УДК 517.948

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЦИЛИНДРЕ

© 2001г. В. П. Глушко, О. П. Малютина

Воронежский государственный университет

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается эллиптическая граничная задача с существенно переменными коэффициентами в $D\times(0,\infty)$

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u=a_{nn}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{nk}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_k}+$$
$$+\sum_{k,l=1}^{n-1}a_{kl}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tilde{x}_k\partial\tilde{x}_l}+a_n(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}+$$
$$+a_0(x,t)u=f(x,t); \tag{1}$$

$$u_{|S\times(0,\infty)}=0\,,\quad u_{|t=0}=0\,,\quad \lim_{t\to\infty}u=0\,, \tag{2}$$

где D — область в R^{n-1} с гладкой границей S. Проведем стандартное локальное «выпрямление» границы S (см. [1]): в некоторой окрестности точки $x^s\in S$ построим неособое преобразование $\tilde{x}=T^s(x)$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j&=\phi_j^s(x_1,x_2,\dots x_{n-1})\quad 1\le j\le n-2,\\ \tilde{x}_{n-1}&=\phi_{n-1}^s\left(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

такое, что выполнены требования:

Условие 0.1. Отображение $\tilde{x}=T^s(x)$ осуществляет взаимнооднозначное отображение некоторой окрестности $\mathcal{A}_{x^s}(2\delta)$ точки $x^s\in S$, при котором $\mathcal{A}_{x^s}(2\delta)\cap\bar{D}(0<\delta<\delta_0)$, переходит в полушар $K_{2\delta}:\left|\tilde{x}'\right|^2+\left|\tilde{x}_{n-1}\right|^2<(2\delta)^2,\tilde{x}_{n-1}\ge 0$.

Условие 0.2. Множество $\mathcal{S}\cap\mathcal{A}_{x^s}(2\delta)$ переходит в часть гиперплоскости $\tilde{x}_{n-1}=0$; точка $x^s\in S$ при отображении $T^s(x)$ переходит в точку $\tilde{x}=0$.

Условие 0.3. Отображение $T^s(x)$ и обратное к нему принадлежит классу $C^m(m\ge 2)$.

Условие 0.4. $\left.\dfrac{\partial\tilde{x}_{n-1}}{\partial x_j}\right|_{x=x^s}=\sigma_j\quad(1\le j\le n)$, где σ_j — направляющие косинусы внутренней нормали в точке $x^s\in S$.

Здесь и в дальнейшем σ — любое малое положительное число. После такой замены переменных оператор L в локальной системе координат $\{\tilde{x},t\}$, связанной с точкой $x^s\in S$, может быть записан в виде

$$L_s\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right)=$$
$$L_s^0\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right)+L_s'\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

где L_s^0 — главная часть оператора L, определяемая формулой

$$L_s^0\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\tilde{a}_{nn}\left(\tilde{x},t\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\tilde{a}_{nk}\left(\tilde{x},t\right)\frac{\partial^2}{\partial y\partial\tilde{x}_k}+\sum_{k,l=1}^{n-1}\tilde{a}_{kl}\left(\tilde{x},t\right)\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_k\partial\tilde{x}_l}.$$

Введем в окрестности точки x^s вспомогательную функцию $\chi_s(\delta,x)\in C^\infty(R^{n-1})$ и такую, что $\chi_s(\delta,x)=1$ при $x\in\mathcal{A}_{x^s}(\delta)$; $\chi_s\left(\delta,x\right)=0$ при $x\notin 2\mathcal{A}_{x^s}(\delta)$. Обозначим $\tilde{\chi}_s(\delta,\tilde{x})=\chi_s(\delta,x)_{x=(T^s)^{-1}(\tilde{x})}$. При $0<\delta<\delta_0$ рассмотрим далее оператор

$$L_s^{0\delta}\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\tilde{\chi}_s\left(\delta,\tilde{x}\right)L_i^0\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right)+$$
$$+\left(1-\tilde{\chi}_s\left(\delta,\tilde{x}\right)\right)L_s^0\left(0,t,\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Очевидно, что при $x\in\mathcal{A}_{x^s}(\delta)$ коэффициенты операторов L_s^0 и $L_s^{0\delta}$ совпадают; при $x\notin 2\mathcal{A}_{x^s}(\delta)$ коэффициенты оператора $L_s^{0\delta}$ постоянны, причем $L_s^{0\delta}\left(\tilde{x},t,\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}},\dfrac{\partial}{\partial t}\right)=L_s^0\left(0,t,\dfrac{\partial}{\partial\tilde{x}},\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$.

Заметим, что при достаточной гладкости границы S и гладкости коэффициентов оператора L для любого $\varepsilon>0$ и $0<\delta<\delta_0(\varepsilon)$

$$\left|\tilde{a}_{kl}^{0\delta}\left(\tilde{x},t\right)-\tilde{a}_{kl}^{0\delta}\left(0,t\right)\right|<\varepsilon\quad 1\le k,l\le n. \tag{4}$$

Здесь через $\tilde{a}_{kl}^{0\delta}(\tilde{x},t)$ обозначены коэффициенты при соответствующих производных второго порядка в операторе $L_s^{0\delta}$ для любых $\tilde{x}\in E^{n-1}$.

Выполнение оценок (4) обусловлено гладкостью границы S и гладкостью (непрерывностью) коэффициентов исходного оператора L.

Предполагается, что коэффициенты исходного оператора L удовлетворяют требованию **α-эллиптичности**, которое состоит из следующих трех условий.

Условие 1.1. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют функции γ_{kl}, v_l, $1 \le k,l \le n$, число $\sigma \in R$ и функция $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$ такие, что при любом $x \in \overline{D}$ и любом $t > 0$ выполняются следующие неравенства

$$\left|\frac{a_{nn}(x,t)}{\alpha^2(t)} - \gamma_{nn}(x)\right| < \varepsilon; \quad \left|\frac{\partial_t a_{nn}(x,t)}{\alpha_t'(t)} - \sigma\gamma_{nn}(x)\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{a_{nk}(x,t)}{\alpha(t)} - \gamma_{nk}(x)\right| < \varepsilon,\ 1 \le k \le n-1;$$

$$\left|a_{kl}(x,t) - \gamma_{kl}(x)\right| < \varepsilon,\ 1 \le k,l \le n-1; \tag{5}$$

$$\left|a_n(x,t) - \gamma_n(x)\right| < \varepsilon,$$

$$\left|a_k(x,t) - \gamma_l(x)\right| < \varepsilon, \quad 1 \le k \le n-1.$$

Очевидно, что условия (5) автоматически выполняются, если $\sigma = 2$, $a_{nn}(x,t) = \gamma_{nn}(x)\alpha^2(t)$, $\alpha_{nk} = \gamma_{nk}(x)\alpha(t)$, а коэффициенты $a_{kl}(x,t)$ не зависят от переменной t.

Условие 1.2. Функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^m(0;+\infty)$, $m \ge 2$; $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$ и существует интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\alpha(s)} < \infty. \tag{6}$$

Условие 1.3. При любом $x^0 \in \overline{D}$ квадратичная форма

$$\gamma_{nn}(x^0)\eta^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{nk}(x^0)\eta\xi_k + \sum_{k,l=1}^{n-1}\gamma_{kl}(x^0)\xi_k\xi_l > 0. \tag{7}$$

положительна при любых $\{\eta,\xi\} \in R^n$, $\{\eta,\xi\} \ne 0$.

