УДК 519.112.71

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ИСПОЛЬЗОВАТЬ РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

© 2001 г. И. Л. Каширина, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Рассматривается задача выбора минимального количества объектов, выполняющих заданный набор операций, в предположении, что каждый объект должен выполнять не более фиксированного числа операций, а каждая операция должна выполняться ровно одним объектом. Исходные данные задачи можно представить в виде булевой матрицы A, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-é объект может выполнять} \\ & i\text{-ю операцию,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
$$i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Задачи такого типа имеют широкое практическое применение и возникают, например, при проектировании программно-аппаратных многопозиционных радионавигационных систем для определения местоположения объектов и обмена данными между ними. К такой постановке сводится задача выбора минимального количества объектов-ретрансляторов с ограничением на размер кластера [1]. Рассмотрим некоторые алгоритмы точного и приближенного решения этой задачи, основанные на различных способах ее математической записи.

Для математической формализации задачи переменные введем следующим образом

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-é объект назначается для выпол-} \\ & \text{нения } i\text{-é операции } (a_{ij} \neq 0), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
$$i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Тогда математическая модель задачи имеет следующий вид

$$\phi(y) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}(\sum_{i \in I_j} y_{ij}) \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j \in J_i} y_{ij} = 1,\ i = \overline{1,m} \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I_i} y_{ij} \le D,\ j = \overline{1,n} \tag{3}$$

$$y_{ij} = 1 \vee 0,\ j = \overline{1,n}\ i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Здесь I_j множество операций, которые может выполнять j-й объект, J_i — множество объектов, которые могут выполнять i-ю функцию:

$$I_j = \{i : a_{ij} > 0\},\ \ J_i = \{j : a_{ij} > 0\},$$

D — максимально допустимое число операций, выполняемых одним объектом: $1 < D <$ m,

$$\operatorname{sgn}(\sum_{i \in I_j} y_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i \in I_j} y_{ij} > 0, \text{ т.е. } j\text{-é объект} \\ & \text{выполняет хотя бы одну операцию,} \\ 0, & \text{если } \sum_{i \in I_j} y_{ij} = 0. \end{cases}$$

Полученная задача имеет нелинейную целевую функцию и две группы ограничений транспортного типа. Рассмотрим некоторые свойства этой задачи.

1. Число единиц в решении равно m (в силу ограничений (2) в каждой из m строк стоит ровно одна единица).

2. Имеет место оценка снизу для оптимального значения целевой функции: $f^* \ge \dfrac{m}{D}$. Если $\dfrac{m}{D} \notin Z$, то оценку можно уточнить: $f^* \ge \left[\dfrac{m}{D}\right] + 1$ (Здесь $[\cdot]$ — знак целой части).

3. Если $m > nD$, то задача несовместна, $\Omega = \varnothing$ (т. к. ограничения (3) не могут быть выполнены).

4. Если $m = nD$, то ограничения (3) следует переписать в виде равенств

$$\sum_{i \in I_j} y_{ij} = D,\ j = \overline{1,n}. \qquad (3')$$

Одним из подходов к приближенному решению задачи (1)—(4) может быть замена ее целевой функции на линейную:

$$L(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} y_{ij}.$$

Такая замена приводит к тому, что вместо поиска минимального числа назначенных объектов будет отыскиваться суммарное минимальное число назначений для выполнения заданных операций. В силу наличия ограничений (2) это число известно и равно m. В этом случае имеет место транспортная задача с запретами:

$$\begin{gathered} L(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} y_{ij} \to \min, \\ \sum_{j \in J_i} y_{ij} = 1, i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i \in I_j} y_{ij} \le D, i = \overline{1,m}, \\ y_{ij} = 1 \vee 0,\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m}. \end{gathered} \qquad (5)$$

Для сведения ее к обычной транспортной задаче достаточно ввести целевые коэффициенты [2] $c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ij}=1, \\ m+1, & \text{если } a_{ij}=0 \end{cases}$.

Заметим, что решением полученной вспомогательной задачи будет любая допустимая точка (т. к. в каждой из них значение целевой функции равно m). Поэтому оптимальное решение задачи (1)—(4) находится среди решений задачи (5). Следовательно, если задача (5) имеет единственное решение, то оно будет оптимальным и в задаче (1)—(4). В противном случае с помощью метода потенциалов можно организовать перебор оптимальных точек задачи (5) до получения решения, для которого значение целевой функции близко к оценке снизу (свойство 2).

