УДК 517.983

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2001 г. В. А. Попова

Воронежский государственный университет

Пусть в банаховом пространстве E задан линейный ограниченный оператор A. Рассмотрим задачу определения функции $u \in C^2((0,t_1],E) \cap C([0,t_1),E)$ и параметра $p \in E$ из условий

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t) + f(t) + \varphi(t)p, \qquad (1)$$

$$u(0) = u_0,\ u(t_1) = u_1,\ u'(0) = 0, \qquad (2)$$

где $f(t)$ непрерывная на $[0,t_1]$ функция со значениями в E, $\varphi(t)$ непрерывная на $[0,t_1]$ скалярная функция, $k \geq 0$.

Задача (1), (2) в случае, когда $k = 0$ и A самосопряженный неположительный оператор в гильбертовом пространстве H изучался ранее в [1]. Если $k \in [0,1) \cup (1,2]$, то задача (1), (2) исследовалась автором в [2]. В настоящей работе мы устанавливаем результаты о разрешимости задачи при любых $k \geq 0$.

Выясним, каким образом однозначная разрешимость задачи (1), (2) с переопределенными граничными условиями зависит от расположения спектра ограниченного оператора A и поведения функции $\varphi(t)$. Мы укажем условие, при котором существует элемент $p \in E$, обеспечивающий возможность нахождения решения $u(t)$ задачи (1), (2).

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_k(z) = \int_0^{t_1} S_k(\tau,z)\varphi(\tau)\,dr,$$

где для $k \neq 2n+1,\ n \in N$

$$S_k(\tau,z) = \Gamma((1+k)/2)\Gamma((3-k)/2)t_1^{1/2-k/2}\tau^{1/2+k/2} \times$$
$$\times(I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{z})I_{(1-k)/2}(t_1\sqrt{z}) - I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z})I_{(1-k)/2}(\tau\sqrt{z})),$$

для $k = 2n+1,\ n \in N$

$$S_k(\tau,z) = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!}\tau^k \times$$
$$\times\left(\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}}\left(\frac{1}{t_1}\frac{d}{dt_1}\right)^{\frac{k-1}{2}}\tilde{I}_0(t_1,\sqrt{z})I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{z}) - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau}\right)^{\frac{k-1}{2}}\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{z})I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z})\right),$$

$$S_1(\tau,z) = \tau(\tilde{I}_0,(t_1\sqrt{z})I_0(\tau\sqrt{z}) - \tilde{I}_0(\tau,\sqrt{z})I_0(t_1\sqrt{z})).$$

$I_\nu u(z)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$\tilde{I}_0(\tau,z) =$$
$$= \lim_{m\to 1}\frac{1}{1-m}\left(\Gamma((m+1)/2)\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-m}{2}}I_{(m-1)/2}(\tau\sqrt{z}) - \right.$$
$$\left. -\tau^{1-m}\Gamma((3-m)/2)\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}I_{(1-m)/2}(\tau\sqrt{z})\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-s^2)^{-1/2}\ln(\tau(1-s^2))\,\mathrm{ch}(\tau\,\mathrm{s}z)\,ds.$$

Теорема 1. Для того, чтобы задача (1), (2) при любых u_0, $u_1 \in E$, $f(t) \in C([0,t_1],E)$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора A не обращалась в нуль функция $\chi_k(z)$, то есть, чтобы

$$\chi_k(z) \neq 0,\ z \in \sigma(A). \qquad (3)$$

Доказательство. Задача (1), (2) эквивалентна (см. [3]) задаче о нахождении функции $u(t)$ и параметра p таких, что справедливы соотношения

