ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 2

УДК 537.86:519.2

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОСИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ АМПЛИТУДОЙ НАКАГАМИ

© 2001 г. В. И. Костылев

Воронежский государственный университет

Определено распределение решающей статистики энергетического обнаружителя в случае приема аддитивной смеси квазидетерминированного радиосигнала со случайной амплитудой Накагами и гауссовского белого шума. Получены выражения для вероятности правильного энергетического обнаружения.

Обнаружение радиосигналов в шуме является одной из важных задач статистической радиофизики. Типовой обнаружитель состоит из соединенных каскадно приемника и порогового устройства. Структура приемника определяется имеющейся априорной информацией об обнаруживаемом сигнале и шуме: например, при обнаружении в белом шуме детерминированного сигнала известной формы оптимальным является корреляционный приемник. Для обнаружения неизвестного детерминированного сигнала, когда оптимальный приемник реализован быть не может, в [1] предложено использовать энергетический приемник. В [1, 2] показано, что выходной сигнал энергетического приемника имеет хи-квадрат распределение, причем нецентральное, если на входе приемника присутствует обнаруживаемый детерминированный сигнал.

В теории радиофизических систем наряду с моделью детерминированного сигнала широко распространена модель квазидетерминированного сигнала

$$s(t) = \mathrm{Re}\{AU(t)\exp[j(2\pi f_0 t + \varphi)]\}, \qquad (1)$$

где A — случайная амплитуда; $U(t)$ — нормированная детерминированная комплексная огибающая; f_0 — несущая частота; φ — случайная начальная фаза. Оптимальным приемником при обнаружении сигнала (1) в белом шуме является квадратурный корреляционный приемник, при условии, что амплитуда A распределена по закону Рэлея, а начальная фаза — по равномерному закону. Если же амплитуда и начальная фаза имеют другие законы распределения или $U(t)$ неизвестна и поэтому оптимальный приемник реализован быть не может, то для обнаружения сигнала (1), как и для обнаружения детерминированного неизвестного сигнала [1], может быть использован энергетический приемник. При этом распределение решающей статистики — выходного сигнала энергетического приемника — может отличаться от хи-квадрат распределения. Для случая рэлеевской амплитуды распределение решающей статистики получено и проанализировано в [3].

Цель настоящей статьи — определить характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированного радиосигнала со случайной амплитудой, распределенной по закону Накагами [4], на фоне белого гауссовского шума.

Как и в классической работе [1] будем полагать, что несущая частота f_0 и ширина спектра Δf обнаруживаемого сигнала, равно как и спектральная плотность мощности N_0 шума, известны. Обрабатываемый сигнал

$$x(t) = \iota s(t) + n(t), \ \iota = 0{,}1 \qquad (2)$$

представляет собой по гипотезе H_1 смесь обнаруживаемого квазидетерминированного сигнала (1) и белого шума $n(t)$, а по гипотезе H_0 — только белый шум $n(t)$. Входящий в (2) априори неизвестный бинарный параметр ι способен принимать значения 0 или 1, совпадающие с индексом гипотезы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 01-01-00356.

Как и в [1,2], будем полагать, что с целью ограничения средней мощности шума обрабатываемый сигнал (2) предварительно пропускается через полосовой фильтр с идеальной амплитудно-частотной характеристикой. С выхода фильтра на вход энергетического приемника поступает узкополосный сигнал

$$y(t) = \mathrm{Re}\{Y(t)\exp(j2\pi f_0 t)\}, \qquad (3)$$

где

$$\mathrm{Y}(t) = \imath K_0 AU(t)\exp(j\varphi) + \mathrm{N}(t) \text{ —} \qquad (4)$$

комплексная огибающая сигнала $y(t)$; K_0 — коэффициент передачи фильтра; $\mathrm{N}(t)$ — комплексная огибающая гауссовского шума на выходе фильтра. Нетрудно убедиться, что $\overline{\mathrm{N}(t)} = 0$ и

$$\overline{\mathrm{N}(t)\mathrm{N}^*(t-\tau)} = D_\mathrm{N}\frac{\sin(\pi\Delta f\tau)}{\pi\tau\Delta f}, \qquad (5)$$

где D_N — дисперсия комплексной огибающей шума на выходе фильтра.

