УДК 517.983

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ЛЕЖАНДРА

© 2001 г. М. А. Латынина

Воронежский государственный университет

Пусть E — банахово пространство, A — линейный замкнутый оператор с плотной в E областью определения $D(A)$.

Изучается задача

$$B_k u(t) \equiv u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим заданную на E, коммутирующую с A операторную функцию $Y_k(t)$ такую, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $Y_k(t)u_0$ является решением задачи (1), (2).

Следуя [1], функцию $Y_k(t)$ назовем операторной функцией Бесселя (ОФБ), для нее справедлива оценка

$$\|Y_k(t)\| \le M\exp(wt). \tag{3}$$

Обозначим через G_k — множество операторов A, для которых задача (1), (2) равномерно корректна.

Используя формулу сдвига по параметру [1], решение уравнения

$$B_m u(t) = Au(t),\ m > k \ge 0 \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию (2), можно записать в виде

$$Y_m(t)u_0 = \frac{2}{B((m-k)/2,(k+1)/2)}\times \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k Y_k(ts)u_0\,ds. \tag{5}$$

где $B(.,.)$ — бетта-функция Эйлера.

Основываясь на представлении (5), исследуем, как изменяются дифференциальные свойства функции $Y_m(t)u_0$ с ростом параметра m.

В дальнейшем будут исследованы также дифференциальные свойства операторной функции Лежандра, являющейся разрешающим оператором задачи Коши для другого сингулярного уравнения.

Теорема 1. Пусть $A \in G_k$, $u_0 \in E$, $m > k \ge 0$, тогда функция $Y_k(t)u_0$, являющаяся решением задачи (1), (2), будет $n = \left[\frac{m-k}{2}\right]$ раз непрерывно дифференцируема при $t > 0$, причем справедлива оценка

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}Y_m(t)u_0\right\| \le Mt^{-j}\exp(wt)\|u_0\|,\ j = 0,1,\dots,n. \tag{6}$$

Доказательство. После n-кратного интегрирования по частям формулы (5), получим

$$Y_m(t)u_0 = \frac{(-1)^n 2t^{-n}}{(n-1)!\,B((m-k)/2,(k+1)/2)}\times \int_0^1 \frac{d^n}{ds^n}[(1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k]\int_0^s\int_0^{s_{n-1}}..\int_0^{s_1} Y_k(t\tau)u_0\,d\tau ds_1..ds.$$

Сворачивая n-кратный интеграл и делая замену переменной $x = t\tau$, будем иметь

$$Y_m(t)u_0 = \frac{(-1)^n 2t^{-n}}{(n-1)!\,B((m-k)/2,(k+1)/2)}\times \int_0^1 \frac{d^n}{ds^n}[(1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k]\int_0^{ts}(st-x)^{n-1}Y_k(x)u_0\,dxds. \tag{7}$$

Отметим, что при $\{(m-k)/2\} > 0$ сходимость интеграла обеспечена условием $(m-k)/2 - n > 0$, а при $\{(m-k)/2\} = 0$ в точке $s = 1$ рассматриваемый интеграл особенности не имеет.

Из представления (7) вытекает n-кратная непрерывная дифференцируемость функции $Y_m(t)u_0$.

Переходим к установлению оценки (6). Воспользовавшись формулой бинома Ньютона и оценкой (3) для операторной функции $Y_m(t)$, будем иметь

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} Y_m(t)u_0 \right\| \le$$

$$\le M_1 t^{-j} \exp(wt) \|u_0\| \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1-n} s^{k+2n} ds +$$

$$+M_2 t^{-j} \exp(wt) \|u_0\| \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-n} s^{k+2n-1} ds + \dots$$

$$\dots + M_n t^{-j} \exp(wt) \|u_0\| \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^{k-1} ds \le$$

$$\le M_1 t^{-j} \exp(wt) \|u_0\| C_1 + M_2 t^{-j} \exp(wt) \|u_0\| C_2 + \dots$$

$$+M_n t^{-j} \exp(wt) \|u_0\| C_n \le M t^{-j} \exp(wt) \|u_0\|,$$

где $M = \max\{C_1M_1, C_2M_2, \dots C_nM_n\}$, и тем самым теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $A \in G_k$, $m > k$, $r \in N$, тогда ОФБ $Y_m(t)$ переводит область определения $D(A^r)$ в $D(A^{r+(m-k)/4})$.

