

УДК 519.6:536.71

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВАКУУМ-СУБЛИМАЦИОННОЙ СУШКИ ГРАНУЛИРОВАННОГО ПРОДУКТА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БАРАБАНЕ

А. И. Шашкин¹, В. Б. Черных¹, С. Т. Антипов², С. В. Шахов²

¹Воронежский государственный университет

²Воронежская государственная технологическая академия

Сублимационная сушка — это удаление влаги из замороженных материалов путем возгонки (сублимации) льда, т. е. непосредственного перехода его в парообразное состояние, минуя жидкую фазу. В промышленных сушильных установках повышение интенсивности сублимации льда достигается снижением давления над материалом. Кроме того, в процессе сушки к материалу должна непрерывно подводиться извне энергия, компенсирующая расход энергии, связанный с процессом сублимации. Более подробно с теоретическими основами сублимационной сушки можно ознакомиться, например, в [2], [3], [4].

Одним из направлений интенсификации вакуум-сублимационной сушки является увеличение поверхности испарения путем организации процесса сушки в тонком слое. Развитием этого направления служит метод, основанный на удалении высохшего слоя продукта с поверхности инертных носителей, помещенных в перфорированный барабан и выполненных в виде сферических тел из теплопроводных материалов. Данный метод сублимационной сушки был разработан в Воронежской государственной технологической академии. Настоящая работа посвящена математическому моделированию этого метода.

Следует отметить, что вопрос о моделировании тепломассообмена при вакуум-сублимационном обезвоживании гранулированного продукта в барабане уже обсуждался в работах [6] и [7]. Однако, по мнению авторов настоящей работы, в предложенных там моделях не в достаточной степени учтены все факторы, влияющие на процесс сублимации. Кроме того, моделируемый в [6], [7] процесс

является более простым по сравнению с рассматриваемым здесь (в частности, там не предполагается использование инертных носителей).

1. Описание моделируемого процесса

Пусть требуется высушить некоторый дисперсный (т. е. состоящий из мелких частиц, порошкообразный) материал. Рассмотрим следующий технологический процесс.

На сферический инертный носитель (например, на металлический шарик) радиуса R_1 наносится равномерный слой влажного продукта, — образуется сферическая гранула радиуса $R_2 > R_1$ (рис. 1). После предварительного замораживания (точнее, самозамораживания) такие гранулы попадают в перфорированный барабан, где образуют слой высоты h (рис. 2). Цилиндрическая стенка барабана изготовлена из мелкой металлической сетки. Сам барабан расположен в сушильной камере, в которой поддерживается постоянное (низкое) давление.

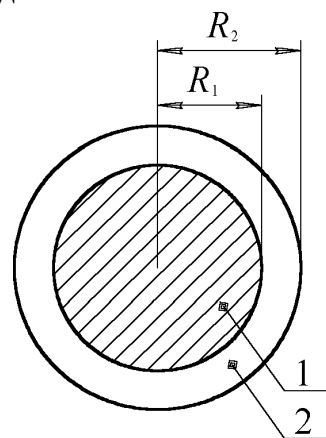


Рис. 1. Структура гранулы: 1 - инертный носитель; 2 - продукт

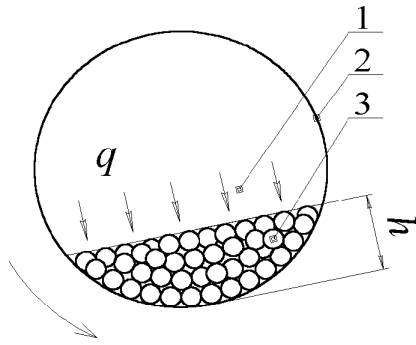


Рис. 2. Барабан с гранулами (вид сбоку): 1 – тепловые лучи; 2 — барабан; 3 — гранулы

Гранулы, находящиеся на поверхности слоя, прогреваются постоянным инфракрасным излучением плотности q . Барабан вращается, поэтому гранулы постоянно перемешиваются, и энергия теплового излучения более-менее равномерно распределяется на все гранулы. За счет такого теплоподвода происходит процесс сублимационной сушки продукта.

При постоянном перемешивании замороженных гранул продукта на их поверхности за некоторый малый период времени образуется слой сухого продукта, который за счет трения гранул между собой и о стенки барабана претерпевает деструкцию и равномерно отделяется от замороженного остатка. Процесс заканчивается тогда, когда весь продукт в грануле превращается в сухой порошок, т. е. слой продукта, нанесенный на инертный носитель, полностью разрушается, сухие частицы продукта измельчаются под воздействием сил трения между собой и о цилиндрическую сетку поверхности вращающегося барабана до размеров перфорированной сетки и просыпаются через ее ячейки в разгрузочный патрубок.

В данном случае использование инертных носителей дает целый ряд преимуществ: носители являются своеобразными аккумуляторами тепла, обеспечивают (за счет своего веса) надежную деструкцию высохшего продукта и т. д. Однако подробное обсуждение этого вопроса выходит за рамки нашего рассмотрения.