Назначение энергетического приемника — сформировать на своем выходе напряжение (решающую статистику), равное энергии

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{Y}(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\Delta f}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\mathrm{Y}(m/\Delta f)|^2, \qquad (6)$$

обрабатываемой реализации входного сигнала $y(t)$. Однако, поскольку бесконечно продолжительная обработка сигнала $y(t)$ невозможна, на практике энергетический приемник формирует решающую статистику Ξ, равную аппроксимации энергии (6), вида

$$E_1 = \frac{1}{2}\int_0^T|\mathrm{Y}(t)|^2\,dt \qquad (7)$$

или

$$E_2 = \frac{1}{2\Delta f}\sum_{m=0}^{B}\left|\mathrm{Y}\left(\frac{m}{\Delta f}\right)\right|^2, \qquad (8)$$

где $B = T\Delta f$ — база обработки сигнала (3); T — длительность обработки сигнала $y(t)$ в энергетическом приемнике, которую всегда можно выбрать такой, чтобы база обработки B была целочисленной. Отметим, что хотя при конечном T все три величины E, E_1 и E_2, вообще говоря, различаются между собой, однако разница между ними нивелируется при $T \to \infty$.

Величины E_1 и E_2 суть две различные аппроксимации энергии E реализации сигнала $y(t)$ и каждая из них имеет самостоятельное значение. Во многих теоретических работах при расчете характеристик обнаружения явно или неявно предполагалось, что выходной сигнал энергетического приемника совпадает с E_2.

В [1—3, 5] показано, что решающая статистика Ξ энергетического обнаружителя имеет хи-квадрат распределение в отсутствие обнаруживаемого сигнала и нецентральное хи-квадрат распределение в случае наличия детерминированного обнаруживаемого сигнала. Причем, если при аналоговой реализации [1, 2] энергетического обнаружителя указанные законы приближенно описывают распределение величины Ξ, то при дискретной реализации [3, 5] энергетического обнаружителя они являются точными. Таким образом,

$$\Xi = \chi^2_{\mu,\imath d^2}, \qquad (9)$$

где $\chi^2_{\nu,m}$ — случайная величина, имеющая нецентральное хи-квадрат распределение с ν степенями свободы и параметром нецентральности m; $\mu = 2(B+1)$ — число степеней свободы; $d^2 = 2E_\wp/N_0$ — энергетическое отношение сигнал—шум ($\wp = 1$ при аналоговой обработке и $\wp = 2$ при дискретной обработке).

Из (9) следует, что при гипотезе H_1 и детерминированной амплитуде A обнаруживаемого радиосигнала характеристическая функция $\vartheta_{\Xi|\mathrm{H}_1}(j\eta)$ статистики обнаружения Ξ есть

$$\vartheta_{\Xi|\mathrm{H}_1}(j\eta) = (1-2j\eta)^{-N}\exp\left[\frac{j\eta(Aq)^2}{1-2j\eta}\right], \qquad (10)$$

где $q = d/A$ — детерминированный параметр; $N = \mu/2 = B+1$.

Обычно канал распространения радиоволны имеет случайные характеристики [6, 7], в результате чего амплитуда обнаруживаемого сигнала также случайна. При случайной амплитуде A выражение (10) можно трактовать как условную характеристическую функцию статистики обнаружения Ξ. Найти безусловную характеристическую функцию $\Theta_{\Xi|\mathrm{H}_1}(j\eta)$ статистики Ξ можно посредством усреднения характеристической функции (10) по случайной амплитуде:

$$\Theta_{\Xi|\mathrm{H}_1}(j\eta) = (1-2j\eta)^{-N}\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{j\eta A^2q^2}{1-2j\eta}\right)W(A)dA, \qquad (11)$$

где $W(A)$ — плотность вероятности амплитуды A. Существует несколько моделей распределения амплитуды, соответствующих различным практическим ситуациям, [6] и одна из самых распространенных среди них — модель Накагами [4].