Предполагается также, что функции $\gamma_{kl}(x), 1 \le k, l \le n$ (см. условие 1.1) удовлетворяют следующему условию гладкости.

Условие 1.4. Коэффициенты $\gamma_{kl}(x)$, $1 \le k$, $l \le n-1$ оператора L вещественные достаточно гладкие функции в $\overline{D}$.

В силу условия 1.4 для каждой точки $x^0 \in \overline{D}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x \in \overline{D} \cap \mathcal{A}_{x^0}(2\delta)$ выполняются оценки

$$\left|\gamma_{kl}(x) - \gamma_{kl}(x^0)\right| < \varepsilon,\ 1 \le k,\ l \le n-1. \tag{8}$$

С помощью условий 1.1—1.4 изучение оператора $L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ может быть сведено к изучению оператора

$$L_\sigma\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u = \frac{\gamma_{nn}(x)}{\alpha^{\sigma-1}(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha^{\sigma+1}(t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{nk}(x)\alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial t} + \sum_{k,l=1}^{n-1}\gamma_{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l} + \gamma_n(x)\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + \gamma_0(x)u. \tag{9}$$

Благодаря весовому преобразованию J_α, действующему по формуле $v(y) = J_\alpha[u(t)] = u(\psi(y))$, где $t = \psi(y)$ — функция, обратная функции $y = \varphi_\alpha(t) = \int_t^{+\infty}\frac{ds}{\alpha(s)}$, $d = \varphi_\alpha(0) < \infty$, то задача (1)—(2) сведется к изучению задачи

$$M\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sigma\hat{\alpha}'\frac{\partial w}{\partial y} - \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{nk}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_k} - \sum_{k,l=1}^{n-1}\gamma_{kl}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l} - \gamma_n(x)\frac{\partial w}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k(x)\frac{\partial w}{\partial x_k} + \gamma_0(x)w = h(x,y); \tag{10}$$

$$w\big|_{S\times(0,d)} = 0,\ w\big|_{y=0} = w\big|_{y=d} = 0 \tag{11}$$

в ограниченной цилиндрической области $D\times(0,d)$. При выводе (10) мы учли, что

$$J_\alpha\left[\frac{1}{\alpha^{\sigma-1}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha^{\sigma+1}(t)\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right] = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sigma\hat{\alpha}'(y)\frac{\partial w}{\partial y},$$

где $w = J_\alpha[u], \hat{\alpha}'(y) = J_\alpha[\alpha_t'],\ h(x,y) = J_\alpha[f(x,t)]$.

Зафиксируем далее коэффициенты в (10) в произвольной точке $x^0 \in \overline{D}$ и обозначим для краткости $\gamma_{nk} = \gamma_{nk}(x^0)$, $1 \le k \le n-1$; $\gamma_{kl} = \gamma_{kl}(x^0)$, $1 \le k,l \le n-1$.

Рассмотрим вначале задачу

$$M_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w = h(x,y); \tag{12}$$

$$w_{|y=0} = w_{|y=d} = 0 \tag{13}$$

в области $E^{n-1}\times(0,d)$ (это соответствует тому случаю, когда точка x^0 является внутренней точкой D). Здесь через $M_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ обозначена главная часть оператора $M\left(x^0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Применим далее в (12) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$. После этого уравнение $M_0 w = h$ можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - p_\sigma(y,\xi)\frac{\partial v}{\partial y} - \lambda v = g, \quad 0 < y < d, \quad (14)$$

где $v = F_{x\to\xi}[w(x,y)], g = F_{x\to\xi}[h(x,y)]$,

$$p_\sigma(y,\xi) = \imath\varpi_0(\xi) + \sigma\alpha'(y);\ \varpi_0(\xi) = 2\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{nk}\xi_k,$$

$$c(\xi) = \sum_{l,k=1}^{n-1}\gamma_{kl}\xi_k\xi_l,\ \lambda = c(\xi).$$

Заметим, что в дальнейшем наряду с оператором $M(M_0)$ будем также рассматривать оператор $M - \nu(M_0 - \nu)$, где $\nu \geq 0$ параметр. В этом случае следует в (14) положить $\lambda = c(\xi) + \nu$, причем количество параметров (14) увеличивается с $n-1$ до n, однако это фактически не повлияет на свойства дифференциального оператора в левой части (14) .

§ 2. Построение решения в окрестности внутренней точки области D

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1.1—1.3 и $\sigma = 0$.

Тогда при любых $\xi \in E^{n-1}$, $v_0 \in \mathbb{C}$; $g(y) \in L_2(0,d)$ существует единственное решение $v(y)$ задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \imath\varpi_0(\xi)\frac{\partial v}{\partial y} - \lambda v(y) = g(y,\xi), \quad (15)$$

$$v_{|y=0} = 0; \quad v_{|y=d} = v_0, \quad (16)$$

принадлежащее пространству Соболева $H^2(0,d)$, и справедлива оценка

$$(1+|\xi|)^4\|v\|^2_{(0,d)} + |\xi|^2\left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2_{(0,d)} + \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\|_{(0,d)} \leq$$
$$\leq c((1+|\xi|)^3|v_0|^2 + \|g\|^2_{(0,d)}). \quad (17)$$

Постоянная $c > 0$ зависит от $d > 0$ и константы эллиптичности.

Доказательство: Введем обозначения $\varpi_0(\xi) = \omega(\dot{\xi})r$; $\lambda = c(\dot{\xi})r^2$, где $r = |\xi|$, $\varpi(\dot{\xi}) = \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\dot{\xi}_k$, $c(\dot{\xi}) = \sum a_{kl}\dot{\xi}_k\dot{\xi}_l$, $\dot{\xi}_k = \frac{\xi_k}{r}$. Теперь (11) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2\imath\varpi(\dot{\xi})r\frac{\partial v}{\partial y} - c(\dot{\xi})r^2 v(y) = g(y,\xi). \quad (18)$$

Корни характеристического уравнения $\eta^2 - 2\omega r\eta + cr^2 = 0$ имеют вид $\eta_{1,2} = \varpi r = \pm ir\sqrt{c-\omega^2}$, причем в силу условия эллиптичности

$$\inf_{|\dot{\xi}|=1}(c(\dot{\xi}) - \varpi^2(\dot{\xi})) \geq \delta^2 > 0.$$

Для упрощения записи обозначим $a = a(\dot{\xi}) = \sqrt{c - \omega^2(\dot{\xi})}$ $(a \geq \delta)$.

Таким образом, решение однородного уравнения (18) имеет вид

$$v(y) = c_1 v_1(y) + c_2 v_2(y) = c_1 e^{(\imath\varpi r + ar)y} + c_2 e^{(\imath\varpi r - ar)y}. (19)$$

Как известно, (см. [2]) общее решение уравнения (18) имеет вид

$$v(y) = \left(c_2 - \int_y^d V_1(x)g(x)dx\right)v_2(y) +$$
$$+\left(c_1 - \int_0^d V_2(x)g(y)dx\right)v_1(y), \quad (20)$$

где $V_1 = \frac{v_1}{W}$, $V_2 = \frac{v_2}{W}$, $W = v_1 v_2' - v_1' v_2$ — определитель Вронского.

