ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 2

УДК 514.7+514.8+531.1

ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2001 г. А. В. Крутов

Воронежский государственный университет

Через посредство теоремы о телесном угле [1, 2], а также с использованием кинематического способа классификации кривых по сложности [3] выявлен смысл и возможность применения в теоретической механике понятия геодезического параллельного перенесения, на взаимосвязь теоремы с которым указывалось в [1], применительно к задачам навигации. На существование проблемы установления этого смысла обращено внимание в [4].

Эффективность использования кинематических понятий (угловой скорости, в частности), в различных областях, в т.ч. в развитии положений дифференциальной геометрии с последующим их привлечением для описания движения (возвращением в кинематику), связана с тем, что многообразие положений тела, в отличие от точки, не ограничивается рамками евклидова пространства [2].

В каждой точке натурально s-параметризованной или произвольно p-параметризованной кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(p(s))$ определяется последовательность $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,n},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n})$ базисов

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = A_{n\,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{1n},\ \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,n},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n}),$$

$$A_{nn-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\alpha_n & \sin\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

$$\cos\alpha_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n-2}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2\,n-2})(\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n-1}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2\,n-1}),$$

$$\sin\alpha_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{3n}\boldsymbol{\varepsilon}_{2n-1}) = \qquad (2)$$

$$= ((\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n-2}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2\,n-2})(\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n-1}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2\,n-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n-1});$$

$$\alpha_n = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n}\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,n-1})}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n}\boldsymbol{\varepsilon}_{3\,n-1})},$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2i} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2i}/|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2i}| = (d\boldsymbol{\varepsilon}_{2i}/dp)/|d\boldsymbol{\varepsilon}_{2i}/dp|.$$

Первым ортом следующего базиса берется второй орт предыдущего, вторым — орт производной по дуге данной кривой от первого, а третьим — векторное произведение первых двух.

Кинематический смысл базисов последовательности в том, что третий орт есть нормированная угловая скорость первого орта своего, данного базиса, или нормированная угловая скорость второго орта или всего самого предыдущего базиса. Кроме того, каждый последующий базис последовательности, построенный таким образом, является базисом Френе эвольвенты и индикатрисы касательных той кривой, базисом Френе которой является предыдущий базис (эволюты и индикаты) [5, 3, 6].

Среди кривых, для которых базисом Френе является предыдущий базис по отношению к базису Френе индикатрисы касательных данной кривой находится, во-первых, сама данная кривая (индиката), а во-вторых, некоторая сферическая кривая, которую называем сферической индикатой по отношению к сферической индикатрисе данной кривой. Индикатрисы и индикаты могут быть многократными.

Приведенный алгоритм построения базисов допускает его формальное обобщение на базисы с целыми номерами [3], чем мы для удобства изложения воспользуемся в дальнейшем.

Применим эту последовательность базисов к анализу движения твердого тела с неподвижной точкой. В частности, рассмотрим теорему о телесном угле [1, 2], которая гласит, что полный угол, на который поворачивается тело около вектора $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\omega}$, жестко связанного с телом, когда конец этого вектора описывает замкнутый контур-траекторию, равен телесному углу, охватываемому этим контуром. Эта теорема может использоваться и для незамкнутого контура, если его формально замкнуть отрезками геодезических [4].

Обратимся к взаимосвязи данной теоремы с понятием геодезического параллельного перенесения. Рассматриваемая далее геометрическая модель движения твердого тела с неподвижной точкой на основе приведенной выше последовательности базисов позволяет установить, с параллельным перенесением какого именно вектора связана эта теорема, доказать ее и с помощью теоремы Гаусса—Боне вычислить угол поворота тела.

Пусть, как в условиях теоремы о телесном угле [4], конец второго орта −2-го базиса (или первого орта −1-го базиса, орта $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}_{2\,-2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-1}$ описывает некоторую кривую-траекторию. Далее мы увидим, что этот 2-й базис можно считать сопутствующим для тела с неподвижной точкой, конц единичного отрезка которого (перпендикулярного угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и определяемого вектором $\boldsymbol{\xi}$, проведенным из неподвижной точки) описывает данную кривую-траекторию. Рассмотрим характеристики этой траектории.

