сходятся к значениям $\eta = 1$ и $\kappa = 1$ в среднеквадратическом. Тогда для нахождения асимптотически точного (с ростом z_i , $i = 1, 2$) выражения для функции распределения $F(h)$ абсолютного максимума поля $L(\eta, \kappa)$ достаточно исследовать поведение его математического ожидания и корреляционной функции в малой окрестности точки (1,1). При $\delta = \max(|\eta - 1|, |\kappa - 1|) \rightarrow 0$ математическое ожидание (16) представляется в виде

$$S(\eta, \kappa) = S_2(\eta - 1/2) + S_2(\kappa - 1/2) + o(\delta), \quad (18)$$

$$S_2(t) = \min(1/2, t) - z_2 t, \quad \text{при } t \geq 0, \quad (19)$$

$$S_2(t) = 0, \quad \text{при } t < 0,$$

а корреляционная функция (17) при $\delta_R = \max(|\eta_1 - 1|, |\eta_2 - 1|, |\kappa_1 - 1|, |\kappa_2 - 1|) \rightarrow 0$ допускает представление

$$R(\eta_1, \eta_2, \kappa_1, \kappa_2) = R_2(\eta_1 - 1/2, \eta_2 - 1/2) + R_2(\kappa_1 - 1/2, \kappa_2 - 1/2) + o(\delta_R), \quad (20)$$

$$R_2(t_1, t_2) = \max[0; (1 - g)\min(t_1, t_2) + g \min(1/2, t_1, t_2)]. \quad (21)$$

Обозначим $L_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые совместно гауссовские случай-

ные процессы с математическими ожиданиями $S_2(t)$ (19) и корреляционными функциями $R_2(t_1, t_2)$ (21). Такие процессы при $t < 0$ тождественно равны нулю, а при $t \geq 0$ являются непрерывными гауссовскими марковскими диффузионными случайными процессами с кусочно-постоянными коэффициентами сноса и диффузии [5]. Из (16)—(18), (20) следует, что математические ожидания и корреляционные функции гауссовских случайных полей $L(\eta, \kappa)$ и $L^*(\eta, \kappa) = L_1(\eta - 1/2) + L_2(\kappa - 1/2)$ асимптотически (при $\delta \rightarrow 0, \delta_R \rightarrow 0$) совпадают. Следовательно, гауссовское случайное поле $L(\eta, \kappa)$ при $\delta \rightarrow 0$ сходится по распределению к сумме статистически независимых гауссовских случайных процессов $L_1(\eta - 1/2)$ и $L_2(\kappa - 1/2)$. Поэтому функцию распределения $F(h)$ величины абсолютного максимума случайного поля $L(\eta, \kappa)$, аналогично (4), можно представить в виде

$$F(h) = P \left[\sup_{\eta \in \Lambda_1} L_1(\eta) + \sup_{\kappa \in \Lambda_2} L_2(\kappa) < h \right] = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(h - x) W_1(x) dx, \quad (22)$$

где $F_1(x) = P \left[\sup_{\eta \in \Lambda_1} L_1(\eta) < x \right]$ и

$F_2(x) = P \left[\sup_{\kappa \in \Lambda_2} L_2(\kappa) < x \right]$ — функции распределения величин абсолютных максимумов случайных процессов $L_1(\eta)$ и $L_2(\kappa)$, $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ — соответствующая плотность вероятности величины абсолютного максимума случайного процесса $L_1(\eta)$, а Λ_1 и Λ_2 — интервалы возможных значений параметров η и κ , задаваемые условиями $\eta \in [\eta_{\min} - 1/2; \eta_{\max} - 1/2]$ и $\kappa \in [\kappa_{\min} - 1/2; \kappa_{\max} - 1/2]$ соответственно. Воспользовавшись результатами [8,9], получаем

$$F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{y}{\sqrt{2}} - x + \frac{z_1}{2} \right)^2 \right] \Psi_i(y) V_i(x, y) dy, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