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + \frac{1}{1-k}\times$$
$$\times\left(t^{1-k}Y_{2-k}(t)\int_0^t \tau^k Y_k(\tau)f(\tau)\,d\tau -\right.$$
$$\left. - Y_k(t)\int_0^t \tau Y_{2-k}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right)+$$
$$+\frac{1}{1-k}\left(t^{1-k}Y_{2-k}(t)\int_0^t \tau^k Y_k(\tau)\varphi(\tau)p\,d\tau -\right.$$
$$\left. - Y_k(t)\int_0^t \tau Y_{2-k}(\tau)\varphi(\tau)p\,d\tau\right), \tag{4}$$

если $k \in [0,1) \cup (1,\infty)$;

$$u(t) = Y_1(t)u_0 + \int_0^t (Z_1(t)Y_1(\tau) - Y_1(t)Z_1(\tau))\tau f(\tau)\,d\tau +$$
$$+\int_0^t (Z_1(t)Y_1(\tau) - Y_1(t)Z_1(\tau))\tau\varphi(\tau)p\,d\tau, \tag{4$'$}$$

если $k = 1$;

$$u(t_1) = u_1; \tag{5}$$

где для $k \geq 0$

$$Y_k(t) = \Gamma(k/2+1/2)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(t/2)^{2i}Ai}{i!\,\Gamma(k/2+1/2+i)} \equiv$$
$$\equiv \Gamma(k/2+1/2)\left(\frac{t\sqrt{A}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}} I_{(k-1)/2}(t\sqrt{A}),$$
$$Z_1(t) = \lim_{m\to 1}\frac{1}{1-m}(Y_m(t) - t^{1-m}Y_{2-m}(t)) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-s^2)^{-1/2}\ln(t(1-s^2))Y_0(ts)\,ds;$$

для $k > 2,\ k \neq 2n+1,\ n \in N$

$$Y_{2-k}(t) = \frac{1}{(3-k)(5-k)...(\alpha-1)}t^{k-1}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m Y_\alpha(t),$$

m — наименьшее натуральное число такое, что $\alpha = 2m + 2 - k \geq 0$;
для $k > 2,\ k = 2n+1,\ n \in N$

$$Y_{2-k}(t) = [(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!]t^{k-1}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\frac{k-1}{2}} Z_1(t).$$

Из равенств (4), (5) следует, что необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1), (2) является разрешимость при любом $q \in E$ уравнения

$$B_k p = q, \tag{6}$$

где для $k \in [0,1) \cup (1,\infty)$

$$B_k p = \int_0^{t_1}\varphi(\tau)(t_1^{1-k}\tau^k Y_{2-k}(t_1)Y_k(\tau) - \tau Y_k(t_1)Y_{2-k}(\tau))p\,d\tau,$$
$$B_1 p = \int_0^{t_1}\tau\varphi(\tau)(Z_1(t_1)Y_1(\tau) - Y_1(t_1)Z_1(\tau))p\,d\tau,$$

то есть отсутствие в спектре оператора B_k точки нуль.

Пусть U_1, U_2 такие открытые множества комплексной плоскости, что $\sigma(A) \subset U_1$ и $\sigma(A) \subset U_2$, а γ_1 и γ_2 их границы, причем $U_1 \cup \gamma_1 \subseteq U_2$. Тогда для операторов $Y_k(\tau)$, $Y_{2-k}(\tau)$, $Z_1(\tau)$ справедливы представления ([4], с. 608)

$$Y_k(\tau) = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}} I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{x})(zI-A)^{-1}\,dz,$$

если $k \geq 0$;

$$Y_{2-k}(\tau) = \frac{\Gamma(3/2-k/2)}{2\pi i}\times$$
$$\times\int_{\gamma_2}\left(\frac{\tau\sqrt{\xi}}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} I_{(1-k)/2}(\tau\sqrt{\xi})(\xi I - A)^{-1}\,d\xi,$$

если $k > 2,\ k \neq 2n+1$;

$$Y_{2-k}(\tau) = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-1)!}\times$$
$$\times\int_{\gamma_2}\tau^{k-1}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau}\right)^{\frac{k-1}{2}}\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{\xi})(\xi I - A)^{-1}\,d\xi,$$