2. Моделирование процесса: общие идеи

При моделировании описанного технологического процесса целесообразно рассматривать отдельную гранулу, а не слой гранул в

целом. Конечно, при этом не должно оставаться без внимания влияние гранул друг на друга в процессе сушки.

При сушке гранулированного продукта во вращающемся барабане определение теплоподвода к отдельной грануле сопряжено с некоторыми дополнительными трудностями. Одна из них заключается в том, что тепловым излучением прогреваются только гранулы, находящиеся на поверхности слоя (ниже инфракрасные лучи не проникают). За счет вращения барабана каждая гранула попеременно оказывается на поверхности слоя и в его глубине. Таким образом, воздействие лучистого потока на гранулу носит переменный характер. С точки зрения теплообмена, пребывание гранулы на поверхности слоя и в его глубине — два качественно разных ее состояния, поэтому в дальнейшем мы будем строго разделять весь слой гранул на две области — поверхностный слой (назовем его зоной А) и глубинный слой (зона В) (рис. 3). Высоту зоны А естественно положить равной диаметру гранулы. Каждый раз длительность пребывания гранулы в зоне А или, соответственно, в зоне В различна и, вообще говоря, случайна. Следовательно, внешний теплоподвод осуществляется не только прерывисто, но и в случайные промежутки времени.

Вторая трудность заключается в том, что находящаяся на поверхности слоя гранула облучается не равномерно со всех сторон, а лишь с одной стороны. Кроме того, ориентация гранулы по отношению к источнику излучения носит совершенно случайный характер, поэтому невозможно определить, какая именно область поверхности гранулы в данный момент облучается.

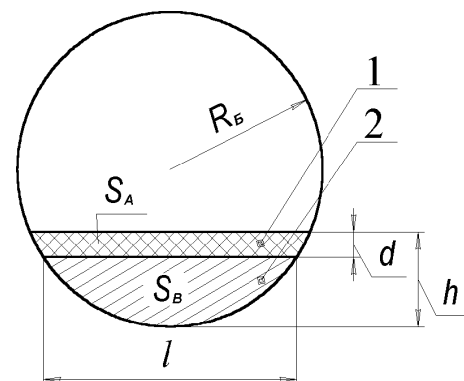


Рис. 3. Поверхностный и глубинный слой гранул: 1 — зона А; 2 — зона В

В дальнейшем будем упрощенно полагать, что в любой момент времени гранула равномерно со всех сторон облучается тепловым потоком плотности \tilde{q} , но при этом учтем отмеченные выше факторы, положив

$$\tilde{q} = \theta_\tau \theta_s q. \quad (1)$$

Здесь q — плотность лучистого потока, реально падающего на гранулы поверхностного слоя. Коэффициент θ_τ служит для учета прерывистого характера облучения гранулы, $0 \leq \theta_\tau \leq 1$. С помощью коэффициента θ_s учитывается односторонность облучения гранулы, $0 < \theta_s \leq \frac{1}{2}$.

В связи с определением θ_τ предложим два альтернативных подхода. В первом случае будем условно считать, что в каждый момент времени облучаются не только гранулы, находящиеся на поверхности слоя (в зоне A), а вообще все гранулы в барабане. Следовательно, энергия, которую получают реально облучаемые в данный момент гранулы, должна быть равномерно распределена на все гранулы. В соответствии с этим подходом коэффициент θ_τ следует положить равным отношению объема, занимаемого зоной A к объему всего слоя гранул или, что то же самое, отношению площади S_A поперечного сечения зоны A к сумме $S_A + S_B$ площадей поперечных сечений зон A и B (рис. 3):

$$\theta_\tau = \frac{S_A}{S_A + S_B}, \quad (2)$$

где

$$S_A \approx ld = 2d\sqrt{R_B^2 - (R_B - h + d)^2},$$

$$S_B = R_B^2 \arccos \frac{R_B - h + d}{R_B} -$$

$$-(R_B - h + d)\sqrt{R_B^2 - (R_B - h + d)^2}.$$

Здесь R_B — радиус барабана; d — высота зоны A , $d \approx 2R_2$ (R_2 — начальный радиус гранулы); l — ширина зоны A ; h — высота слоя гранул.