$$\Psi_i(y) = \Phi \left(\frac{z_2 d_i}{\sqrt{1-g}} + \frac{y}{d_i \sqrt{2(1-g)}} \right) - \exp \left(-\sqrt{2} \frac{y z_2}{1-g} \right) \Phi \left(\frac{z_2 d_i}{\sqrt{1-g}} - \frac{y}{d_i \sqrt{2(1-g)}} \right),$$

$$V_i(x, y) = \Phi \left(x \sqrt{\frac{2(1-\rho_i)}{\rho_i}} + y \sqrt{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} \right) - \exp(-2\sqrt{2}yx) \Phi \left(x \sqrt{\frac{2(1-\rho_i)}{\rho_i}} - y \sqrt{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} \right),$$

где $\rho_1 = \max(0; 2\eta_{\min} - 1)$, $\rho_2 = \max(0; 2\kappa_{\min} - 1)$, $d_1 = \sqrt{\eta_{\max} - 1}$, $d_2 = \sqrt{\kappa_{\max} - 1}$. Дифференцируя выражение (23), получаем

$$W_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{y}{\sqrt{2}} - x + \frac{z_1}{2} \right)^2 \right] \Psi_i(y) \times \{ (\sqrt{2}y - 2x + z_1) V_i(x, y) + \omega_i(x, y) \} dy, \quad (24)$$

$$\omega_i(x, y) = 2\sqrt{2}y \exp(-2\sqrt{2}yx) \Phi \left(x \sqrt{\frac{2(1-\rho_i)}{\rho_i}} - y \sqrt{\frac{\rho_i}{1-\rho_i}} \right).$$

Подставляя (23), (24) в (22), находим асимптотически точное (с ростом z_1 и z_2) выражение для функции распределения $F(h)$ величины абсолютного максимума случайного поля.

Для установления границ применимости асимптотически точной формулы (22)—(24) при конечных значениях $z_i, i = 1, 2$ выполнялось статистическое моделирование на ЭВМ величины абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля $L(\eta, \kappa)$ с математическим ожиданием (16) и корреляционной функцией (17) при $z_1 = z_2 = z, g = 0$. В процессе моделирования с шагом $\Delta = 0,005$ по переменным η и κ формировались отсчеты

$$X_{ij} = L(i\Delta, j\Delta) = \Delta \sum_{l=1}^i \sum_{k=1}^j \eta_{lk} + z\Delta^2 [2 \min(i; \{1/\Delta\}) \times \min(j; \{1/\Delta\}) - ij], \quad i, j = 1, 2, \dots$$

случайного поля. Здесь $\{x\}$ — целая часть числа x . Величина X_m абсолютного максимума поля $L(\eta, \kappa)$ определялась как наибольшее значение X_{ij} для всех $i \in \{[\eta_{\min}/\Delta]; [\eta_{\max}/\Delta]\}$, $j \in \{[\kappa_{\min}/\Delta]; [\kappa_{\max}/\Delta]\}$. Экспериментальные значения вероятностей $\alpha(h)$ и $F(h)$ для различных порогов h находились как относительные частоты превышения и непревышения порогов величиной X_m соответственно.

На рис. 4 нанесены экспериментальные значения вероятности $\alpha(h) = 1 - F(h)$, полученные на основе обработки не менее 10000 реализаций случайного поля при $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 2, \eta_{\min} = \kappa_{\min} = 1/2$, а на рис. 5 — при $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 3,$