Плотность вероятности случайной амплитуды A, распределенной по закону Накагами, может быть записана в виде [4, 6]

$$W(A)=\frac{2m^m A^{2m-1}}{\Gamma(m)(\overline{A^2})^m}\exp\left(-\frac{mA^2}{\overline{A^2}}\right), \qquad (12)$$

где $\Gamma(A)$ — гамма-функция; m — параметр, выражающий отношение средней мощности обнаруживаемого сигнала к дисперсии мгновенной мощности сигнала [6]. Как нетрудно убедиться, распределение Рэлея есть частный случай распределения Накагами при $m=1$ Вычисляя интеграл в (11), можно получить

$$\Theta_{\Xi|\mathrm{H}_1}(j\eta)=(1-2j\eta)^{m-N}\left[1-j\eta(2+\overline{d^2}/m)\right]^{-m}, \qquad (13)$$

где $\overline{d^2}$ — среднее значение энергетического отношения сигнал—шум.

База обработки B всегда может быть выбрана из условия $B>m-1$. Тогда, основываясь на (13), нетрудно показать, что при энергетическом обнаружении радиосигнала со случайной амплитудой, распределенной по закону Накагами, решающая статистика может быть представлена в виде суммы двух независимых гамма-статистик [8], а именно

$$\Xi|\mathrm{H}_1=\gamma_{2,N-m}+\gamma_{2+\overline{d^2}/m,m}, \qquad (14)$$

где $\gamma_{a,\,A}$ — гамма статистика с плотностью вероятности $w_\gamma(x;a,A)=1(x)a^{-A}x^{A-1}\dfrac{\exp(-x/a)}{\Gamma(A)}$,

$1(x)=\begin{cases}1,\ x\ge 0\\ 0,\ x<0\end{cases}$ — единичная ступенчатая функция. Как нетрудно убедиться, формула (14) обобщает полученную в [3] для случая рэлеевской амплитуды формулу

$$\Xi|\mathrm{H}_1=\chi^2_{2B}+e_{\overline{d^2}+2}, \qquad (15)$$

где $\chi^2_\nu=\chi^2_{\nu,0}$ — случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с n степенями свободы; $e_a=\gamma_{a,1}$ — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону с параметром a. При $m=1$, когда распределение Накагами переходит в распределение Рэлея, (14) переходит в (15).

Распределение суммы двух гамма-статистик подробно проанализировано в [9]. В нашем случае несложно показать, что плотность вероятности статистики обнаружения (14) можно представить в виде

$$W_{\Xi|\mathrm{H}_1}(x)=1(x)\left(\frac{2}{2+\overline{d^2}/m}\right)^m\frac{x^B}{B!\,2^{B+1}}\times$$
$$\times\exp(-x/2)\,{}_1\mathrm{F}_1\left(m;B+1;\frac{x}{2}-\frac{x}{2+\overline{d^2}/m}\right), \qquad (16)$$

где ${}_1\mathrm{F}_1(a;b;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Важнейшими числовыми характеристиками эффективности энергетического обнаружителя (как и любого другого обнаружителя) являются вероятность правильного обнаружения P_1 и вероятность ложной тревоги P_0 [1—3]. Зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги называется характеристикой обнаружения. Вероятность ложной тревоги $P_0=\Pr\{\Xi\ge h|\mathrm{H}_0\}=1-\mathcal{F}_\mu(h)$ энергетического обнаружителя можно представить в виде [3, 5]

$$P_0=1-\mathrm{P}(B+1,h/2), \qquad (17)$$

где h — пороговый уровень обнаружителя; $\mathcal{F}_\mu(x)$ — функция распределения хи-квадрат с μ степенями свободы; $P(x,\ y)$ — ро-функция (нормированная неполная гамма-функция). Соответственно, значение порогового уровня h, необходимое (критерий Неймана—Пирсона [1]) для обеспечения требуемой вероятности ложной тревоги дискретного энергетического обнаружителя может быть рассчитано по формуле

$$h=\mathcal{F}_\mu^{-1}(1-P_0), \qquad (18)$$

где $\mathcal{F}_\mu^{-1}(P)$ — функция, обратная к $\mathcal{F}_\mu(x)$.