Доказательство. Согласно теореме 1 функцию $Y_m(t)u_0$ можно непрерывно дифференцировать по $t > 0$ $[(m-k)/2]$ раз. Пусть $0 \le (m-k)/4 < 1$, т.е. $[(m-k)/4] = 0$. Поскольку A и $Y_m(t)$ коммутируют, то $Y_m(t) : D(A^r) \to D(A^r)$. При этом в силу (3) и (5) справедлива оценка

$$\|A^r Y_m(t)u_0\| \le M \exp(wt) \|A^r u_0\|.$$

Пусть теперь $(m-k)/4 \ge 1$. Рассмотрим сначала случай $r = 0$, т.е. докажем, что $Y_m(t) : E \to D(A^{[(m-k)/4]})$.

Как доказано в [1], если $A \in G_k$, то оператор A при $\lambda > w$ имеет резольвенту $R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Поэтому для $u_0 D(A^{(m-k)/4})$, определяемую равенством (5) функцию, можно записать в виде

$$\frac{1}{2} B((m-k)/2,(k+1)/2) Y_m(t)u_0 =$$

$$= \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts) u_0 ds =$$

$$= \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts)(\lambda I - A) R(\lambda,A) u_0 ds =$$

$$= \lambda \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 ds -$$

$$-R(\lambda,A) \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k A Y_k(ts) u_0 ds =$$

$$= \lambda \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 ds -$$

$$-R(\lambda,A) \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k \left(Y_k''(ts)u_0 + \frac{k}{ts} Y_k'(ts)u_0 \right) ds =$$

$$= \lambda \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 ds -$$

$$-R(\lambda,A) \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k''(ts) u_0 ds -$$

$$-\frac{k}{ts} R(\lambda,A) \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^{k-1} Y_k'(ts) u_0 ds. \tag{8}$$

Проинтегрировав по частям два последних интеграла, будем иметь

$$\frac{1}{2} B((m-k)/2,(k+1)/2) Y_m(t)u_0 =$$

$$= \lambda \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 ds -$$

$$-\frac{1}{t} \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 \, ds +$$

$$+\frac{k}{t^2} \int_0^1 \frac{d^2}{ds} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 \, ds.$$

В полученном представлении заменим u_0 на выражение $R(\lambda,A)(\lambda I - A)u_0$, и проделаем еще раз описанную выше процедуру. Выполним это на примере одного слагаемого, например,

$$\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) R(\lambda,A) u_0 ds =$$

$$= \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k \times$$

$$\times (ts) R^2(\lambda,A)(\lambda I - A) u_0 ds =$$

$$= \lambda R^2(\lambda) \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) u_0 ds -$$

$$-R^2(\lambda,A) \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) A u_0 ds =$$

$$= \lambda R^2(\lambda,A) \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) u_0 ds -$$

$$-R^2(\lambda,A) \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) A Y_k(ts) u_0 ds =$$

$$= \lambda R^2(\lambda,A) \int_0^1 \frac{d^2}{ds^2} ((1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k) Y_k(ts) u_0 ds -$$

$$-R^2(\lambda, A)\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)\times$$

$$\times\left(Y_k''(ts)Au_0 + \frac{k}{ts}Y_k'(ts)u_0\right)ds =$$

$$= \lambda R^2(\lambda, A)\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)Y_k(ts)u_0 ds -$$

$$-R^2(\lambda, A)\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)Y_k''(ts)u_0 ds -$$

$$-\frac{k}{t}R^2(\lambda, A)\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)Y_k'(ts)u_0 ds.$$

Для последних двух слагаемых применим формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)Y_k(ts)R(\lambda, A)u_0 =$$

$$= \lambda R^2(\lambda, A)\int_0^1 \frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)Y_k(ts)u_0 ds -$$

$$-\frac{R^2(\lambda, A)}{t^2}\int_0^1 \frac{d^4}{ds^4}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)Y_k(ts)u_0 ds +$$

$$+\frac{k}{t^2}R^2(\lambda, A)\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2}{ds^2}((1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^k)s^{-1}\right)Y_k(ts)u_0 ds.$$

Аналогично преобразуются остальные слагаемые. Проделав подобное $[(m-k)/4]$ раз, получим

$$Y_m(t)u_0 = R^{[(m-k)/4]}(\lambda)K_\lambda(t)u_0, \qquad (9)$$

где $K_\lambda(t)$ — ограниченный оператор.

Т.к. $D(A^{[(m-k)/4]})$ плотно в E, то равенство (9) справедливо и на E, следовательно, $Y_m(t) : E \to D(A^{[(m-k)/4]})$.