Рассмотрим другие способы алгоритмизации задачи (1)—(4), основанные на возможности ее эквивалентной перезаписи. Заметим, что ограничения (2) могут быть включены в целевую функцию, т. е. задача (1)—(4) может быть эквивалентно переписана в виде

$$\begin{gathered} f(y) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\left(\sum_{i \in I_j} y_{ij}\right) - A\sum_{i=1}^{m} \chi\left(\sum_{j \in J_i} y_{ij}\right) \to \min, \\ \sum_{i \in I_j} y_{ij} \le D,\ i = \overline{1,m}, \\ y_{ij} = 1 \vee 0,\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,m}. \end{gathered} \qquad (6)$$

где $\chi(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$,

A — некоторый штрафной коэффициент.

Утверждение 1. Существует A^0 такое, что при $A \ge A^0$ решение задачи (6) является решением задачи (1)—(4) и наоборот.

Доказательство. Покажем сначала, что существует A^0 такое, что при $A \ge A^0$ решение задачи (6) является допустимой точкой в задаче (1)—(4). Рассмотрим произвольную точку y^0, недопустимую в (1)—(4). Тогда значение $f(y^0)$ можно оценить следущим образом $f(y^0) \ge 1 - Al$ (то есть выбран всего один объект и при этом выполнилось l ограничений). Так как точка недопустима, то $l \le m-1$. Таким образом, $f(y^0) \ge 1 - A(m-1)$. Рассмотрим теперь любую допустимую в задаче (1)—(4) точку $\hat{y}$. В ней значение целевой функции можно оценить следующим образом: $f(\hat{y}) \le r - Am$, где $r = \min\{m,n\}$ (то есть выбраны все n объектов, или для выполнения каждой из m операций выбран отдельный объект). Определим константу A таким образом, чтобы значение фукции f в любой допустимой точке было меньше, чем в любой недопустимой. То есть $r - Am < 1 - A(m - 1)$. Отсюда $r < A+1$, то есть $A > r - 1$. Следовательно, если выбрать $A^0 = \min\{m,n\}$, то при любом $A \ge A^0$ решение задачи (6) является допустимой точкой в задаче (1)—(4). Заметим далее, что в допустимых точках

$$f(y) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sgn}\left(\sum_{i \in I_j} y_{ij}\right) - Am = \phi(y) - const.$$

Отсюда следует, что оптимальные векторы этих функций совпадают. Таким образом утверждение доказано.

Для отыскания решения задачи, записанной в виде (6) могут быть использованы двойственные алгоритмы.

Покажем далее, что задача (6) может быть записана в виде

$$g(y) = f(y) + R\sum_{j=1}^{n} \max\left\{0, \sum_{i\in I_j} y_{ij} - D\right\} \to \min_{y_{ij}=1\vee 0}. \quad (7)$$

Утверждение 2. Существует R^0 такое, что при $R \geq R^0$ решение задачи (7) является решением задачи (6) и наоборот.

Доказательство. Покажем, что существует R^0 такое, что при $R \geq R^0$ решение задачи (7) является допустимой точкой в задаче (6). Пусть y^0 — решение задачи (7). Положим в задаче (6) значение $A = r = \min\{m,n\}$. Тогда $1\text{-}rm \geq f(y^0) \leq r - rm$. Если точка $\hat{y}$ допустима в задаче (6), то $g(\hat{y}) = f(\hat{y}) \leq r - rm$. Предположим, что в оптимальной точке это не так, и хотя бы одно из ограничений задачи (6) нарушено. Тогда $g(y^0) \geq f(y^0) + R \geq 1 - rm + R = r - rm + (R + 1 - r) \geq g(\hat{y})$ при любом $R > r - 1$. Получили противоречие. Т.о., если взять $R^0 = r = \min\{m,n\}$, при $R \geq R^0$ решение задачи (7) является допустимой точкой в задаче (6). Но во всех допустимых точках

$$\sum_{j=1}^{n} \max\left\{0, \sum_{i\in I_j} y_{ij} - D\right\} = 0,$$

т.е. $f(y) = g(y)$, а следовательно минимальные значения и минимизирующие векторы этих функций совпадают. Таким образом утверждение доказано.