Определим постоянные c_1 и c_2 из граничных условий (16)

$$c_1 = -\frac{v_0 v_2(0) + \left(\int_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(d)v_2(0) - \left(\int_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_2(0)v_2(d)}{-v_1(d)v_2(0) + v_1(0)v_2(d)};$$

$$c_2 = -\frac{v_0 v_1(0) - \left(\int_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(0)v_1(d) + \left(\int_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_1(d)v_2(0)}{-v_1(d)v_2(0) + v_1(0)v_2(d)}.$$

В силу того, что $v_1(0)= v_2(0)=1$, получаем

$$c_1=-\frac{v_0+\left(\int\limits_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(d)-\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_2(d)}{-v_1(d)+v_2(d)};$$

$$c_2=\frac{v_0-\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_1(d)+\left(\int\limits_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(d)}{-v_1(d)+v_2(d)}.$$

Подставив в (19) полученные выражения для c_1 и c_2, после группировки находим

$$v(y)=-\left(\int\limits_0^y g(x)V_2(x)dx\right)v_1(y)-$$
$$-\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_2(y)+$$
$$+\frac{\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_1(y)v_2(d)}{-v_1(d)+v_2(d)}-$$
$$-\frac{\left(\int\limits_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(d)v_1(y)}{-v_1(d)+v_2(d)}-$$
$$-\frac{\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_1(d)v_2(d)}{-v_1(d)+v_2(d)}+.$$
$$+\frac{\left(\int\limits_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(d)v_2(y)}{-v_1(d)+v_2(d)}+$$
$$+v_0\left(\frac{v_1(y)+v_2(y)}{-v_1(d)+v_2(d)}\right).$$

Обозначим коэффициенты перед v_0 через

$$u_0(y)=\frac{-v_1(y)+v_2(y)}{-v_1(d)+v_2(d)}.$$

Оставшуюся часть в (20) обозначим

Введем обозначение

$$\mathrm{K}(y,x)=\begin{cases}K_1(y,x), & x<y\\ K_2(y,x), & x>y\end{cases}, \qquad (21)$$

где

$$K_1(y,x)=\frac{(-v_1(y)v_2(d)+v_1(d)v_2(y))(V_1(x)-V_2(x))}{v_1(d)-v_2(d)}=$$
$$=-\frac{e^{-r(a(x+y)+\imath\omega(x-y))}(-1+e^{2arx})(e^{2adr}-e^{2ary})}{2a(-1+e^{2adr})r},$$

$$K_2(y,x)=\frac{(v_1(y)-v_2(y))\left(-V_1(x)v_2(d)-V_2(x)v_1(d)\right)}{v_1(d)-v_2(d)}=$$
$$=-\frac{e^{-r(a(x+y)+\imath\omega(x-y))}(-1+e^{2ary})(e^{2adr}-e^{2arx})}{2a(-1+e^{2adr})r}.$$

Тогда $u_1(y)$ можно записать в виде

$$u_1(y)=\int\limits_0^d K(y,x)g(x)dx=$$
$$=\int\limits_y^d K_1(y,x)g(x)dx+\int\limits_0^y K_2(y,x)g(x)dx.$$

Непосредственно из (21) находим

$$\left|K_1(y,x)\right|=\frac{(e^{arx}-e^{-arx})(e^{ar(d-y)}-e^{-ar(d-y)})}{2ar(e^{ard}-e^{-adr})},$$
$$\left|K_2(y,x)\right|=\frac{(e^{ary}-e^{-ary})(e^{ar(d-x)}-e^{-ar(d-x)})}{2ar(e^{ard}-e^{-adr})}.$$

Рассмотрим

$$I_1(x)=\int\limits_x^d\left|K_1(y,x)\right|dy, I_2(x)=\int\limits_0^y\left|K_1(y,x)\right|dx, I_3(x)=$$
$$=\int\limits_0^x\left|K_2(y,x)\right|dy, I_4(x)=\int\limits_y^d\left|K_2(y,x)\right|dx,$$

$$u_1(y)=\frac{\left(-\int\limits_0^d g(x)V_2(x)dx\right)v_1(d)v_1(y)+\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_1(y)v_2(d)}{-v_1(d)+v_2(d)}+$$
$$+\frac{\left(\int\limits_0^d g(x)V_1(x)dx\right)v_1(d)v_2(y)+\left(\int\limits_0^y g(x)V_2(x)dx\right)v_1(y)}{-v_1(d)+v_2(d)}-\left(\int\limits_0^y g(x)V_2(x)dx\right)v_1(y)-\left(\int\limits_y^d g(x)V_1(x)dx\right)v_2(y).$$

или более подробно

$$I_1(x)=\int_0^d \frac{(e^{arx}-e^{-arx})(e^{ar(d-y)}-e^{-ar(d-y)})}{2ar(e^{ard}-e^{-adr})}dy=$$
$$=\frac{(1-e^{-ar(d-x)})^2(1-e^{-2arx})}{2a^2r^2(1-e^{-2adr})},$$

$$I_2(y)=\int_0^y \frac{(e^{arx}-e^{-arx})(e^{ar(d-y)}-e^{-ar(d-y)})}{2ar(e^{ard}-e^{-adr})}dx=$$
$$=\frac{(1-e^{-2ar(d-y)})(1-e^{-ary})^2}{2a^2r^2(1-e^{-2adr})},$$

$$I_3(x)=\int_0^x \frac{(e^{ary}-e^{-ary})(e^{ar(d-x)}-e^{-ar(d-x)})}{2ar(e^{ard}-e^{-adr})}dy=$$
$$=\frac{(1-e^{-ar(d-x)})(1-e^{-2arx})^2}{2a^2r^2(1-e^{-2adr})},$$

$$I_4(y)=\int_y^d \frac{(e^{ary}-e^{-ary})(e^{ar(d-x)}-e^{-ar(d-x)})}{2ar(e^{ard}-e^{-adr})}dx=$$
$$=\frac{(1-e^{-ar(d-y)})^2(1-e^{-2ary})}{2a^2r^2(1-e^{-2adr})}.$$

Умножим I_1, I_2, I_3, I_4 на $(1+ard)^2$ и положим $z=ard$. Если теперь в интеграле $I_1(x)$ положить $l=\frac{d-x}{d}$; в $I_2(y)$: $l=\frac{y}{d}$; в $I_3(y)$: $l=\frac{x}{d}$; в $I_4(y)$: $l=\frac{d-y}{d}$ $(0\le l\le 1)$, то оценка интегралов $I_1(x)$, $I_2(y)$, $I_3(x)$, $I_4(y)$ сведется к оценке $\frac{d^2}{2}\Phi(z)$, где

$$\Phi(z)=\frac{(1-e^{-lz})^2(1-e^{-2z(1-l)})(1+z)^2}{z^2(1-e^{-2z})},\ z\in(0,+\infty).$$