Пусть теперь $r > 0$, $u_0 \in D(A^r)$. Докажем, что в этом случае

$$Y_m(t) : D(A^r) \to D(A^{[(m-k)/4]}).$$

Оператор $Y_m(t)u_0$ можно представить в виде $Y_m(t)u_0 = Y_m(t)R^r(\lambda)(\lambda I - A)^r u_0$. Обозначим $y = (\lambda I - A)^r u_0$, $y \in E$, тогда, по доказанному выше, $Y_m(t)u_0 = Y_m(t)R^r(\lambda)y = R^{r+[(m-k)/4]}(\lambda)K_\lambda(t)y$, а значит

$$Y_m(t) : D(A^r) \to D(A^{r+[(m-k)/4]}).$$

Теорема доказана.

Изучим теперь дифференциальные свойства решения следующего уравнения

$$L_m u \equiv u''(t) + \gamma m \operatorname{cth}\gamma t u'(t) + \left(\frac{\gamma m}{2}\right)^2 u(t) = Au(t),$$

$$t > 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим заданную на E, коммутирующую с A операторную функцию $P_m^\gamma(t)$ такую, что для любого $u_0 \in D(A)$ функция $P_m^\gamma(t)u_0$ является решением задачи (10), (2).

Следуя [2], функцию $P_m^\gamma(t)$ назовем операторной функцией Лежандра (ОФЛ), для нее справедлива оценка

$$\|P_m^\gamma(t)u_0\| \le M\exp(wt). \qquad (11)$$

Обозначим P_m^γ — множество операторов A, для которых задача (10), (2) равномерно корректна.

Следует заметить [2, 3], что $G_k^\gamma = G_k$.

Определим произвольную положительную степень p оператора $1/t\ d/dt$ следующим образом

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^p f(t) = \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{[p]+1}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{\{p\}-1} f(t), \quad (12)$$

где отрицательная дробная степень может быть вычислена по формуле

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{-\alpha} f(t) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t^2-\tau^2)^{\alpha-1}\tau f(\tau)d\tau,\ a > 0. \quad (13)$$

Пусть $A \in G_m$. Тогда, если $Y_m(t)u_0$ имеет производные до нужного порядка, то решение задачи (10), (2) можно записать в виде (см. [2])

$$P_m^\gamma(t)u_0 = \frac{2^{m/2}}{B(m/2, 1/2)(m-1)!!}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{1-m}\times$$

$$\times\int_0^t \left(\frac{\operatorname{ch}\gamma t - \operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\right)^{m/2-1} y\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{m/2} y^{m-1}Y_m(y)u_0 dy.$$

$$(14)$$

Теорема 3. Пусть $A \in G_k^\gamma$,\$ $u_0 \in E$, $m > k \ge 0$, тогда ОФЛ $P_m^\gamma(t)u_0$, будет $n = [(m-k)/2]$ раз непрерывно дифференцируема при $t > 0$, причем справедлива оценка

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}P_m^\gamma(t)u_0\right\| \le Mt^{-j}\exp^{wt}\|u_0\|,\ j = 0,1,\dots n. \quad (15)$$

Доказательство. Приведем доказательство для случая $\left\{\frac{m}{2}\right\} > 0$, $\left\{\frac{k}{2}\right\} > 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Определяемую равенством (14) функцию $P_m^\gamma(t)u_0$ после интегрирования по частям запишем в виде

$$P_m^\gamma(t)m_0 = \frac{2^{m/2}(-1)^q}{B(m/2, 1/2)(m-1)!!}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{1-m}\times$$

$$\times\int_0^t y\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^q\left(\frac{\operatorname{ch}\gamma t-\operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\right)^{m/2-1}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left\{\frac{m}{2}\right\}-1} y^{m-1}\mathrm{Y}_m(y)u_0dy, \tag{16}$$

где $q = [m/2] - [(m - k)/2] + 1$.

Сходимость интеграла в (16) обеспечена условием $m/2 - q > 0$. Из этого представления и теоремы 1 вытекает $[(m - k)/2]$-кратная дифференцируемость функции $P^g_m(t)u_0$. Установим оценку (15).