если $k > 2,\ k = 2n+1$;

$$Z_1(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{\xi})(\xi I - A)^{-1}\,d\xi,$$

а оператор B_k можно представить в виде

$$B_k p = \frac{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(3/2-k/2)}{-4\pi^2}\int_0^{t_1}\varphi(\tau)\Big(t_1^{1-k}\tau^k\times$$
$$\times\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}}\left(\frac{t_1\sqrt{\xi}}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{z})\times$$
$$\times I_{(1-k)/2}(t_1\sqrt{\xi})(zI-A)^{-1}(\xi I - A)^{-1}p\,d\xi dz -$$
$$-\tau\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2}\left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}}\left(\frac{\tau\sqrt{\xi}}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}} I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z})\times$$
$$\times I_{(1-k)/2}(\tau\sqrt{\xi})(zI-A)^{-1}(\xi I - A)^{-1}p\,d\xi dz\Big)d\tau, \tag{7}$$

если $k \neq 2n+1$;

$$B_k p = \frac{\Gamma(k/2+1/2)}{(-1)^n 2^{n-1} 4\pi^2 (n-1)!} \int_0^{t_1} \varphi(\tau)\tau^k \times$$

$$\times \Bigg(\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}} \left(\frac{1}{t_1}\frac{d}{dt_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} \tilde{I}_0(t_1,\sqrt{\xi}) \times$$

$$\times I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{z})(\xi I - A)^{-1}(zI-A)^{-1}\,dzd\xi -$$

$$-\int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} \left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-k}{2}} \left(\frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau}\right)^{\frac{k-1}{2}} \tilde{I}_0(\tau,\sqrt{\xi}) \times$$

$$\times I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z})(\xi I - A)^{-1}(zI-A)^{-1}\,d\xi dz \Bigg) p d\tau, \quad (7')$$

если $k = 2n+1$$

Применяя в (7) и (7′) тождество Гильберта и используя интегральную формулу Коши, получим

$$B_k p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \chi_k(z)(zI-A)^{-1}p\,dz. \qquad (8)$$

Равенство (8) означает, что B_k является аналитической функцией оператора A, т.е. $B_k = \chi_k(A)$. По теореме об отображении спектра оператора ([4], с. 609) $\sigma(B_k) = \chi_k(\sigma(A))$. Таким образом, нуль не является точкой спектра оператора B_k только тогда, когда на спектре оператора A не обращается в нуль функция $\chi_k(z)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $k = 0$, то условие (3) имеет вид

$$\int_0^{t_1} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{z}(t_1-s))}{\sqrt{z}}\varphi(s)\,ds \neq 0, \ \ z\in\sigma(A),$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{z}t)}{\sqrt{z}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Замечание 2. Если $\varphi(t) = 1$ и $k \neq 2n+1$, $n \in N$, то для того, чтобы задача (1), (2) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы на спектре оператора A выполнялось условие

$$\frac{{}_0F_1(k/2+1/2, t_1^2 z/4) - 1}{z} \neq 0, \ \ z\in\sigma(A). \qquad (9)$$

В частности, если $k = 0$, то условие (9) принимает вид

$$\frac{\operatorname{ch}(t_1\sqrt{z})-1}{z} \neq 0, \ \ z\in\sigma(A)$$

или $z \neq -(2\pi n/t_1)^2$, где $\mathrm{n} \in N$.

Доказательство. Докажем сначала замечание 2 для случая, когда $k = 1$.