Второй подход к определению θ_τ основывается на допущении, что, попадая при вращении барабана в какую-либо из зон A и B , гранула каждый раз пребывает в этой зоне приблизительно равные периоды времени. Пусть τ_A и τ_B — средняя продолжительность

пребывания гранулы в зоне A и B соответственно (промежуток времени между моментом попадания гранулы, соответственно, в зону A или B и моментом ее перехода в другую зону). Тогда моделируемый процесс можно приближенно представить в виде циклической смены двух фаз, каждая из которых имеет постоянную длительность. Первая фаза — пребывание гранулы в зоне A (под облучением), ее длительность — τ_A . Вторая фаза — пребывание гранулы в зоне B (без облучения), длительность τ_B . Таким образом, четко различаются два состояния гранулы — она либо облучается, либо не облучается. Поэтому коэффициент θ_τ определяется очень просто:

$$\theta_\tau = \begin{cases} 1, & \text{если гранула пребывает в зоне } A \\ & \text{(I фаза цикла),} \\ 0, & \text{если гранула пребывает в зоне } B \\ & \text{(II фаза цикла).} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь коэффициент θ_τ дискретным образом зависит от времени и определяется длительностями фаз τ_A и τ_B , которые в сумме составляют продолжительность цикла и являются параметрами модели. Эти параметры зависят от размера гранул, а также от загруженности и скорости вращения барабана. Они могут быть определены экспериментально. Заметим, что достаточно знания лишь одного из этих параметров, второй же может быть определен из пропорционального соотношения

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{S_A}{S_B}, \quad (4)$$

где S_A и S_B — как и прежде, площади поперечных сечений зон A и B соответственно.

Очевидно, что второй способ определения коэффициента θ_τ является более точным с точки зрения учета прерывистого характера облучения гранулы. Но, не вдаваясь в подробности, заметим, что и первый способ имеет некоторые преимущества. Практика показала, что различие в определении θ_τ не оказывает существенного влияния на расчетную продолжительность сушки. Следует также отметить, что первый способ определения θ_τ является предельным случаем второго, когда параметры τ_A и τ_B , связанные соотношением (4), совместно стремятся к нулю.

Определим теперь коэффициент τ_s из формулы (1), служащий для учета односторонности облучения гранулы. В этой связи заметим, что, во-первых, гранула имеет сферическую форму, поэтому любая ее ориентация по отношению к источнику излучения равновероятна. Во-вторых, за счет вращения барабана гранула не находится в статическом положении, а перекачивается, таким образом, ее ориентация постоянно меняется. Поэтому можно условно считать, что гранула облучается равномерно со всех сторон. В таком случае энергию лучистого потока, падающего на поверхность гранулы с определенного направления, следует формально распределить на всю поверхность гранулы. С этой целью и вводится коэффициент τ_s , который мы определим так:

$$\theta_s = \frac{1 - \cos \varphi}{2}. \quad (5)$$

где φ — т. н. угол эффективного облучения*, $0 < \varphi \leq \pi/2$. Значение величины φ определяется эвристически и зависит от конкретной ситуации. В большинстве случаев в качестве φ следует брать значение, близкое к $\pi/2$.

Теперь рассмотрим, собственно, вопрос о сублимации. Следуя [5], будем считать, что зона сублимации представляет собой четкую границу между высохшим и замороженным слоем продукта, — эту границу будем называть фронтом сублимации. В процессе сушки фронт сублимации продвигается от поверхности гранулы к носителю. Он разделяет общий объем продукта на две части, существенно отличающиеся механической прочностью. Поверхностный высохший слой легко разрушается. Скорость истирания высохшего слоя зависит от скорости распространения фронта сублимации и частоты соударений гранул между собой во вращающемся барабане, которая, в отличие от первого фактора, носит случайный характер.

Однако мы можем считать, что высохшие частицы продукта мгновенно отделяются от гранулы, т. е. что высохший слой продукта отсутствует, и поверхность гранулы совпадает с фронтом сублимации. Это вполне обоснованное допущение, потому что в нашем слу-

чае используются инертные носители, которые обеспечивают эффективную деструкцию и отделение высохшего слоя продукта (носители существенно утяжеляют гранулы, и, следовательно, возрастают силы трения гранул друг о друга и о стенки барабана).

3. Математическая постановка задачи

Учитывая геометрическую форму гранулы, наше рассмотрение будем проводить в сферической системе координат, поместив начало координат в центр гранулы. С учетом сделанных ранее предположений наша задача, очевидно, является осесимметричной. Ее математическая постановка выглядит следующим образом:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + Q_1, \quad 0 < r < R_1, \tau > 0, \quad (6)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_2 r^2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + Q_2, \quad R_1 < r < \xi(\tau), \tau > 0, \quad (7)$$

$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0) = T_{\text{суб}} = \text{const}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial r} = 0, \quad (9)$$

$$T_1(R_1, \tau) = T_2(R_1, \tau), \quad (10)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(R_1, \tau)}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(R_1, \tau)}{\partial r}, \quad (11)$$

$$T_2(\xi, \tau) = T_{\text{суб}}, \quad (12)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(\xi, \tau)}{\partial r} = \gamma_{\text{суб}} \rho_2 \frac{\partial \xi(\tau)}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\xi(0) = R_2, \quad R_1 \leq \xi(\tau) \leq R_2, \quad (14)$$