Пусть $j \le [(m - k)/2]$. Рассмотрим $d^jP^g_m(t)u_0/dt^j$. Используя формулу (16) и формулу бинома Ньютона, оценим норму производной

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}P^\gamma_m(t)m_0\right\| = C_1\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right|^{1-m-j}\left|\operatorname{ch}^j\gamma t\right|\times$$
$$\times\int_0^t\left\|\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^q\left(\frac{\operatorname{ch}\gamma t-\operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left\{\frac{m}{2}\right\}-1}y^{m-1}\mathrm{Y}_m(y)u_0dy\right\| + \ldots + C_2\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right|^{-m-j}\times$$
$$\times\left|\operatorname{ch}^{j-1}\gamma t\right|\int_0^t\left\|\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^q\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{ch}\gamma t-\operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left[\frac{m}{2}\right]-q}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left\{\frac{m}{2}\right\}-1}y^{m-1}\mathrm{Y}_m(y)u_0dy\right\| + \ldots$$
$$+C_j\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right|^{1-m}\int_0^t\left\|\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^q\frac{d^j}{dt^j}\left(\frac{\operatorname{ch}\gamma t-\operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left\{\frac{m}{2}\right\}-1}y^{m-1}\mathrm{Y}_m(y)u_0dy\right\|.$$

В полученном представлении рассмотрим первое слагаемое, которое и определяет поведение производной при $t\to 0$. В силу (11) получим

$$C_1\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right|^{1-m-j}\left|\operatorname{ch}^j\gamma t\right|\int_0^t\left\|\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^q\left(\frac{\operatorname{ch}\gamma t-\operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left[\frac{m}{2}\right]-q}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\right)^{\left\{\frac{m}{2}\right\}-1}y^{m-1}\mathrm{Y}_m(y)u_0dy\right\|\le$$
$$\le C\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right|^{-j}\left|\operatorname{ch}^j\gamma t\right|\left\|P^\gamma_m(t)u_0\right\|\le Ct^{-j}\exp(wt)\left\|u_0\right\|.$$

Для остальных слагаемых справедлива такая же оценка, поэтому неравенство (15) установлено и теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $A \in G^\gamma_k$, $m > k$, $r \in N$, тогда ОФЛ $P^\gamma_m(t)$ переводит область определения $D(A^r)$ в $D(A^{r+(m-k)/4})$.

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 2 и представления (14).

В работе [2] установлено, что если $A \in G^\gamma_k$ при некотором $k > 0$ и $m \ne 1$, $f(t) \in D(A^n)$, $\operatorname{sh}^m\gamma t\, f(t)$ и $\operatorname{sh}^m\gamma t\, A^nf(t) \in C([0,\infty),E)$ для достаточно большого n, то функция

$$u(t)=\frac{1}{1-m}\left(\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{1-m}P^\gamma_{2-m}(t)\int_0^t\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma\tau}{\gamma}\right)^m P^\gamma_m(\tau)d\tau-\right.$$
$$\left.-P^\gamma_m(t)\int_0^t\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma\tau}{\gamma}\right)P^\gamma_{2-m}(\tau)f(\tau)d\tau\right), \tag{17}$$

является единственным решением уравнения

$$L_mu = Au(t) + f(t), \tag{18}$$

удовлетворяющим условиям

$$u(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^m u'(t)=0. \tag{19}$$

Отметим, что, если $2 - m < k$, то оператор $P^\gamma_{2-m}(\mathrm{t})$ представим в виде (см. [2])

$$P^\gamma_{2-m}(t)=((q-1)(q-2)\ldots(m+3))^{-1}\times$$
$$\times\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{m-1}\left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma t}\frac{d}{dt}\right)^{N_0}\left(\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{q-1}P^\gamma_q(t)\right), \tag{20}$$

где N_0 — наименьшее натуральное число, такое, что $q = 2N_0 + 2 - m \ge k$. Используя теорему 4, уточним вопрос о принадлежности $f(t)$ области определения некоторой степени оператора A, т.е. укажем конкретное n, позволяющее использовать формулу (17).

Теорема 5. Пусть $n = [N_0/2] + 2 -[(m - k)/4]$, если $2 - m < k$ и $n = 1$, если $2 - m \ge k$. Тогда, определяемая формулой (17) функция $u(t)$, является единственным решением задачи (18), (19).