Действительно, функция $\chi_1(z)$ в этом случае имеет вид

$$\chi_1(z) = \tilde{I}_0(t_1,\sqrt{z})\int_0^{t_1}\tau I_0(\tau\sqrt{z})\,d\tau -$$

$$-I_0(t_1\sqrt{z})\int_0^{t_1}\tau\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{z})\,d\tau.$$

Используя интеграл 1.11.1.5 [5], найдем $\int_0^{t_1}\tau I_0(\tau\sqrt{z})\,d\tau = \frac{t_1}{\sqrt{z}}I_1(t_1\sqrt{z})$. Используя определение функции $\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{z})$ вычислим второй интеграл

$$\int_0^{t_1}\tau\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{z})\,d\tau = \lim_{m\to 1}\frac{1}{1-m}\times$$

$$\times\left(\Gamma((m+1)/2)\int_0^{t_1}\tau\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-m}{2}} I_{(m-1)/2}(\tau\sqrt{z})\,d\tau -\right.$$

$$\left. -\Gamma((3-m)/2)\int_0^{t_1}\tau^{2-m}\left(\frac{\tau\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} I_{(1-m)/2}(\tau\sqrt{z})\,d\tau\right).$$

Снова, используя интеграл 1.11.1.5 [5], получим

$$\int_0^{t_1}\tau\tilde{I}_0(\tau,\sqrt{z})\,d\tau =$$

$$= \frac{t_1}{\sqrt{z}}\lim_{m\to 1}\frac{I_{(m-3)/2}(t_1\sqrt{z}) - I_{(3-m)}(t_1\sqrt{z})}{1-m} + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$\chi_1(z) = \frac{t_1}{\sqrt{z}}\Bigg(I_1(t_1\sqrt{z})\lim_{m\to 1}\frac{1}{1-m}\times$$

$$\times\left(\Gamma((m+1)/2)\left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{1-m}{2}} I_{(m-1)/2} -\right.$$

$$\left. -t_1^{1-m}\Gamma((3-m)/2)\left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} I_{(1-m)/2}(t_1\sqrt{z})\right) -$$

$$-I_0(t_1\sqrt{z})\lim_{m\to 1}\frac{I_{(m-3)/2}(t_1\sqrt{z}) - I_{(3-m)/2}(t_1\sqrt{z})}{1-m} - \frac{I_0(t_1\sqrt{z})}{t_1\sqrt{z}}\Bigg).$$

Используя равенство $I_{-\nu}(z) = I_\nu(z)$, добавим и отнимем два раза $I_1(t_1\sqrt{z})I_0(t_1\sqrt{z})$. Тогда получим

$$\chi_1(z) = \frac{t_1}{\sqrt{z}} \lim_{m\to 1} \frac{I_1(t_1\sqrt{z})(I_{(m-1)/2}(t_1\sqrt{z}) - I_0(t_1\sqrt{z}))}{1-m} +$$

$$+\lim_{m\to 1} \frac{I_0(t_1\sqrt{z})(I_{-1}(t_1\sqrt{z}) - I_{(m-3)/2}(t_1\sqrt{z}))}{1-m} +$$

$$+\lim_{m\to 1} \frac{\Gamma(3/2 - m/2)t_1^{1-m}\left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} I_1(t_1\sqrt{z})}{1-m} \times$$

$$\times (I_0(t_1\sqrt{z}) - I_{(1-m)/2}(t_1\sqrt{z})) +$$

$$+\lim_{m\to 1} \frac{\Gamma(3/2 - m/2)t_1^{1-m}\left(\frac{t_1\sqrt{z}}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} I_0(t_1\sqrt{z})}{1-m} \times$$

$$\left.\times (I_{(3-m)/2}(t_1\sqrt{z}) - I_1(t_1\sqrt{z})) - \frac{I_0(t_1\sqrt{z})}{t_1\sqrt{z}}\right).$$

Далее используя формулу

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z),$$

а также правило Лопиталя, вычисляем пределы и получаем

$$\chi_1(z) = \frac{t_1}{\sqrt{z}} \left(\frac{I_0^2(t_1\sqrt{z})}{t_1\sqrt{z}} - \frac{I_0(t_1\sqrt{z})}{t_1\sqrt{z}} \right) =$$

$$= \frac{I_0(t_1\sqrt{z})}{t_1\sqrt{z}} ({}_0F_1(1, t_1^2 z/4) - 1).$$

Так по условию (3) $\chi_1(z) \neq 0$, то

$$\frac{I_0(t_1\sqrt{z})}{z} ({}_0F_1(1, t_1^2 z/4) - 1) \neq 0,$$

или

$$\frac{{}_0F_1(1, t_1^2 z/4) - 1}{z} \neq 0.$$

Таким образом, для случая, когда $k = 1$, замечание 2 доказано.