Для решения задачи безусловной псевдобулевой оптимизации могут применяться, например, алгоритмы покоординатного спуска и из различные модификации. Кроме того, для решения этой задачи может быть реализован подход, описанный в [3]. В этом случае для алгоритмизации задачи (7) используется возможность эквивалентного перехода к вероятностной постановке

$$\mathrm{M}\, g(Y) \to \min_{\{Y\}}, \quad (8)$$

где M — операция математического ожидания, $\{Y\}$ — множество случайных булевых векторов, таких, что их реализации допустимы в задаче (8). Если обозначить через p_{ij} вероятность того, что случайная величина Y_{ij} примет значение, равное 1, а через q_{ij} вероятность того, что случайная величина Y_{ij} примет значение, равное 0, то есть $p_{ij} = P\{Y_{ij} = 1\}$, $q_{ij} = P\{Y_{ij} = W\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, ($p_{ij} = 0$ если $a_{ij} = 0$), то математическое ожидание в случае данной функции может быть вычислено в явном виде. Действительно,

$$M\,\mathrm{sgn}\left(\sum_{i\in I_j} y_{ij}\right) = P\left\{\mathrm{sgn}\left(\sum_{i\in I_j} y_{ij}\right) = 1\right\} =$$

$$= P\left\{\sum_{i\in I_j} y_{ij} > 0\right\} = 1 - P\left\{\sum_{i\in I_j} y_{ij} = 0\right\} = 1 - \prod_{i\in I_j} q_{ij}.$$

Аналогично

$$M\chi\left(\sum_{i\in I_j} y_{ij}\right) = P\left\{\chi\left(\sum_{i\in I_j} y_{ij}\right) = 1\right\} =$$

$$= P\left\{\sum_{i\in I_j} y_{ij} = 1\right\} = \sum_{l\in I_j} p_{il} \prod_{j\in J_i, j\neq l} q_{ij}.$$

Чтобы посчитать $M\max\left(0, \sum_{i\in I_j} y_{ij} - D\right)$, рассмотрим, какие значения принимает эта случайная величина:

$$M\max\left(0, \sum_{i\in I_j} y_{ij} - D\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } \sum_{i\in I_j} y_{ij} \leq D, \\ 1, \text{ если } \sum_{i\in I_j} y_{ij} = D+1, \\ \ldots \\ K_j - D, \text{ если } \sum_{i\in I_j} y_{ij} = K_j, \end{cases}$$

где K_j — мощность множества I_j, т.е. число единиц в j-м столбце матрицы A. Следовательно, если $K_j \leq D$, то

$M\max\left(0, \sum_{i\in I_j} y_{ij} - D\right) = 0.$ В противном случае

$$M\max\left(0, \sum_{i\in I_j} y_{ij} - D\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{k_j - D} s \sum_{i_1,\ldots,i_{K_j}\in I_j} p_{i_1 j} \ldots p_{i_{D+s} j} q_{i_{D+s+1} j} \ldots q_{i_{K_j} j}.$$

Таким образом, задача (8) принимает вид

$$-\prod_{j=1}^{n}\prod_{i\in I_j} q_{ij} - A\sum_{i=1}^{m}\sum_{l\in J_i} p_{il} \prod_{j\in J_i, j\neq l} q_{ij} +$$

$$+R\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{k_j - D} s \sum_{i_1,\ldots,i_{K_j}\in I_j} p_{i_1 j} \ldots p_{i_{D+s} j} q_{i_{D+s+1} j} \ldots q_{i_{K_j} j},$$

где область изменения переменных непрерывна — единичный гиперкуб:

$$0 \le p_{ij} \le 1,\ \ 0 \le q_{ij} \le 1.$$

Такую задачу можно решать, например градиентным методом (с проекцией на единичный гиперкуб).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Львович Я. Е., Чернышова Г. Д., Каширина И. Л. Оптимизация проектных решений в САПР на основе эквивалентных преобразований задачи о минимальном покрытии// Информ технологии. — 1999. № 4. — С. 2—6.

2. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М: Наука, 1969. — 318 с.

3. Каширина И. Л., Чернышова Г. Д. Алгоритмы решения задачи о покрытии, использующие переход к вероятностной постановке задачи// Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. — 1997. — № 1. — С. 119—127.