где $T_1(r, \tau)$, $T_2(r, \tau)$ — температурное поле инертного носителя и продукта соответственно, К; $c_1(T)$, $c_2(T)$ — удельная теплоемкость носителя и продукта соответственно, дж/кг · град; $\rho_1(T)$, $\rho_2(T)$ — плотность носителя и продукта соответственно, кг/м³; $\lambda_1(T)$, $\lambda_2(T)$ — коэффициенты теплопроводности носителя и продукта соответственно, Вт/м · град; $Q_1(r, \tau)$, $Q_2(r, \tau)$ — мощность внутренних тепловых источников, Вт/м³; $T_{\text{суб}}$ — температура сублимации, К; $\gamma_{\text{суб}}$ — теплота сублимации, дж/кг; $\xi(\tau)$ — положение фронта сублима-

* К сожалению, формат данной работы не позволяет объяснить происхождение формулы (5) и раскрыть физический смысл величины φ .

ции, m ; R_2 — начальный радиус гранулы, m ; R_1 — радиус инертного носителя, m ; τ — время, s ; r — пространственная координата, m .

Функции внутренних тепловых источников Q_1 и Q_2 , присутствующие в уравнениях теплопроводности (6), (7), связаны с поглощением гранулой энергии инфракрасного излучения. Конкретный вид этих функций определяется ниже.

Задача (6)—(14) представляет собой одномерную параболическую краевую задачу с подвижной границей. Она включает в себя нестационарные уравнения теплопроводности (6), (7), начальное условие (8), граничные условия (9)—(12) и определяющие подвижную границу условия (13), (14). Искомыми величинами здесь являются температурные поля T_1 , T_2 и свободная граница ξ .

Граничное условие (9) является условием симметрии, условия (10), (11) — условиями сопряжения на границе раздела двух сред, (12) — условием постоянства температуры в зоне сублимации. Уравнение (13) является условием баланса энергии на фронте сублимации, оно определяет динамику распространения фронта сублимации и в совокупности с условием (14) позволяет установить положение этого фронта в различные моменты времени.

Таким образом, мы имеем задачу о фазовом превращении вещества с внешней подвижной границей. Такого рода задачу называют задачей Стефана о фазовом переходе.

4. Определение теплового источника

Для определения функций Q_1 и Q_2 приведем некоторые необходимые сведения о взаимодействии теплового излучения с материалом.

При падении потока излучения на поверхность тела в общем случае могут наблюдаться явления отражения, поглощения и пропускания. Неотраженное излучение проникает в толщу тела и здесь частично поглощается в зависимости от поглощательной способности тела, причем с увеличением толщины пройденного слоя энергия лучистого потока уменьшается по экспоненциальному закону.

Пусть Q_0 — мощность лучистого потока ($вт/м^2$), поглощенного поверхностью тела. Тогда мощность Q ($вт/м^3$) теплового источника, связанного с поглощением тепловых лучей, следуя [4], определим формулой

$$Q(x) = Q_0 e^{-kx}. \quad (15)$$

где x — расстояние, пройденное лучами в толще материала, m ; k — коэффициент ослабления (или показатель поглощения), характеризующий относительное изменение интенсивности излучения на единицу длины пути в поглощающей и рассеивающей среде, $1/м$. Выражение (15) является аналогом закона ослабления (поглощения) Ламберта—Бугера (см. [1, стр. 23]).

Определим коэффициент Q_0 в формуле (15). Очевидно, что эта величина не может зависеть от размеров тела, поэтому при ее определении будем рассматривать тело толщины $l = \infty$. Это избавляет нас от необходимости учета пропущенного (непоглощенного) телом излучения, так как все неотраженные лучи полностью поглощаются.

Пусть q — плотность лучистого потока ($вт/м^2$), падающего на поверхность тела, а q_α и q_β — соответственно плотность отраженного и поглощенного телом излучения. Тогда

$$q = q_\alpha + q_\beta. \quad (16)$$

Если α — коэффициент отражения для поверхности тела, то из (16) получаем

$$q_\beta = q - q_\alpha = q - \alpha q = (1 - \alpha)q. \quad (17)$$

С другой стороны, энергия поглощенного теплового излучения распределяется в толще тела по закону (15). Поэтому плотность q_β лучистого потока, поглощенного телом, можно определить интегрированием выражения (15) по интервалу $[0, \infty)$:

$$q_\beta = \int_0^\infty Q_0 e^{-kx} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(-\frac{Q_0 e^{-kx}}{k} \right) + \frac{Q_0}{k} = \frac{Q_0}{k}. \quad (18)$$

Сопоставив выражения (17) и (18), получаем

$$(1 - \alpha)q = \frac{Q_0}{k},$$

откуда

$$Q_0 = k(1 - \alpha)q. \quad (19)$$

Вернемся к нашей задаче. Здесь облучаемое тело (гранула) является двухслойным, причем второй, внутренний слой (инертный носитель) практически не пропускает инфракрасное излучение. В этом случае общий механизм взаимодействия тепловых лучей с гранулой следующий.