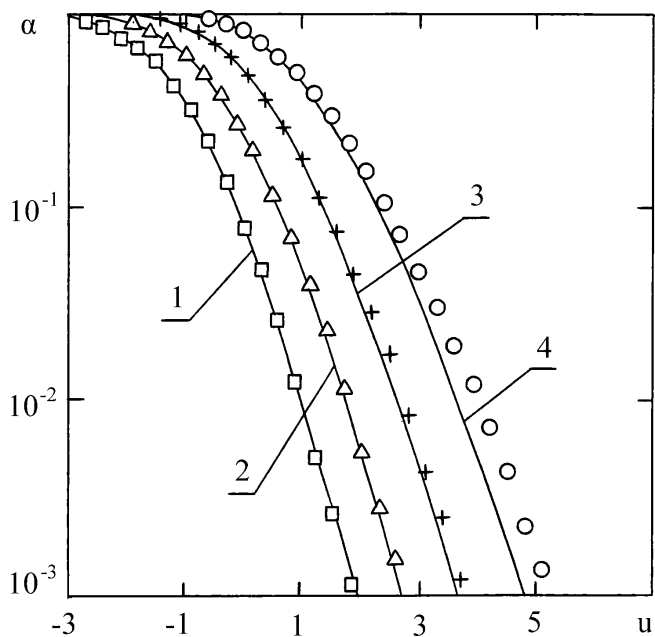


Рис. 4. Вероятность превышения порога величиной абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля при $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 1/2$, $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 2$

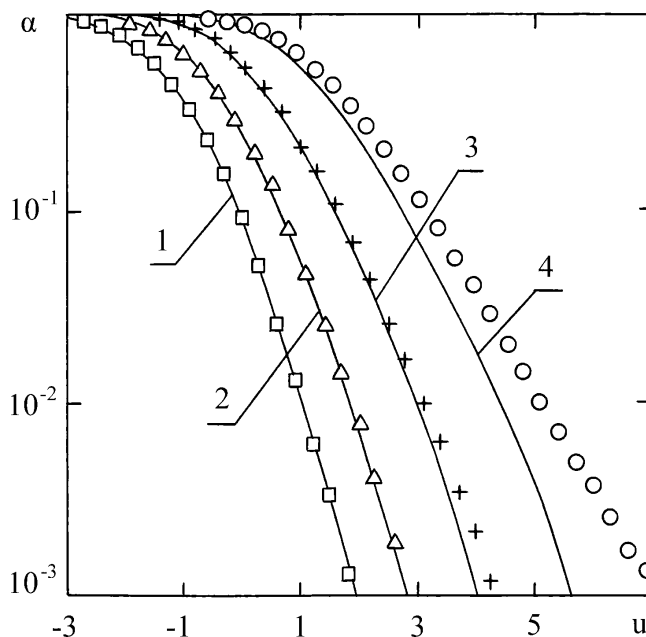


Рис. 5. Вероятность превышения порога величиной абсолютного максимума обобщенного винеровского случайного поля при $\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 1/2$, $\eta_{\max} = \kappa_{\max} = 3$

$\eta_{\min} = \kappa_{\min} = 1/2$. Там же сплошными линиями показаны соответствующие теоретические зависимости $\alpha(h)$, рассчитанные по формулам (22)—(24). Границы доверительных интервалов на рис. 4, 5 совпадают с соответствующими границами на рис. 1. Кривые 1 и квадраты на рис. 4, 5 соответствуют $z = 2$, кривые 2 и треугольники — $z = 1,5$, кривые 3 и крестики — $z = 1$, кривые 4 и кружочки — $z = 0,5$. Из рис. 4,5 и других результатов моделирования следует, что теоретические формулы (22)—(24) хорошо аппроксимируют экспериментальные данные уже при $z_i \geq 0,5 \cdot 1$, $i = 1, 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
2. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиопромышленность // Радиотехника и электроника. — 1998. — Т. 43. № 5. — С. 501—523.
3. Питербург В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 174 с.

4. Питербург В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. — 1995. — Т. 50. № 6. — С. 57—156.
5. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
6. Ченцов Н. Н. Винеровские случайные поля от нескольких параметров // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 106. № 4. — С. 607—609.
7. Goodman V. Distribution estimates for functionals of the two-parameter Wiener process // Ann. of Probability. — 1976. — V. 4. № 6. — P. 977—983.
8. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991. — 246 с.
9. Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П. А. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.
10. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
11. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. — 528 с.