Из формулы Эйлера для скоростей точек тела получим, если принять во внимание существование зависимости дуги s траектории от времени

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\xi} = -(\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\tau}),\ \boldsymbol{r}'(s) = -\boldsymbol{\omega}^0 \times \tau - k\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\nu},$$
$$(\boldsymbol{\omega}^0\boldsymbol{\tau}) = 0,$$
$$\boldsymbol{\nu} = \rho\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}^0)\boldsymbol{\omega}^0.$$

Обозначим $(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}^0)\boldsymbol{\omega}^0 = \sin\alpha_0$, получим для радиуса кривизны траектории $\rho = k^{-1} = \cos\alpha_0$. Отсюда следует, что базис Френе траектории расположен и является по отношению к правому базису $(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\omega}^0)$ −1-м базисом последовательности базисов для траектории, т.е. базисом Френе 1-й индикатрисы касательных траектории (или 1-й индикаты ее индикатрисы касательных)

$$(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\tau},\ \boldsymbol{\omega}^0) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-1},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2\,-1},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3\,-1}) = (\boldsymbol{\tau}_{-1},\ \boldsymbol{\nu}_{-1},\ \boldsymbol{\beta}_{-1}).$$

При этом считаем заданными первый $\boldsymbol{\xi}$ и третий $\boldsymbol{\omega}^0$ орты этого базиса; второй, дополняющий тройку до правой, однозначно определяется первым и третьим: $\boldsymbol{\varepsilon}_{2\text{-}1} = \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau}$.

Вектор $\boldsymbol{\omega}^0$ есть орт угловой скорости −2-го базиса $(\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2},\ \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3\,-2})$ который можно считать теперь сопутствующим для тела; угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела есть угловая скорость этого −2-го базиса, как базиса Френе 2-й индикатрисы траектории (2-й сферической индикаты 1-й индикатрисы касательных траектории), а $\boldsymbol{\xi}$ — второй орт сопутствующего базиса тела есть также орт главной нормали этой 2-й индикатрисы.

Отметим, что вообще, в качестве параллельно геодезически переносимого вдоль данной кривой на поверхности могут быть взяты векторы (или векторное поле), обладающие определенным свойством: эти векторы должны существовать во всех точках данной обходимой при переносе кривой на поверхности и лежать при этом в касательной плоскости в соответствующих точках поверхности. Необходимым и достаточным условием того, чтобы вектор был параллельно переносимым, является коллинеарность нормали поверхности дифференциала этого вектора [7, стр. 230]. В нашем случае вектор $\boldsymbol{\xi}$, ортогональный $\boldsymbol{\omega}$, направлен по нормали к сфере с центром в неподвижной точке и, следовательно, вектор, производной (возможно нормированной) которого он является, может быть параллельно переносимым по сфере вдоль замкнутой кривой-контура, описываемого концом вектора $\boldsymbol{\xi}$. Одним из таких векторов в соответствии со свойствами ортов последовательных базисов кривой-контура является вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2}$. Этот вектор есть первый орт 2-го базиса последовательности по отношению к базису Френе траектории (орт касательной 2-й эволюты траектории или второй сферической индикаты ее касательных); он же является одним из ортов сопутствующего базиса тела при соответствующем выборе такового или, по крайней мере, совпадает с последним в рассматриваемом положении; вторым ортом сопутствующего базиса тела является вектор $\boldsymbol{\xi}$, он же — орт главной нормали 2-й индикатрисы касательной траектории (или второй ее эволюты).

Таким образом, параллельно переносимый геодезически вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2}$ является ортом касательной 2-ой эвольвенты или второй эволюты или 2-ой сферической индикаты первой индикатрисы касательных траектории конца отрезка $\boldsymbol{\xi}$ твердого тела, ортогональнального его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Данная структура ортов сопутствующего базиса, очевидно, является необходимым и достаточным условием того, чтобы орт $\boldsymbol{\xi}$ этого базиса постоянно был ортогонален вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела.

При параллельном геодезическом перенесении вектора по поверхности вдоль замкнутой кривой этот вектор повернется в касательной плоскости так, что его угол с касательной контура получит некоторое приращение $\Delta\psi = -\oint k_g ds$. В этом один из смыслов параллельного перенесения, а также интегральной геодезической кривизны. Еще один смысл в том, что полный поворот вектора в касательной плоскости при параллельном перенесении по поверхности вдоль замкнутого контура оказывается равным полной интегральной кривизне куска поверхности, охватываемого этим контуром, или соответствующему телесному углу Θ на гауссовой изображающей единичной сфере, вырезаемому ортом нормали данной поверхности [7, стр. 238], [8, стр. 156]

$$\Delta\psi = \Theta = S_g = \iint\limits_{(D)} K\sqrt{EG - F^2}dudv = \\ = \iint\limits_{(D)} KdS = KdS. \quad (3)$$

При этом под полным геодезическим поворотом вектора понимается поворот относительного его исходного положения.

Термин “геодезическое параллельное перенесение” был введен Леви-Чевита в связи с аналогией с буквальным перенесением вектора в случае плоской кривой, когда полный угол, на который повернется касательная относительно параллельно перенесенного своего исходного положения, равен интегралу от кривизны кривой.