Для оценки функции $\Phi(z)$ находим по формуле Тейлора $e^{-lz}=1-lze^{-lz_1}$, где $0<z_1\le z$ или $(1-e^{-lz})\le lze^{-lz_1}\le lz$. Поэтому при $0<z\le 1$ получаем оценку

$$\Phi(z)\le\frac{l^2z^2(1-e^{-2z})(1+z)^2}{z^2(1-e^{-2z})}\le 4l^2\le 4. \qquad (22)$$

Если же $z>1$ имеем

$$\Phi(z)\le\frac{(1-e^{-z})^2(1-e^{-2z})\left(1+\frac{1}{z}\right)^2}{(1-e^{-2z})}\le 4. \qquad (23)$$

Для оценки нормы u_1 применим известное неравенство Юнга (см. [2])

$$\|u_1\|\le\left\|\int_0^d K(y,x)g(x)dx\right\|\le$$
$$\le\sqrt{\sup_x\int_0^d|K(y,x)|\,dy\,\sup_y\int_0^d|K(y,x)|\,dx}\,\|g\|.$$

Отсюда после возведения в квадрат и умножения на $(1+r)^4$ получаем

$$(1+r)^4\|u_1\|^2\le\frac{(1+ad)^4}{a^4d^4}\left(\sup_x\int_0^d(1+adr)^2|K(y,x)|\,dy+\right.$$
$$\left.+\sup_y\int_0^d(1+adr)^2|K(y,x)|\,dy\right)\|g\|^2.$$

Из оценок (22) и (23) следует

$$\sup_y\int_0^d(1+adr)^2|K(y,x)|\,dy\le 4d^2;$$
$$\sup_y\int_0^d(1+adr)^2|K(y,x)|\,dx\le 4d^2.$$

Следовательно,

$$(1+r)^4\|u_1\|^2\le 16\left(d+\frac{1}{a}\right)^4\|g\|^2. \qquad (24)$$

Для оценки нормы u_0 воспользуемся определением u_0 и видом функций $v_1(y)$ и $v_2(y)$. Тогда найдем

$$\int_0^d|u_0|^2\,dy=\int_0^d\frac{(e^{-ar(d-y)}-e^{-ar(d+y)})^2}{(1-e^{-2adr})^2}\,dy=$$
$$=\frac{1-e^{-4adr}-4adre^{-2adr}}{2ar(1-e^{-2adr})^2}.$$

Сделав замену $z=adr$, получаем

$$\int_0^d|u_0|^2\,dy=\left(\frac{d}{2z}\right)\frac{1-e^{-4z}-4ze^{-2z}}{(1-e^{-2z})^2}.$$

Оценим функцию $S_1(z)=\frac{(1-e^{-4z}-4ze^{-2z})(1+z)}{z(1-e^{-2z})^2}$.

Легко показать, что при любом $z>0$ $|S_1(z)|\le\frac{3}{2}$.

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\int_0^d|u_0(y)|^2\,dy\le\frac{d}{2}\frac{|S_1(z)|}{(1+z)}\le\frac{d}{2}\frac{3}{2(1+z)}=\frac{3d}{4(1+z)}.$$

И, следовательно, при $z=adr$

$$|v_0|^2\int_0^d(1+r)^4|u_0|^2\,dy\le\frac{3}{4}|v_0|^2(1+r)^3\frac{1+ad}{a}. \qquad (25)$$

Из (24) и (25) получаем

$$(1+r)^4\|v(y)\|^2 \le (1+r)^4\|u_1\|^2 + (1+r)^4|v_0|^2\|u_0\|^2 \le$$

$$\le 16\left(\frac{1+ad}{a}\right)^4\|g\|^2 + \frac{3}{4}|v_0|^2(1+r)^3\frac{1+ad}{a}. \tag{26}$$

Для оценки нормы $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ воспользуемся очевидным неравенством

$$|r|^2\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2 \le |r|^2|v_0|^2\left\|\frac{\partial u_0}{\partial y}\right\|^2 + |r|^2\left\|\frac{\partial u_1}{\partial y}\right\|^2. \tag{27}$$

Из определения $u_0(y)$ находим

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \imath\varpi r u_0(y) + e^{-\imath\varpi r(d-y)}m_0(y), \tag{28}$$

где $m_0(y) = \dfrac{are^{-ar(d-y)}(1+e^{-2ary})}{1-e^{-2adr}}$.

Оценим норму $m_0(y)$

$$\int_0^d |m_0(y)|^2\,dy = \frac{ar(1-e^{-4adr}+4adre^{-2adr})}{2(1-e^{-2adr})^2}.$$

Положим $adr = z$, тогда последнее выражение перепишется в виде

$$\int_0^d |m_0(y)|^2\,dy = \frac{z(1-e^{-4z}+4ze^{-2z})}{2d(1-e^{-2z})^2}.$$

Оценим функцию $S_2(z) = \dfrac{z(1-e^{-4z}+4ze^{-2z})}{2(1+z)(1-e^{-2z})^2}$. При $0 \le z < 2$ по формуле Тейлора $e^{-2z} = 1-2ze^{-2z_1}$, $0 < z_1 < z$, следовательно, $1-e^{-2z} = 2ze^{-2z_1} > 2ze^{-2z}$. Тогда

$$(1-e^{-2z})^2 > 4z^2e^{-4z}. \tag{29}$$

Аналогично при $0 \le z < 2$ по формуле Тейлора находим

$$e^{-4z} = 1-4z+\frac{(4z)^2}{2}e^{-4z_1} \ge 1-4z.$$

Следовательно,

$$1-e^{-4z}+4ze^{-2z} \le 4z(1+e^{-2z}). \tag{30}$$

Из (29) и (30) получаем

$$S_2(z) \le \frac{4z^2(1+e^{-2z})}{2\cdot 4\cdot z^2\cdot e^{-4z}(1+z)} \le \frac{1+e^{-2z}}{2e^{-4z}} \le \frac{e^8}{2}. \tag{31}$$

Рассмотрим далее случай $z > 2$. Так как при $z \ge 2$

$$ze^{2z} \le 2e^{-4}. \tag{32}$$

Кроме того, при $z > 2$

$$(1-e^{-2z})^2 \ge (1-e^{-4})^2. \tag{33}$$

Таким образом, из (31) и (32) получаем

$$S_2(z) \le \frac{z}{z+1}\cdot\frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2} \le \frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2}. \tag{34}$$

Окончательно из (31) и (34) находим

$$S_1(z) \le \frac{e^8}{2} + \frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^d |m_0(y)|^2\,dy \le \frac{(z)}{d}\left[\frac{e^8}{2}+\frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2}\right] = \frac{1+ard}{d}\left[\frac{e^8}{2}+\frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2}\right]. \tag{35}$$

Применяя (30) и (35) в (28) , приходим к оценке

$$|v_0|^2\int_0^d ()^2\left|u_2'(1+r)\right|^2 dy \le$$

$$\le |v_0|^2\left[|\varpi|^2\int_0^d (1+r)^4|u_0(y)|^2\,dy + \int_0^d (1+r)^2|m_0(y)|^2\,dy\right] \le$$

$$\le \frac{(1+r)^3}{4}|v_0|^2\cdot 3\left(\frac{1+ad}{a}\right)|\varpi|^2 +$$

$$+(1+r)^3|v_0|^2\frac{1+ard}{(1+r)d}\left[\frac{e^8}{2}+\frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2}\right].$$