Часть падающего излучения отражается поверхностью слоя продукта. Неотраженное

излучение проникает вглубь этого слоя и здесь, согласно закону поглощения Ламберта—Бугера, частично поглощается. Оставшаяся доля излучения либо поглощается поверхностью инертного носителя, либо отражается ею и вторично проходит сквозь слой продукта, частично поглощаясь в нем.

Поэтому на основании формул (15) и (19) мощность теплового источника, связанного с поглощением инфракрасного излучения, для инертного носителя и слоя продукта определим следующим образом:

$$Q_1(r, \tau) = k_1(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\tilde{q}e^{-k_2(\xi(\tau) - R_1)}e^{-k_1(R_1 - r)},$$

$$0 \leq r < R_1,$$

$$Q_2(r, \tau) = k_2(1 - \alpha_2)\tilde{q}e^{-k_2(\xi(\tau) - r)} +$$

$$+ k_2(1 - \alpha_2)\tilde{q}e^{-k_2(\xi(\tau) - R_1)}e^{-k_2(r - R_1)},$$

$$R_1 < r \leq \xi(\tau),$$

где \tilde{q} — средняя плотность падающего на гранулу лучистого потока, вычисленная с учетом односторонности и прерывистого характера облучения гранулы по формуле (1); α_1 , α_2 — коэффициенты отражения для поверхности инертного носителя и замороженного продукта соответственно; k_1 , k_2 — коэффициенты ослабления для носителя и замороженного продукта соответственно.

5. Численное решение задачи Стефана

В полученной нами задаче Стефана (6)—(14) коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотности зависят от искомой температуры T , что делает уравнения (6), (7) квазилинейными. Однако основная трудность решения задачи состоит в том, что условие (13) относит ее к классу нелинейных задач. В данном случае мы имеем задачу со свободной границей: здесь неизвестная граница определяется по неизвестному же решению и, наоборот, решение ищется в неизвестной заранее области.

Все это заставляет нас прибегнуть в поиске путей решения задачи (6)—(14) к аппарату численных методов. Так, на основе метода конечных разностей (или метода сеток) была разработана специальная методика численного решения сформулированной задачи. Согласно этой методике, окончательный вид разностной сетки определяется уже в процессе вычисления, по мере определения под-

вижной границы. Так, при последовательном рассмотрении т.н. временных слоев для каждого из них решаются две подзадачи: во-первых, исходя из распределения температуры на предыдущем слое, определяется текущее положение подвижной границы; во-вторых, с помощью соответствующей разностной схемы вычисляется распределение температуры для данного слоя. Рассмотрим подробно эти две операции, начав со второй.

Разностная схема для вычисления температуры. Вопрос об определении подвижной границы ξ будет обсужден ниже. Пока же условимся считать эту границу известной и временно исключим из рассмотрения условия (13), (14). Теперь наша задача может рассматриваться как обыкновенная задача о распространении тепла в области с подвижной (но известной) границей. Построим разностную схему для численного решения этой задачи.

В соответствии с методом конечных разностей приближенное решение задачи будем вычислять для дискретных моментов времени τ_j , $j = 0, 1, \dots$. Зададим фиксированный шаг по времени l и положим $\tau_j = j \cdot l$, $j = 0, 1, \dots$. Далее, разделим отрезок $[0, R_1]$ оси значений r на N_1 равных частей, а отрезок $[R_1, R_2]$ — на N_2 равных частей. Шаги деления обозначим, соответственно, через h_1 и h_2 . В результате этих разбиений появляются две совокупности значений r : $\{r_i = i \cdot h_1, i = 0, 1, \dots, N_1\}$ и $\{r_{N_1+i} = R_1 + i \cdot h_2, i = 1, 2, \dots, N_2\}$. На основе них образуем прямоугольную сетку

$$\Omega = \{(r_i, \tau_j), i = 0, 1, \dots, N_1 + N_2, j = 0, 1, \dots\}.$$

Из-за присутствия в задаче подвижной границы данную сетку следует модифицировать. Поскольку подзадачи определения подвижной границы и температуры решаются совместно, то корректировка сетки происходит в процессе вычисления.

Совокупность всех узлов сетки, соответствующих моменту времени τ_j , будем называть j -тым временным слоем сетки. Обозначим через ξ_j положение границы $\xi(\tau)$ в момент τ_j : $\xi_j \approx \xi(\tau_j)$, $j = 0, 1, \dots$. Очевидно, что $\xi_0 = R_2$, $R_1 \leq \xi_j \leq R_2$, $j = 1, 2, \dots$, и $\xi_0 \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots$. К моменту вычисления температуры на j -том временном слое величина ξ_j уже является известной. В соответствии с ней j -тый временной слой сетки корректируется следующим образом. Все узлы (r_i, τ_j) , для которых $r_i \geq \xi_j$, исключаются из рассмотрения; вместо

них добавляется узел (ξ_j, τ_j) , который становится последним (крайним справа) узлом j -того временного слоя. Заметим, что добавление нового узла не увеличивает погрешность вычисления, так как, очевидно, $h_{\xi_j} \leq h_{\xi_{j-1}}$, где h_{ξ_j} — расстояние между новым и предпоследним узлом слоя. Если до корректировки j -тый временной слой образовывали $N_1 + N_2$ узлов, то после нее слой насчитывает $N_1 + N_{2,j}$ узлов ($N_{2,j} \leq N_2$). Схематичный вид сетки, на которой проводится расчет температуры, представлен на рис. 4.