Угол $\Delta\vartheta = 2\pi$ полного геодезического поворота касательной замкнутого контура представим в виде суммы переносного геодезического поворота $\Delta\varphi$ параллельно переносимого вектора и поворота $-\Delta\psi$ касательной относительно этого вектора $\Delta\theta = \Delta\varphi - \Delta\psi$. Имеем $\iint\limits_{(D)} KdS + \oint\limits_{(\ell)} k_g ds = 2\pi$.

Для контура, содержащего элементы криволинейного многоугольника, в левой части добавляется сумма внешних углов многоугольника, что дает теорему Гаусса—Боне

$$\iint\limits_{(D)} KdS + \oint\limits_{(\ell)} k_g ds + \Sigma\vartheta = 2\pi. \quad (4)$$

Как отмечалось выше, куску F поверхности с положительной гауссовой кривизной K, ограниченного замкнутой кривой ℓ с конечным числом угловых точек и с геодезической кривизной k_g можно поставить в соответствие площадь области на изображающей единичной гауссовой сфере, равную телесному углу Θ, вырезаемому ортом нормали данной поверхности на гауссовой сфере и полной гауссовой кривизне $\iint\limits_{(F)} KdS$ данной поверхности.

В случае, когда кривая лежит на сфере радиуса R, величина $2\pi - \int\limits_{(\ell)} k_g dS - \Sigma\vartheta_i$, как и всегда, по (3), (4) равна телесному углу, площади S_g области на единичной гауссовой сфере или телесному углу на данной сфере радиуса R. Действительно, в этом случае $K = 1/R^2$, и мы получаем для этой величины, принимая u и v за широту и долготу и совмещая центры гауссовой и данной сфер.

$$2\pi - \oint\limits_{(\ell)} k_g dS - \Sigma\vartheta_i = \iint\limits_{(D)} KdS = \Theta = S_g = \\ = \iint\limits_{(D)} K\sqrt{EG - F^2}dudv = \\ = (1/R^2)\iint\limits_{(D)} K\sqrt{EG - F^2}dudv = \\ = (1/R^2)R^2\iint\limits_{(D)} |\cos v| dudv = (1/R^2)S_{сф}. \quad (5)$$

Если же на поверхности имеется кусок незамкнутой кривой, то его можно мысленно замкнуть одной или несколькими дугами геодезических на этой поверхности, и тогда также будет иметь место формула Гаусса—Боне в той же форме (4), но с добавлением к $\Sigma\vartheta_i$, суммы соответствующих внешних углов.

Таким образом, в общем случае кривой на поверхности можно поставить в соответствие телесный угол на сфере приведенного радиуса R, вычисляемого из формулы

$$R^2 = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}dudv / (2\pi - \oint\limits_{(\ell)} k_g ds - \Sigma\vartheta_i).$$

Примем во внимание, что в случае теоремы о телесном угле вектор $\boldsymbol{\xi}$ направлен по нормали к поверхности (к сфере). Тогда, сравнивая утверждение теоремы с (3), приходим с учетом (5) к выводу, что телесный угол и угол поворота тела в теореме есть также полный угол поворота вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{1-2}$, параллельно переносимого в касательной плоскости сферы вдоль кривой-траектории, описываемой концом вектора $\boldsymbol{\xi}$, ортогонального угловой скорости тела с неподвижной точкой. Этот телесный угол и соответственно угол поворота тела в данном случае его движения около неподвижной точки вычисляется по формуле (5).

В работе [9] было введено понятие вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}'/\boldsymbol{u}^2$ переменного вектора $\boldsymbol{u}(p)$, как составляющей угловой скорости подвижной системы координат, вращающейся вместе с этим вектором относительно основной неподвижной системы, получающейся путем отбрасывания составляющей угловой скорости системы, коллинеарной вектору $\boldsymbol{u}$. Затем в этой и других работах было показано, что если какой-нибудь неизменный по направлению в сопутствующей системе координат вектор остается ортогональным вектору угловой скорости этой системы, то угловая скорость вектора и системы совпадают. Так, например, угловая скорость орта главной нормали кривой совпадает с вектором Дарбу угловой скорости Френе этой кривой. Исходя из этих соображений, делаем вывод, что угловая скорость вектора $\boldsymbol{\xi}$ совпадает с угловой скоростью тела, а угловая скорость параллельно переносимого вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2} = \boldsymbol{\xi}_{2\,-3}$ равна угловой скорости минус третьего базиса, являющегося базисом Френе третьей эволюты кривой-траектории.