Следовательно,

$$|v_0|^2(1+r)^2\|u_0'(y)\|^2 \le$$

$$\le (1+r)^3|v_0|^2\left[\frac{3}{4}\left(\frac{1+ad}{a}\right)|\varpi|^2 + \frac{1+ard}{(1+r)d}\left[\frac{e^8}{2}+\frac{1+8e^{-4}}{2(1-e^{-4})^2}\right]\right]. \tag{36}$$

Перейдем к оценке нормы производной решения неоднородного уравнения. Из определения $u_1(y)$ находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^y K_1(y,x)g(x)dx\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_y^d K_2(y,x)g(x)dx\right) + K_1(y,y)g()x -$$

$$-K_2(y,y)g(x) + \int_0^y \frac{\partial}{\partial y}(K_1(y,x)g(x)dx) + \int_y^d \frac{\partial}{\partial y}(K_2(y,x)g(x)dx) = \tag{37}$$

$$\int_0^y \frac{\partial}{\partial y}(K_1(y,x)g(x)dx) + \int_y^d \frac{\partial}{\partial y}(K_2(y,x)g(x)dx).$$

При этом мы учли, что $K_1(y,y) = K_2(y,y) = 0$.

Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial y}K_1(y,x) = \imath r\varpi K_1(y,x) + \frac{m_1(y,x)}{e^{\imath r\varpi(x-y)}}, \quad (38)$$

где $m_1(y,x) = \dfrac{e^{-ar(y-x)}(1-e^{-2arx})(1+e^{-2ar(d-y)})}{2(1-e^{-2adr})}$.

$$\frac{\partial}{\partial y}K_2(y,x) = \imath r\varpi K_2(y,x) + \frac{m_2(y,x)}{e^{\imath r\varpi(x-y)}}, \quad (39)$$

где $m_2(y,x) = \dfrac{e^{-ar(x-y)}(1-e^{-2ary})(1+e^{-2ar(d-x)})}{2(1-e^{-2adr})}$.

Применяя (38) и (39) в (37) , получаем

$$\frac{\partial u_1(y)}{\partial y} = \imath r\varpi u_1(y) + \int_0^y e^{-\imath r\varpi(x-y)}m_1(y,x)g(x)dx -$$

$$-\int_y^d e^{-\imath r\varpi(x-y)}m_2(y,x)g(x)dx.$$

Следовательно,

$$r\frac{\partial u_1(y)}{\partial y} = \imath r^2\varpi u_1(y) + \int_0^y e^{-\imath r\varpi(x-y)}rm_1(y,x)g(x)dx -$$

$$-\int_y^d e^{-\imath r\varpi(x-y)}rm_2(y,x)g(y,x)dx =$$

$$= ir^2\varpi u_1(y) + \int_0^d e^{-\imath r\varpi(x-y)}m(y,x)g(x)dx,$$

где $m(y,x) = \begin{cases} rm_1(y,x), x<y \\ rm_2(y,x), x>y \end{cases}$.

Тогда

$$\left\|r\frac{\partial u_1}{\partial y}\right\| \le |\varpi|\left\|r^2u_1\right\| + \left\|\int_0^d m(y,x)|g(x)|\,dx\right\|. \quad (40)$$

Воспользуемся неравенством Юнга (см. [2])

$$\left\|\int_0^d m(y,x)|g(x)|\,dx\right\| \le$$

$$\le\sqrt{\sup_x\int_0^d m(y,x)dy\cdot\sup_y\int_0^d m(y,x)dx}\,\|g\|. \quad (41)$$

Оценим

$$\sup_y\int_0^d m(y,x)dx \le$$

$$\le\sup_y\int_0^y rm_1(y,x)dx + \sup_y\int_y^d rm_2(y,x)dx =$$

$$= \frac{(1-e^{-ary})^2(1+e^{-2ar(d-y)})}{2a(1-e^{-2adr})} + \frac{(1-e^{-ary})(1+e^{-2ar(d-y)})^2}{2a(1-e^{-2adr})}.$$

Очевидно, $\sup_y\int_0^y rm_1(y,x)dx = \sup_y\int_y^d rm_2(y,x)dx =$

$=\sup_y\dfrac{S_3}{2a(1-e^{-2adr})}$, где $S_3 = (1-e^{-ary})^2(1+e^{-2ar(d-y)})$. Легко показать, что $S_3(y) \le 2(1-e^{-ard})^2$. Следовательно, $\sup_y\int_0^d m(y,x)dx \le \dfrac{2\cdot 2(1-e^{-ard})^2}{2a(1-e^{-2adr})} \le \dfrac{2}{q}$. Проведя аналогичные рассуждения для $\sup_x\int_0^d m(y,x)dx$ получаем $\int_0^d m(y,x)dx \le \dfrac{1}{a}$, следовательно $\left\|\int_0^d m(y,x)dx\,|g(x)|\,dx\right\| \le \dfrac{\sqrt{2}}{a}\|g\|$, подставляя в (44) получаем,

$$\left\|r\frac{\partial u_1}{\partial y}(y)\right\| \le |\varpi||v_0|\left\|r^2u_0\right\| + \frac{\sqrt{2}}{a}\|g\|. \quad (42)$$

Из уравнения (15) следует оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\|^2 \le 4|\varpi|^2\left\|r\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2 + |c|^2\left\|r^2v(y)\right\|^2 + \|g\|^2. \quad (43)$$

Если положить $|\omega|\le 1$, учитывая, что $r=|\xi|$ и, используя оценки (36), (37),(27) и (43), получаем

$$(1+|\xi|)^4\|v\|^2 + |\xi|^2\left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\|^2 \le$$

$$\le(1+|\xi|)^3\left[3\frac{1+d\sqrt{c-1}}{\sqrt{c-1}} + 10c_3 + 6|c|\frac{1+d\sqrt{c-1}}{\sqrt{c-1}}\right]\left|v_0^2\right| +$$

$$+\left[8\left(\frac{1+d\sqrt{c-1}}{\sqrt{c-1}}\right)^2 + 64\left(\frac{1+d\sqrt{c-1}}{\sqrt{c-1}}\right)^4 +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{c-1} + 1 + 16\frac{1+d\sqrt{c-1}}{\sqrt{c-1}} + 8c_1\right]\|g\|^2,$$

где

$$c_3 = 3\frac{1+d\sqrt{c-1}}{\sqrt{c-1}} + \frac{1+|\xi|\sqrt{c-1}}{d\sqrt{c-1}}\left(e^8 + \frac{1+8e^{-4}}{(1-e^{-4})^2}\right).$$

Обозначив коэффициент перед $(1+|\xi|)^3|v_0|^2$ через c_4, а перед $\|g\|^2$ — c_5 и, выбрав $c=\{c_2,c_3\}$, окончательно получаем оценку (17).

Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает разрешимость задачи в $E^{n-1}\times(0,d)$ вида

$$M^\delta\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w = h(x,y); \quad (44)$$

$$w_{|y=0} = w_{|y=d} = 0, \qquad (45)$$

где $\nu \geq 0$ — параметр; оператор M^{δ} построен по оператору M (см. (10)) таким образом, что его старшая часть $M^{0\delta}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ имеет вид

$$M^{0\delta}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \chi_0(\delta, x) M^0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) +$$
$$+ \left(1 - \chi_0(\delta, x)\right) M^0\left(x^0, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где функция $\chi(\delta, x)$ построена выше (по точке $x^0 \in D$).

В силу условия 1.4 при достаточно малом $\delta > 0$ коэффициенты оператора $M^{0\delta}$ ε-малоизменяются по $x \in E^{n-1}$. Это позволяет установить следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1.1—1.4 и $\sigma = 0$. Тогда существует $\nu_0 > 0$ такое, что при любых $\nu \geq \nu_0$, $h(y) \in L_2(0,d)$ существует единственное решение $w(x,y)$, принадлежащее пространству Соболева $H^2(E^{n-1} \times (0,d))$, и справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\|^2_{L_2(E^{n-1}\times(0,d))} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x_k}\right\|^2_{L_2(E^{n-1}\times(0,d))} +$$
$$+ \sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l}\right\|^2_{L_2(E^{n-1}\times(0,d))} + \nu^2 \|w\|^2_{L_2(E^{n-1}\times(0,d))} \leq$$
$$\leq c_2 \|g\|^2_{L_2(E^{n-1}\times(0,d))}.$$

§ 3. Построение решения в окрестности граничной точки области D

Рассматриваемый здесь случай соответствует точке $x^s \notin S$ (см. § 1). В этом случае с помощью отображения T_{x^s}, условий 0.1—0.4 и преобразования J_α изучаемая задача может быть сведена (локально в окрестности $\mathcal{A}_{x^s}(\delta)$) к соответствующей задаче в $E_+^{n-1} \times (0,d)$. В дальнейшем для упрощения изложения переменные $\tilde{x} \in E^{n-1}$ будем обозначать через x.

Введем в рассмотрение оператор

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \theta\gamma_{n-1}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_{n-1}} - \sum_{k=1}^{n-2}\gamma_k \frac{\partial^2}{\partial y \partial x_k} +$$
$$+ 2\theta\sum_{l=1}^{n-2}\gamma_{n-1,l}\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}\partial x_l} + \sum_{k,l=1}^{n-2}\gamma_{kl}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \gamma_{n-1,n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}, \qquad (46)$$

где $\theta \in [0,1]$ — параметр, и рассмотрим задачу

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) w = h(x,y);$$
$$w_{x_{n-1}=0} = 0; \quad w\big|_{y=0} = w\big|_{y=d} = 0. \qquad (47)$$

В силу условия 1.3 оператор M удовлетворяет условию

$$m(\eta,\xi) = \eta^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{nk}\eta\xi_k + \sum_{k,l=1}^{n-1}\gamma_{kl}\xi_k\xi_l \geq$$
$$\geq \nu_1\left(\eta^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\xi_k^2\right) \qquad (48)$$

при любых $(\eta,\xi) \in E^{n-1} (\nu_1 > 0)$ (постоянная $\nu_1 > 0$, вообще говоря, не зависит от $x^i \in S$). Соответствующая квадратичная форма для оператора M_θ имеет вид

$$m_\theta(\eta,\xi) = \eta^2 + \theta\gamma_{n,n-1}\eta\xi_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2}\gamma_{nk}\eta\xi_k +$$
$$+ 2\theta\sum_{k=1}^{n-2}\gamma_{n-1,k}\xi_{n-1}\xi_k + \sum_{k,l=1}^{n-2}\gamma_{kl}\xi_k\xi_l + \gamma_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2. \qquad (49)$$

Из (49) и непосредственно из (48) при любом $\theta \in [0,1]$ следует

$$m_\theta(\eta,\xi) = m(\eta,\xi', \theta\xi_{n-1}) + (1-\theta^2)\gamma_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 \geq$$
$$\geq \nu_1\left(\eta^2 + \theta^2\xi_{n-1}^2 + \sum_{k=1}^{n-2}\xi_k^2\right) + \nu_1(1-\theta^2)\xi_{n-1}^2 = \qquad (50)$$
$$= \nu_1\left(\eta^2 + \sum_{k=1}^{n-2}\xi_k^2\right).$$

Таким образом, форма $m_\theta(\eta,\xi)$ при любом $\theta \in [0,1]$ удовлетворяет условию эллиптичности с той же постоянной $\nu_1 > 0$.

Рассмотрим далее в $E^{n-1} \times (0,d)$ следующую задачу

$$M_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) w - \nu w = h(x,y);$$
$$w_{y=0} = w\big|_{y=d} = 0, \qquad (51)$$

где $\nu_1 \geq 0$ — параметр, M_0 — главная часть оператора M.

Лемма 1. При выполнении условия (48) для любых $\nu_1 \geq 0$ и $h(x,y) \in L_2(E^{n-1} \times (0,d))$, существует решение $w(x,y)$ задачи (51) , принадлежащее пространству Соболева $H^2(E^{n-1} \times (0,d))$, и справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\|^2+\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y}\right\|^2+\sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l}\right\|^2+\nu^2\|w\|^2 \le c_1^2\|h\|^2. \tag{52}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(E^{n-1}\times(0,d))$, постоянная $c_1 > 0$ не зависит от ν. При этом если $h(x,y)$ является нечетной (четной) функцией x_{n-1}, то и решение $w(x,y)$ является нечетной (четной) функцией x_{n-1}.

Доказательство. Наряду с задачей (51) рассмотрим задачу

$$M_0\left(\imath\xi,\frac{\partial}{\partial y}\right)v-\nu v=g(\xi,y), 0<y<d$$

$$v|_{y=0}=v|_{y=d}=0,$$

где $v=F_{x\to\xi}[w(x,y)]$, $g=F_{x\to\xi}[h(x,y)]$. Из результатов § 2 следует, что решение задачи существует при любых (ξ,ν), $\xi\in E_{n-1}$, $\nu\ge 0$, и представимо в виде

$$v(\xi,\nu,y)=\int_0^d K(\nu,\xi,y,s)g(\xi,s)ds=$$

$$=\int_y^d K_1(\nu,\xi,y,s)g(\xi,s)ds+\int_0^y K_2(\nu,\xi,y,s)g(\xi,s)ds,$$

где $K_1(\nu,\xi,y,s)$, $K_2(\nu,\xi,y,s)$ определены в (21) (с заменой ξ на $(\xi,\sqrt{\nu})$). В теореме 1 доказана оценка для v:

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\|^2_{(0,d)}+\left\|r_\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2_{(0,d)}+\left\|r_\nu^2 v\right\|^2_{(0,d)}\le c\|g\|^2_{(0,d)},$$

где $r_\nu=\sqrt{|\xi|^2+\nu}$. После интегрирования по $\xi\in E_{n-1}$ из неравенства вытекает справедливость неравенства (52).

Непосредственно из представления (21) и структуры формы $m_0(\eta,\xi,\nu)$ следует, что функции $K_1(\nu,\xi,y,s)$ и $K_2(\nu,\xi,y,s)$ являются четными функциями $\xi_{n-1}\in E^1$.