По мере продвижения от нижних временных слоев к верхним число узлов на слоях будет сокращаться: $N_{2,j+1} \leq N_{2,j}$, $j = 0, 1, \dots$ ($N_{2,0} = N_2$). Поэтому на самых верхних слоях возможно вырождение сетки, а именно — ситуация, когда величина $N_{2,j}$ принимает недопустимо малые значения. Чтобы этого избежать, для последних временных слоев сетки стратегию корректировки следует изменить. Зададим некоторое натуральное число N_{\min} — минимально допустимое значение величины $N_{2,j}$ (например, можно положить $N_{\min} = 5$). Если для некоторого k -того временного слоя окажется $N_{2,k} < N_{\min}$, то поступаем следующим образом. Все узлы (r_i, τ_k) , расположенные справа от прямой $r = R_1$, исключаем из рассмотрения. Далее, поделим отрезок $[R_1, \xi_k]$ на N_{\min} равных частей и образуем совокупность значений

$$\left\{ \tilde{r}_{N_1+i} = R_1 + i \frac{\xi_k - R_1}{N_{\min}}, i = 1, 2, \dots, N_{\min} \right\}.$$

Используя эту совокупность, вместо удаленных узлов введем в рассмотрение узлы (\tilde{r}_i, τ_k) ,

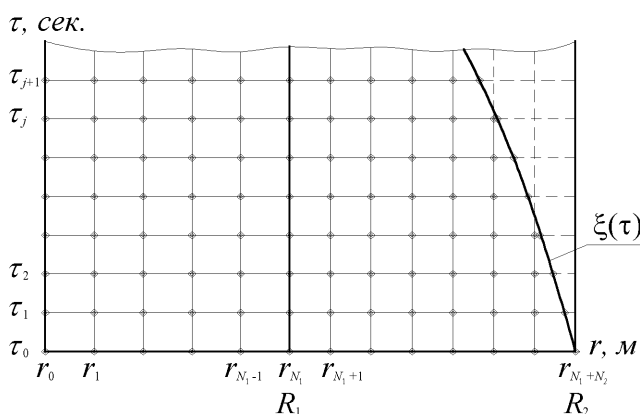


Рис. 4. Сетка разностной аппроксимации

$i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_{\min}$. Для следующих j -тых временных слоев ($j > k$) поступаем аналогично, разбивая отрезок $[R_1, \xi_j]$ на N_{\min} равных частей и образуя новые узлы. Сказанное иллюстрируется рисунком 5, где схематично изображен фрагмент верхних слоев сетки.

Для решения задачи будем использовать неявную разностную схему, что позволит проводить вычисления с довольно крупным шагом по времени. При построении этой схемы следует учесть квазилинейность уравнений (6), (7).

В дальнейшем через r_i будем обозначать значение координаты r i -того узла рассматриваемого временного слоя. Через $T_{1,i}^j, T_{2,i}^j$ обозначим приближенные значения, соответственно, T_1 и T_2 в узле сетки (r_i, τ_j) : $T_{1,i}^j \approx T_1(r_i, \tau_j)$, $T_{2,i}^j \approx T_2(r_i, \tau_j)$. Введем еще несколько обозначений:

$$b_{k,i}^j = c_k(T_{k,i}^j) \rho_k(T_{k,i}^j), k = 1, 2;$$

$$a_{k,i}^j = r_{1-\frac{1}{2}}^j \lambda_{\tau} \left(\frac{T_{k,i-1}^j + T_{k,i}^j}{2} \right), \text{ где } r_{1-\frac{1}{2}}^j = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, k = 1, 2;$$

$$\varphi_{k,i}^j = \frac{Q_k(r_i, \tau_j - 0) + Q_k(r_i, \tau_j + 0)}{2}, k = 1, 2.$$

Предположим, что для некоторого j -того временного слоя известно распределение температуры T_1, T_2 и рассмотрим $(j + 1)$ -й слой. Положим

$$\rho_0 = \frac{1}{4} h_1, \rho_i = r_i, i = 1, 2, \dots, N_1 + N_{2j+1}.$$

Аппроксимируем уравнение теплопроводности (6) следующим образом:

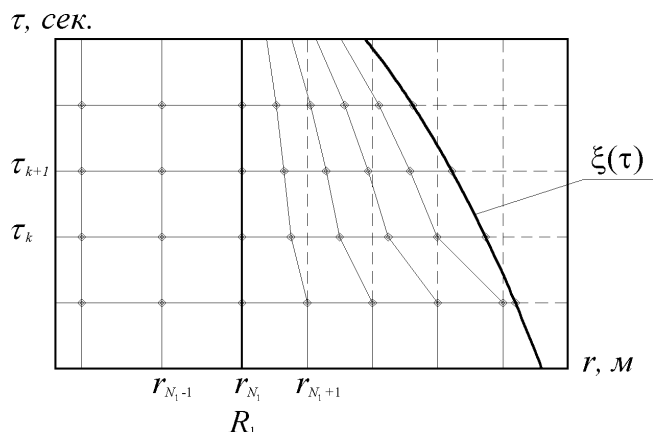


Рис. 5. Разностная сетка в верхних слоях (фрагмент)

$$\begin{aligned}
 & b_{1,i}^j \frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j}{l} = \\
 & = \frac{1}{\rho_i^2 h_1^2} \left[a_{1,i+1}^i (T_{1,i+1}^{j+1} - T_{1,i}^{j+1}) - a_{1,i}^i (T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i-1}^{j+1}) \right] + \varphi_{1,i}^{j+1}, \\
 & \qquad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1.
 \end{aligned} \tag{20}$$

При аппроксимации уравнения (7) учтем особенность расположения последнего узла временного слоя:

$$\begin{aligned}
 & b_{2,i}^j \frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{l} = \\
 & = \frac{1}{\rho_i^2 h_2^2} \left[a_{2,i+1}^i (T_{2,i+1}^{j+1} - T_{2,i}^{j+1}) - a_{2,i}^i (T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i-1}^{j+1}) \right] + \varphi_{2,i}^{j+1}, \\
 & \qquad i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_{2,j+1},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 & b_{2,i}^j \frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{l} = \\
 & = \frac{1}{\rho_i^2 \tilde{h}} \left[a_{2,i+1}^i \frac{T_{2,i+1}^{j+1} - T_{2,i}^{j+1}}{h_{\xi,j}} - a_{2,i}^i \frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i-1}^{j+1}}{h_2} \right] + \varphi_{2,i}^{j+1}, \\
 & \qquad i = N_1 + N_{2,j+1} - 1,
 \end{aligned} \tag{22}$$

где $\tilde{h} = (h_2 + h_{\xi,j})/2$.

Разностная схема (20)—(22) имеет порядок точности $O(h^2 + 1)$, где $h = \max(h_1, h_2)$. Эта схема является линейной относительно T_1^{j+1}, T_2^{j+1} . Такой выбор объясняется тем, что значения зависящих от температуры коэффициентов теплопроводности, теплоемкости и плотности мало изменяются в диапазоне температур, принимаемых телом (гранулой) в процессе сушки. Поэтому выбор нелинейной схемы, требующей применения итерационных методов для нахождения T_1^{j+1}, T_2^{j+1} , привел бы к неоправданному расходу машинного времени.

Аппроксимируем граничные условия (9)—(12). Поскольку схема (20)—(22) имеет второй порядок точности относительно h_1, h_2 , то и условия (9), (11) будем аппроксимировать со вторым порядком точности. Опустив довольно сложные промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат. Условие (9) аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{2a_{1,1}^j}{\rho_0^2 h_1^2} (T_{1,1}^{j+1} - T_{1,0}^{j+1}) - b_{1,0}^j \frac{T_{1,0}^{j+1} - T_{1,0}^j}{l} = \varphi_{1,0}^{j+1}. \tag{23}$$

Для условия (11) имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_{1,N_1}^j}{\rho_{N_1}^2} \frac{T_{1,N_1}^{j+1} - T_{1,N_1-1}^{j+1}}{h_1} + \frac{b_{1,N_1}^j h_1}{2} \frac{T_{1,N_1}^{j+1} - T_{1,N_1}^j}{l} - \frac{h_1}{2} \varphi_{1,N_1}^{j+1} = \\
 & = \frac{a_{1,N_1+1}^j}{\rho_{N_1}^2} \frac{T_{2,N_1+1}^{j+1} - T_{1,N_1}^{j+1}}{h_2} - \frac{b_{2,N_1}^j h_2}{2} \frac{T_{2,N_1}^{j+1} - T_{2,N_1}^j}{l} + \frac{h_2}{2} \varphi_{2,N_1}^{j+1}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Условия (10) и (12) аппроксимируются точно:

$$T_{1,N_1}^{j+1} = T_{2,N_1}^{j+1}, \tag{25}$$

$$T_{2,i}^{j+1} = T_{\text{суб}}, \quad i = N_1 + N_{2,j+1}. \tag{26}$$

Объединив (20)—(26), получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $T_{1,i}^{j+1}$ ($i = 0, 1, \dots, N_1$), $T_{2,i}^{j+1}$ ($i = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_{2,j+1} - 1$). Эта СЛАУ имеет трехдиагональную матрицу с диагональным преобладанием, поэтому она может быть решена методом прогонки.