Вероятность $P_1=\Pr\{\Xi\ge h|\mathrm{H}_1\}$ правильного энергетического обнаружения узкополосного радиосигнала с амплитудой Накагами удалось представить в интегральном виде

$$P_1=\frac{\int_0^h y^{m-1}\exp\left(-\frac{y}{2+\overline{d^2}/m}\right)\Gamma\left(B-m+1,\frac{h-y}{2}\right)dy}{\Gamma(m)\Gamma(B-m+1)(2+\overline{d^2}/m)^m}, \qquad (19)$$

где $\Gamma(\nu,z)$ — дополнительная неполная гамма-функция, или в виде ряда

$$P_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(B+k)!} \Gamma(B+k+1, h/2), \tag{20}$$

где

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(k+m)}{\Gamma(m)k!} \left(\frac{m}{m + \overline{d^2}/2} \right)^m \left(\frac{\overline{d^2}/2}{m + \overline{d^2}/2} \right)^k. \tag{21}$$

Воспользовавшись формулой [10]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu)}{k!} x^k = \Gamma(\nu)(1-x)^{-\nu}, \tag{22}$$

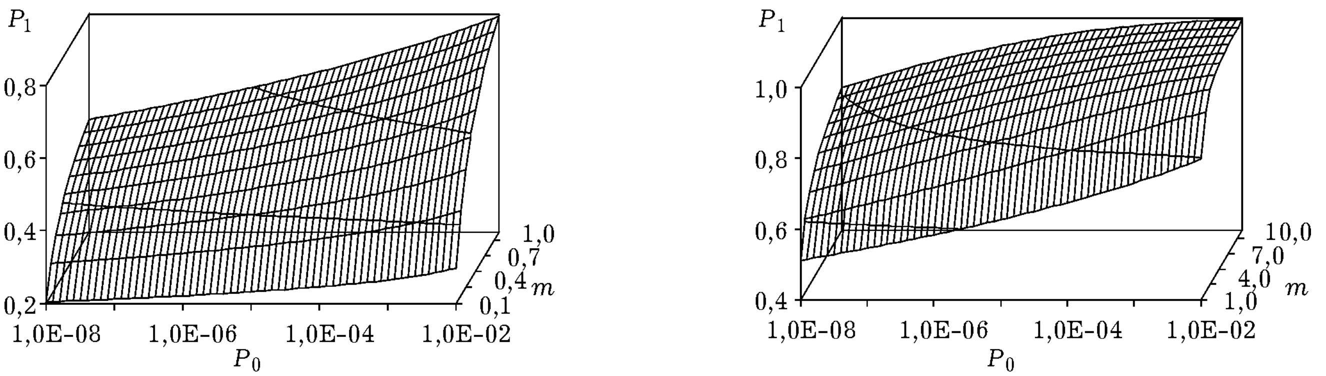
нетрудно доказать, что коэффициенты α_k удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1$. Таким образом, распределение решающей статистики энергетического обнаружителя при приеме аддитивной смеси квазидетерминированного радиосигнала со случайной амплитудой, распределенной по закону Накагами, и белого гауссовского шума может быть отнесено к классу гипергамма-распределений [9].

Выражения (18)—(21) позволяют рассчитывать характеристики энергетического обнаружения радиосигналов с амплитудой Накагами. На рис. 1 показана зависимость характеристики обнаружения от параметра m распределения Накагами для $N = 16$ и $\overline{d^2} = 100$.