Полагая $w(x,y)=F^{-1}_{\xi\to x}[v(\nu,\xi,y)]$, получили решение задачи (51), принадлежащее в силу оценки (52) пространству Соболева $H^2(E^{n-1}\times(0,d))$.

Если функция $h(x,y)$ — нечетная (четная) функция x_{n-1}, то и функция $g(\xi,y)=F_{x\to\xi}[h(x,y)]$ нечетная (четная) функция ξ_{n-1}. Тогда функция, $\nu(\xi,v,y)$ также нечетная (четная) функция ξ_{n-1} и, следовательно, функция $w(x,y)$ нечетная (четная) функция x_{n-1}.

Лемма доказана.

Следствие 1. При выполнении условий леммы 6.1 и $h(x,y)\in L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$ существует решение $w(x,y)$ задачи

$$M_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w-\nu^2 w=h(x,y),\ x\in E_+^{n-1},\ 0<y<d \tag{53}$$

$$w|_{x_{n-1}=0}=0, \tag{54}$$

$$w|_{y=0}=w|_{y=d}=0. \tag{55}$$

Для решения $w(x,y)$ справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\|^2+\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y}\right\|^2+\sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l}\right\|+\nu^2\|v\|^2\le c_{11}^2\|g\|^2 \tag{56}$$

(нормы в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$).

Для доказательства построим функцию $\hat{h}(x,y)$, продолжив $h(x,y)$ нечетным образом по x_{n-1} на E^{n-1}. Поскольку $\hat{h}(x,y)$ принадлежит $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$, то существует решение $\widehat{w}(x,y)$ задачи (51), принадлежащее $H_2(E^{n-1}\times(0,d))$. По лемме 1 функция $\widehat{w}(x,y)$ является нечетной функцией x_{n-1} и, следовательно, в силу теорем вложения Соболева является непрерывной функцией x_{n-1} со значениями в $L_2(E^{n-2}\times(0,d))$. Отсюда необходимо следует, что $\widehat{w}(x,y)\big|_{x_{n-1}}=0$. Решение задачи (53)—(55) можно получить как сужение $\widehat{w}(x,y)$ на $E_+^{n-1}\times(0,d)$: $w(x,y)=\widehat{w}(x,y)\big|_{E_+^{n-1}\times(0,d)}$. Оценка (56) вытекает непосредственно из оценки (52).

В силу следствия 1 существует оператор $A_0^{-1}: L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))\to H^2(E_+^{n-1}\times(0,d))$, задающий решение задачи (53)-(55). В данном конкретном случае оператор A_0^{-1} имеет даже аналитическое представление

$$A_0^{-1}h=F^{-1}_{\xi\to x}\left[\int_0^d K(\nu,\xi,y,s)F_{x\to\xi}\left[\hat{h}(x,s)\right]ds\right]\Bigg|_{E_+^{n-1}}. \tag{57}$$

Перейдем к изучению разрешимости задачи

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w-\nu w=h(x,y),\ x\in E_+^{n-1},\ 0<y<d \tag{58}$$

$$w\big|_{x_{n-1}=0} = 0,\ \ w\big|_{y=0} = w\big|_{y=d} = 0 \qquad (59)$$

при всех значениях параметра $\theta \in (0,1]$. Будем разыскивать решение задачи (58)—(59) в виде $w = A_0^{-1}\Omega_\theta$, $\Omega_\theta \in L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$. Учитывая, что

$$M_\theta\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = M_0\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) + \theta R_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где

$$R_1\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\gamma_{n,n-1}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x_{n-1}} + 2\sum_{l=1}^{n-2}\gamma_{n-1,l}\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}\partial x_l}.$$

Тогда решение задачи (58)—(59) сведется к решению в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$ задачи

$$\Omega_\theta + \theta T_0\Omega_\theta = h, \qquad (60)$$

где $T_0 = R_1A_0^{-1}$.

Если $\|T_0\|_{L_2\to L_2} = \|R_1A_0^{-1}\|_{L_2\to L_2} < \dfrac{1}{\theta}$, то существует обратный оператор $(I+\theta T_0)^{-1}$ в $L_2(E_{n-1}^{+}\times(0,d))$, задающий решение уравнения в (60) $\Omega_\theta = (I+\theta T_0)^{-1}h$.

Таким образом, при достаточно малых $\theta > 0$ существует решение уравнения (60) и, следовательно, задачи, (58)—(59) имеющее вид

$$w_\lambda = A_0^{-1}(I+\theta T_0)^{-1}h = A_\theta^{-1}h,$$

где $A_\theta^{-1} = A_0^{-1}(I+\theta T_0)^{-1} : L_2(E_+^{n-1}\times(0,d)) \to$ $\to H^2(E_+^{n-1}\times(0,d))$.

Для того, чтобы построить решение задачи (58)—(59) при любых $\theta \in (0,1]$ применим известный метод продолжения по параметру θ.

Предположим, что при некотором $\theta \in (0,1]$ существует решение задачи (58)—(59), причем оператор представим в виде $A_\theta^{-1} = A_0^{-1}Q$, где Q равномерно по $\theta \in (0,1]$ ограниченный оператор, действующий в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$.

Рассмотрим далее оператор $M_{\theta+\Delta\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ при некотором $\Delta\theta > 0$ $(\theta+\Delta\theta \le 1)$. Так как $M_{\theta+\Delta\theta} = M_\theta + \Delta\theta R_1\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, то как и выше после замены $v_{\theta+\Delta\theta} = A_\theta^{-1}\Omega_{\Delta\theta}$ мы приходим к уравнению в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$, имеющему вид

$$\Omega_{\Delta\theta} + \Delta\theta T_\theta\Omega_{\Delta\theta} = h, \qquad (61)$$

где $T_\theta = R_1A_\theta^{-1}$.

Если известно, что оператор T_θ ограничен в L_2, то выбрав $\Delta\theta > 0$ настолько малым, что $\Delta\theta\|T_\theta\|_{L_2\to L_2} < 1$, можно построить оператор $(I+\Delta\theta T_\theta)^{-1}$, действующий в $L_2(E_{+1}^{n-1}\times(0,d))$, задающий решение уравнения (60)

$$\Omega_{\Delta\theta} = (I+\Delta\theta T_\theta)^{-1}h.$$

Следовательно, существует решение задачи (58)—(59) при $\theta+\Delta\theta$, имеющее вид $w_{\theta+\Delta\theta} = A_\theta^{-1}(I+\Delta\theta T_\theta)^{-1}g = A_0^{-1}Q(I+\Delta\theta T_\theta)^{-1}h$. Для того, чтобы этот процесс можно было продолжить вплоть до $\theta = 1$, следует показать, что норма в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$ оператора $T_\theta = R_1A_\theta^{-1}$ равномерно по $\theta \in (0,1]$ ограничена.

Лемма. 2. Пусть выполнено условие (48) и при $\theta \in (0,1]$ и $\nu \ge 0$ существует решение задачи (58)—(59), принадлежащее $H^2(E_+^{n-1}\times(0,d))$.