Заметим, что для самых верхних временных слоев, которые модифицируются вторым способом (т. е. путем полной замены всех узлов, расположенных правее прямой $r = R_1$), реализация построенной разностной схемы связана с двумя дополнительными аспектами. Допустим, требуется вычислить температуру для $(j + 1)$ -го слоя указанной группы. Тогда присутствующие в схеме шаги h_2 и $h_{\xi,j}$ следует заменить величиной $(\xi_{j+1} - R_1)/N_{\min}$. Второй аспект заключается в том, что в полуплоскости $r > R_1$ на последних слоях сетка не является прямоугольной (см. рис. 5), что препятствует непосредственному использованию здесь нашей разностной схемы. Для решения этой проблемы через узлы рассматриваемого $(j + 1)$ -го слоя, расположенные справа от прямой $r = R_1$, проведем параллельно оси τ прямые линии. В точках пересечения этих линий с прямой $\tau = \tau_j$ вычислим путем интерполяции значений $T_{2,i}^j$ температуру T_2 . Теперь, подставив полученные значения в разностную схему вместо $T_{2,i}^j$, можно вычислить температуру для $(j + 1)$ -го слоя.

Определение подвижной границы. Прежде всего, напомним, что в нашем случае подвижная граница отождествляется с фронтом сублимации. В ходе численного решения задачи (6)—(14) были разработаны два разных способа определения положения этой границы. Первый способ основан на непосредственном использовании условия баланса энергии (13), а второй — на анализе распределе-

ния температуры в грануле. При проведении численных экспериментов было установлено, что результаты, получаемые этими двумя способами, полностью совпадают. Здесь мы изложим лишь первую, более простую методику определения подвижной границы.

Пусть для некоторого j -того временного слоя определены ξ_j и T_1^j, T_2^j . Требуется вычислить ξ_{j+1} . Для этого воспользуемся условием баланса энергии на фронте сублимации (13), переписав его для $\tau = \tau_j$ в виде

$$\frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = \frac{\lambda_2(T_{\text{суб}})}{\gamma_{\text{суб}}\rho_2(T_{\text{суб}})} \frac{\partial T_2(\xi, \tau)}{\partial r}, \tau = \tau_j.$$

Заменив в этом уравнении все производные их разностными представлениями и сделав несложные преобразования, получаем приближенную формулу для определения ξ_{j+1} :

$$\xi_{j+1} \approx \xi_j + l \frac{\lambda_2(T_{\text{суб}})}{\gamma_{\text{суб}}\rho_2(T_{\text{суб}})} \frac{T_{2,n}^j - T_{2,n-1}^j}{h_{\xi,j}}, \quad n = N_1 + N_{2,j}. \quad (27)$$

Сформулируем теперь общий алгоритм численного решения задачи (6)—(14):

Шаг 0. Присвоить $j \leftarrow 0$, $\xi_0 \leftarrow R_2$. Построить первоначальную сетку Ω и с учетом начального условия (8) задать T_1^0, T_2^0 .

Шаг 1. Определить ξ_{j+1} по формуле (27). Если $\xi_{j+1} \leq R_1$, то выход.

Шаг 2. Скорректировать $(j + 1)$ -й временной слой сетки с учетом ξ_{j+1} .

Шаг 3. С помощью разностной схемы вычислить T_1^{j+1}, T_2^{j+1} .

Шаг 4. Присвоить $j \leftarrow j + 1$ и перейти к шагу 1.

В заключение заметим, что численные данные, полученные с помощью рассмотренной модели, были подтверждены результатами лабораторных опытов, что дает основание считать предложенную в настоящей работе математическую модель адекватной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борхерт Р., Юбиц В. Техника инфракрасного нагрева. — М.Л.: Госэнергоиздат, 1963. — 278 с.
2. Гуйго Э. И., Журавская Н. К., Каухчешвили Э. И. Сублимационная сушка пищевых продуктов. — М.: Пищ. пром-сть, 1966. — 354 с.
3. Лебедев Д. П., Перельман Т. Л. Тепло- и массообмен в процессах сублимации в вакууме. — М.: Энергия, 1973. — 336 с.
4. Лыков А. В. Теория сушки. — М.: Энергия, 1968. — 471 с.
5. Фролов В. Ф. Моделирование сушки дисперсных материалов. — Л.: Химия, 1987. — 208 с.
6. Кретов И. Т., Антипов С. Т., Шахов С. В. Моделирование тепло-массообмена при вакуум-сублимационном обезвоживании термолабильных продуктов // Вестн. международ. акад. холода. — 1999. — № 1.
7. Мазур В. А., Парцхаладзе Э. Г., Ольшамовский В. С. Математическое моделирование процесса вакуум-сублимационной сушки с деструкцией гранулированных продуктов // Вестн. международ. акад. холода. — 1998. — № 2.