Доказательство. Выясним, какому множеству принадлежит функция $u(t)$. Если $m \geq k$, то по теореме 4

$$P_m^\gamma(t) : D(A^r) \to D(A^{r+(m-k)/4}),\ r \in N.$$

Пусть $f(\tau) \in D(A^r)$, тогда $P_m^\gamma(t)f(\tau) \in D(A^{r+(m-k)/4})$. Применим теперь оператор $P_{2-m}^\gamma(t)$, рассмотрев при этом два случая. Если $2 - m \geq k$, то $P_{2-m}^\gamma(t)P_m^\gamma(\tau)f(\tau) \in D(A^{r+[(m-k)/4]+[(2-m-k)/4]})$. Т.к. $[(2-m-k)/4] = [(m-k)/4]$, то $P_{2-m}^\gamma(t)P_{2-m}^\gamma(\tau)f(\tau) \in D(A^r)$ и чтобы $u(t) \in D(A)$ достаточно взять $r = 1$. Если $2-m < k$, то оператор $P_{2-m}^\gamma(t)$ представим в виде (20), поэтому

$$P_{2-m}^\gamma(t)P_m^\gamma(\tau)f(\tau) = ((q-1)(q-2)...(m+3))^{-1} \times$$
$$\times\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{m-1}\left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma t}\frac{d}{dt}\right)^{N_0}\left(\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^{q-1}P_q^\gamma(t)P_m^\gamma(\tau)f(\tau)\right),$$

тогда,

$$P_q^\gamma(t)P_m^\gamma(\tau)f(\tau) : D(A^{r+[(m-k)/4]}) \to D(A^{r+[(m-k)/4]}),$$

$$\frac{d^{N_0}}{dt^{N_0}}P_q^\gamma(t)P_m^\gamma(\tau)f(\tau) \in D(A^{r+[(m-k)/4]-[N_0/2]-1}).$$

Таким образом, чтобы $u(t) \in D(A)$ достаточно взять $r = [N_0/2] + 2 - [(m - k)/4]$, т.е. $f(t) \in D(A^{[N_0/2]+2-[(m-k)/4]})$. Т.к. $P_m^\gamma(t)$ и $P_m^\gamma(\tau)$ коммутируют на E, то доказательство для второго слагаемого в представлении функции $u(t)$ проводится аналогично.

В работе [4] установлено, что если $A \in G_k^\gamma$ при некотором $k > 0$ и $m \neq 1$, $f(t) \in D(A^n)$, $t^m f(t)$ и $t^m A^n f(t) \in C([0,\infty),E)$ для достаточно большого n, то функция

$$u(t) = \frac{1}{1-m}\left(t^{1-m}Y_{2-m}(t)\int_0^t \tau^m Y_m(\tau)f(\tau)\,d\tau - \right.$$
$$\left. - Y_m(t)\int_0^t \tau^m Y_{2-m}(\tau)f(\tau)\,d\tau\right), \tag{21}$$

является единственным решением уравнения

$$B_m u(t) = Au(t) + f(t), \tag{22}$$

удовлетворяющим условиям

$$u(0) = 0,\ \lim_{t\to\infty} t^m u'(t) = 0. \tag{23}$$

Отметим, что, если $2 - m < k$, то оператор $Y_{2-m}(t)$ представим в виде (см. [4])

$$Y_{2-m}(t) =$$
$$= ((q-1)(q-2)...(m+3))^{-1}t^{m-1}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{N_0}(t^{q-1}Y_q(t)), \tag{24}$$

где N_0 — наименьшее натуральное число, такое, что $q = 2N_0 + 2 - m \geq k$.

Используя теорему 2 уточним вопрос о принадлежности $f(t)$ области определения некоторой степени оператора A, т.е. укажем конкретное n, позволяющее использовать формулу (21).

Аналогично теореме 5 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $n = [N_0/2] + 2 - [(m - k)/4]$, если $2 - m < k$ и $n = 1$, если $2 - m \geq k$ тогда, определяемая формулой (21) функция $u(t)$, является единственным решением задачи (22), (23).

С л е д с т в и е. В случае $k = 0$ число n, участвующее в формулировке теоремы 5 и теоремы 6 удовлетворяет неравенству $n \geq 2$.

Действительно, из теоремы 5 следует

$$n \leq \max\{1,[N_0/2] + 2 - [m/4]\} \leq 2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя //Докл. АН. — 1997. — Т. 352, № 5. — С. 587—589.

2. Глушак А. В. Операторная функция Бесселя и стабилизация решений дифференциальных уравнений.: Учебн. пособие. — Воронеж: ВГТУ, 1997.

3. Глушак А. В. Об абстрактном уравнении Лежандра// Конференция по функциональному анализу и математической физике. — Воронеж, 1977. — С. 22.

4. Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 6. — С. 55—56.