Докажем его теперь для $k \in [0,1) \cup (1,\infty)$, $k \neq 3,5,\ldots$. Функция $\chi_k(z)$ в этом случае будет выглядеть так:

$$\chi_k(z) = \Gamma(1/2 + k/2)\Gamma(3/2 - k/2) t_1^{\frac{1-k}{2}} \times$$

$$\times \left(I_{(1-k)/2}(t_1\sqrt{z}) \int_0^{t_1} \tau^{\frac{1+k}{2}} I_{(k-1)/2}(\tau\sqrt{z})\, d\tau - \right.$$

$$\left. - I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z}) \int_0^{t_1} \tau^{\frac{1+k}{2}} I_{(1-k)/2}(\tau\sqrt{z})\, d\tau \right).$$

Используя формулу 1.11.1.5 [5] для вычисления интегралов, получим

$$\chi_k(z) = \Gamma(1/2 + k/2)\Gamma(3/2 - k/2) \frac{t_1}{\sqrt{z}} \times$$

$$\times (I_{(1-k)/2}(t_1\sqrt{z}) I_{(k+1)/2}(t_1\sqrt{z}) -$$

$$- I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z}) I_{-(k+1)/2}(t_1\sqrt{z})) +$$

$$+ \frac{t_1^{\frac{1-k}{2}} (\sqrt{z})^{-\frac{3+k}{2}} I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z})}{2^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma(1/2 - k/2)}.$$

Применяя теперь известные формулы

$$I_\nu(z) I_{1-\nu}(z) - I_{-\nu}(z) I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z},$$

$$\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu) = -\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)},$$

получим

$$\chi_k(z) = \Gamma(1/2 + k/2)\Gamma(3/2 - k/2) \frac{2\sin\left(\frac{k-1}{2}\pi\right)}{\pi z} \times$$

$$\times \left(1 - \left(\frac{(t_1\sqrt{z})}{2} \right)^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(1/2 + k/2) I_{(k-1)/2}(t_1\sqrt{z}) \right)$$

или

$$\chi_k(z) = \Gamma(1/2 + k/2)\Gamma(3/2 - k/2) \frac{2\sin\left(\frac{1-k}{2}\pi\right)}{\pi z} \times$$

$$\times ({}_0F_1(k/2 + 1/2, t_1^2 z/4) - 1).$$

Так как по условию (3) $\chi_k(z) \neq 0$, $z \in \sigma(A)$, то

$$\Gamma(1/2 + k/2)\Gamma(3/2 - k/2) \frac{2\sin\left(\frac{1-k}{2}\pi\right)}{\pi z} \times$$

$$\times ({}_0F_1(k/2 + 1/2, t_1^2 z/4) - 1) \neq 0,$$

или

$$\frac{{}_0F_1(k/2 + 1/2, t_1^2 z/4) - 1}{z} \neq 0.$$

Таким образом, замечание 2 доказано для всех $k \geq 0$, $k \neq 3,5,\ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орловский Д. Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения //Диф. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 9. — С. 1614—1621.

2. Хондо В. А. Задача определения параметра абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу с ограниченным оператором //Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — Воронеж, 2000. — С. 59—64.

3. Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 6. — С. 55—56.

4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория — М.: Иностр. лит., — 1962. —895 с.

5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.:Наука, — 1983. — 750 с.