При этом имеем связь вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{-2}$, параллельно переносимого вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2}$, вектора $\boldsymbol{\xi}$ и их производных по дуге кривой-траектории

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{-2} = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{-3} + \alpha'_{-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{2\,-3} = \boldsymbol{\omega}_{-3} + \alpha'_{-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2} = \\ = \boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2} \times \boldsymbol{\varepsilon}'_{1\,-2} + \alpha'_{-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{1\,-2} = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\xi}',\end{aligned} \tag{6}$$

где α_{-2} — угол, составляемый третьим ортом минус второго базиса (вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{-3}$) минус третьего базиса и третьим ортом минус третьего базиса; α'_{-2} — проекция на параллельно переносимый вектор угловой скорости минус второго базиса (тела) относительного минус третьего.

Заметим, что коническим аксоидом тела в данном случае движения около неподвижной точки будет являться индикатриса бинормалей −1-й индикатрисы касательных, так как третий орт последующего базис есть нормированная угловая скорость предыдущего, т.е. −2-го.

Главная кривизна K_{N0} конуса, направляющей которого является траектория конца единичного отрезка тела, перпендикулярного его угловой скорости, с точностью до знака и размерности равна коническому радиусу кривизны аксоида — конуса, описываемого вектором угловой скорости тела. Это указывает на тесную взаимосвязь этих конусов и позволяет определить один из них, если другой найден. При это важным обстоятельством является то, что траектория, как направляющая одного конуса, имеет меньший ранг, чем направляющая другого конуса — аксоида, следовательно, ее уравнения проще [6]. При их получении с помощью алгоритма интегрирования, включающего ряд последовательных квадратур, нужно будет сделать меньшее число шагов.

Следует отметить, что рассмотренная задача является примером того, как результаты кинематического подхода в теории кривых возвращаются в механику и находят применение в задачах движения твердого тела, в частности, они могут быть использованы в робототехнике, а также в задачах автоматического регулирования [10, 11] и др. [12—17].

В заключение автор выражает признательность Журавлеву В. Ф. за постановку проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю. Механика специальных гироскопических систем. — Киев: Изд-во АН УССР, 1952. — 432 с.

2. Журавлев В. Ф, Основы теоретической механики. — М.: Наука; Физматлит, 1997. — 320 с.

3. Классификация и уравнения кривых/Крутов А. В.//Вестн. ВГУ. Сер. 2, Естеств науки. — 1996. № 2. — С. 210—217.

4. Журавлев В. Ф. Теорема о телесном угле в динамике твердого тела// Прикладная математика и механика. — 1996. — Т. 60, вып. 2. — С. 323—326.

5. Крутов А. В. Некоторые понятия и соотношения кинематической геометрии// Beiträge zur Algebra und Geometrie. — 1990, — V. 31, — P. 87—102.

6. Крутов А. В. Последовательность базисов кривой и ее применение: геометрико-кинематическая модель//Математическое моделирование информационных и технологических систем: Сб. научн. тр. / Воронеж. гос. технол. акад. — Воронеж, 2000. — Вып. 4. — 31—38 с.

7. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. — М.: Физматгиз, 1958. — 244 с.

8. Struik Dirk J. Lectures on classical differential geometry. — New York: Dover publication, inc. — 1988. — 232 p.

9. О построении аппроксимационных кривых/ Крутов А. В.; Воронеж. ун-т. Воронеж, 1992. — 25 с. — Деп. в ВИНИТИ 25.03.92, № 1025 — В 92.

10. Крутов В. И. Автоматическое регулирование и управление двигателей внутреннего сгорания. — М.: Машиностроение, 1989. — 416 с.

11. Крутов В. И. Электронные системы регулирования и управления двигателями внутреннего сгорания. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1991. — 138 с.

12. Костарев И. В., Соломонов К. Н., Крутов А. В. Аналитическое решение задачи определения положения линии раздела течения металла//Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение. — 2000. — № 4 (41). — С. 25 — 31.

13. Пат. 2174917 РФ. Механизм для точного воспроизведения синусоиды /А. В. Крутов (РФ) — № 2000102165; Заявл. 26.01.2000.

14. Крутов А. В. Геометрическая модель интегрирования//Вест. РУДН. Сер. Инж. исслед. — 2001. — № 1. — С. 105—109.

15. Крутов А. В. Некоторые прикладные задачи: геометрико-кинематические модели. — М.: РУДН, 2001. — 252 с.

16. Кривошапко С. Н., Крутов А. В. Рёбра возврата, линии раздела и самопересечения некоторых технологических поверхностей откоса//Вест. РУДН. Сер. Инж. исслед. — 2001. — № 1. — С. 98—104.

17. Крутов А. В. О движении, определяемом центроидно-траекторными парами// Изв. Вузов. Машиностроение. — 2001. — № 2—3, — С. 3—6.