Как видно из рис. 1, характеристика обнаружения существенно улучшается с ростом параметра m, однако при $m > 1$ этот эффект гораздо менее выражен, чем при $m < 1$: так при изменении параметра m на порядок от $m = 0{,}1$ до $m = 1$ (рис. 1а) вероятность правильного обнаружения увеличивалась на 60,2—62,8 %, в то время как при изменении параметра m также на порядок, но от $m = 1$ до $m = 10$ (рис. 1б), вероятность правильного обнаружения увеличивалась на 20,1−36,4 %.

На рис. 2 показана зависимость характеристики обнаружения от энергетического отношения сигнал—шум для $m = 1$ и $N = 16$, а на рис. 3 — от базы обработки для $\overline{d^2} = 1000$ и $m = 1$.

Как и следовало ожидать, характеристики обнаружения улучшаются с ростом среднего энергетического отношения сигнал—шум. В то время как увеличение базы обработки при заданном среднем отношении сигнал—шум приводит к ухудшению характеристик обнаружения.



а б

Рис. 1

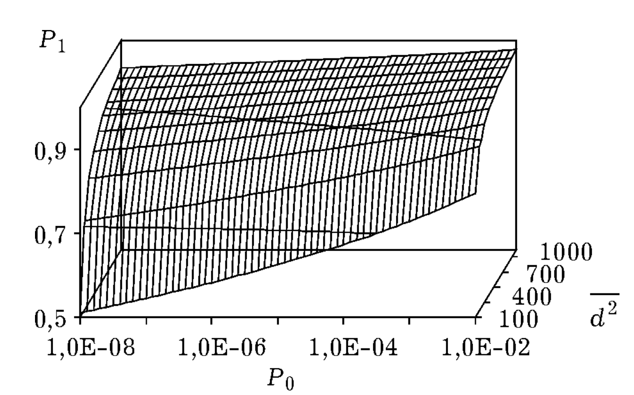


Рис. 2

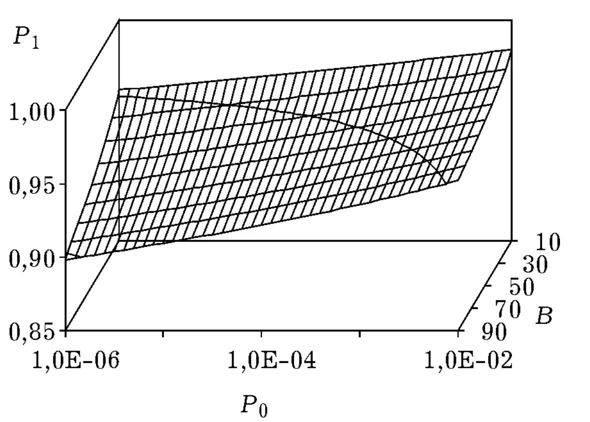


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Урковиц. Обнаружение неизвестных детерминированных сигналов по энергии // ТИИЭР. — 1967. — Т. 55, № 4. — С. 50—59.

2. Park K. Y. Performance evaluation of energy detectors // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 1978. — Vol. AES−14, № 2. — P. 237—241.

3. Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов // Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика. — 2000. — Т. 43, № 10. — С. 926—932.

4. Nakagami M. The m−distribution a general formula of intensity distribution of rapid fading // Statistical Methods in Radio Wave Propagation. — New York, 1960. № 9. — P. 3—36.

5. Костылев В. И. Сравнение аналогового и дискретного обнаружения детерминированных узкополосных радиосигналов по энергии // Вестн. ВГУ. Сер. физика, математика. — 2001. — Вып. 1. — С. 33—39.

6. Кловский Д. Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам. — М.: Радио и связь, 1982. — 304 с.

7. Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / Под ред. С. Е. Фальковича. — М.: Радио и связь, 1989. — 296 с.

8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ.; — М.: Мир, 1984. — Т. 2. — 738 с.

9. Костылев В. И. О композиции гамма-статистик // Вестн. ВГУ. Сер. физика, математика. — 2000. — Вып. 1. — С. 34—38.

10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981. — 800 с.