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_k}\right\|^2 + \sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l}\right\|^2 + \nu^2\|w\|^2 \le \nu_0\|h\|^2 \qquad (62)$$

(норма в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$; постоянная $\nu_0 > 0$ не зависит от $\nu \ge 0$ и $\theta \in (0,1]$).

Доказательство. После преобразования Фурье $F_{x'\to\xi'}(x' \in E^{n-2},\ \xi' \in E^{n-2})$

$$M_\theta\left(\imath\xi',\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\frac{\partial}{\partial y}\right)v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \theta\gamma_{n,n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}} - $$
$$-\imath\sum_{k=1}^{n-2}\gamma_k\xi_k\frac{\partial v}{\partial y} + 2\theta\sum_{l=1}^{n-2}\gamma_{n-1,l}\xi_l\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}} - \sum_{k,l=1}^{n-2}\gamma_{kl}\xi_k\xi_l v +$$
$$+\gamma_{n-1,n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2} - \nu v = g$$

задачу (58)—(59) можно записать в виде

Умножим (61) на $\bar v(\xi',x_{n-1},y)$ и проинтегрируем полученное тождество по $x_{n-1} \in (0,+\infty)$ и $y \in (0,d)$. Далее заметим, что почти все $\xi' \in E^{n-2}$ принадлежат $H^2((0,\infty)\times(0,d))$. Поэтому с помощью граничных условий и интегрирования по частям устанавливаем

$$\int_0^{+\infty}\int_0^d\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\bar v\,dy\,dx_{n-1} = -\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial y}}\right)dy\,dx_{n-1};$$
$$\int_0^{+\infty}\int_0^d\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}\bar v\,dy\,dx_{n-1} = -\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial y}}\right)dy\,dx_{n-1};$$
$$\int_0^{+\infty}\int_0^d\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2}\bar v\,dy\,dx_{n-1} = -\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}}\right)dy\,dx_{n-1};$$
$$(63)$$

Используя (63) можно записать

$$\int_0^{+\infty}\int_0^d M_\theta\left(\iota\xi', \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial y}\right) v\bar{v}\,dy\,dx_{n-1} = -\int_0^{+\infty}\int_0^d m_\theta^*\left(\eta^*, \xi^*\right) dy\,dx_{n-1},$$

где

$$m_\theta^*(\eta^*, \xi^*) = \eta^*\bar{\eta}^* + \theta\gamma_{n-1}\eta^*\bar{\xi}_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2}\gamma_k\eta^*\xi_k^* + \theta\sum_{k=1}^{n-2}\gamma_{k,n-1}\xi_k^*\bar{\xi}_{n-1}^* + \theta\sum_{l=1}^{n-2}\gamma_{n-1,l}\xi_{n-1}^*\bar{\xi}_l^* + \sum_{k,l=1}^{n-2}\gamma_{kl}\xi_k^*\bar{\xi}_l^* + \gamma_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^*\bar{\xi}_{n-1}^*,$$

$$\eta^* = -\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y},\ \ \xi_{n-1}^* = \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x_{n-1}},\ \ \xi_k^* = \iota\xi_k\tilde{v},\ \ 1 \le k \le n-2.$$

Как известно, (см., например, [3]) при выполнении условия (48) для любых комплексных η^*, ξ^* $\operatorname{Re} m_\theta^*(\eta^*, \xi^*) \ge \nu_1\left[\left|\eta^*\right|^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left|\xi_k^*\right|^2\right]$. Поэтому $\operatorname{Re}\int_0^{+\infty} m_\theta^*(\eta^*, \xi^*) dy\,dx_{n-1} \ge \nu_1\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right|^2 + \sum_{k=1}^{n-2}\xi_k^2\left|v\right|^2\right)dy\,dx_{n-1}$ и, следовательно,

$$\nu_1\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right|^2 + \left|\xi'\right|^2\left|v\right|^2\right)dy\,dx_{n-1} + \nu\left\|v\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)} \le$$
$$\le -\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(M_\theta\left(\iota\xi', \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial y}\right)v - \nu v\right)\bar{v}\,dy\,dx_{n-1} =$$
$$= -\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}\int_0^d g\bar{v}\,dy\,dx_{n-1} \le \int_0^{+\infty}\int_0^d |g||v|\,dy\,dx_{n-1}. \qquad (64)$$

Применим в правой части оценки (64) элементарное неравенство $|a||b| \le \varepsilon|a|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}|b|^2$ $(\varepsilon > 0)$, положив $b = g,\ a = v,\ \varepsilon = \frac{\nu_1}{2}\left|\xi'\right|^2 + \frac{\nu^2}{2}$.

Тогда из(63) и (64) получим

$$\nu_1\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right|^2\right)dy\,dx_{n-1} + \frac{\nu_1}{2}\left|\xi'\right|^2\left\|v\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)} + \frac{\nu}{2}\left\|v\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)} \le \frac{1}{2\nu_1\left|\xi'\right|^2 + 2\nu}\left\|g\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)}.$$

Отсюда следует

$$2\nu_1(\nu_1\left|\xi'\right|^2 + \nu)\int_0^{+\infty}\int_0^d\left(\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right|^2\right)dy\,dx_{n-1} + \nu_1\left|\xi'\right|^2(\nu_1\left|\xi'\right|^2 + \nu)\left\|v\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)} + \nu^2\left\|v\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)} \le \left\|g\right\|^2_{(0,+\infty)\times(0,d)}. \qquad (65)$$

В неравенстве (65) фактически оценены образы Фурье производных $\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_{n-1}}, \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_{k1}}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_{n-1}\partial x_k}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l}$ $(1 \le k, l \le n-2)$. Для доказательства леммы нам осталось оценить производные $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2}$. Для этого прежде всего установим тождество

$$\int_0^{+\infty}\int_0^d\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial x_{n-1}^2}dy\,dx_{n-1} = \int_0^{+\infty}\int_0^d\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_{n-1}}\overline{\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_{n-1}}}dy\,dx_{n-1}, \qquad (66)$$

справедливое для любой функции $w \in H^2((0,+\infty)\times(0,d))$, удовлетворяющей условиям (59) и равной нулю при $x_{n-1} > N$ (N — любое положительное число). Действительно, для таких функций равенство (66) доказывается с помощью интегрирования по частям вначале по $y \in (0,d)$ (при этом учитывается, что $\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_{n-1}^2}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_{n-1}^2}\right|_{y=d} = 0$), а затем по $x_{n-1} \in (0,+\infty)$ (при этом учитывается, что $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{x_n=0} = 0$ и что функция w финитна по x_{n-1} на бесконечности). После этого предельным переходом тождество (65) устанавливается для любой функции $w \in H^2((0,\infty)\times(0,d))$, удовлетворяющей условиям (59).

Запишем далее $M_\theta\left(\iota\xi', \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial y}\right)v$ в виде

$$M_\theta\left(\iota\xi', \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial y}\right)v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \theta\gamma_{n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}} - \gamma_{n-1,n-1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2} + R^2 v, \qquad (67)$$

где $R_2 v = -\imath\sum_{k=1}^{n-2}\gamma_k\xi_k\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} + 2\theta\imath\sum_{l=1}^{n-2}\gamma_{n-1,l}\xi_l\,\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}} -$
$-\sum_{k,l=1}^{n-2}\gamma_{kl}\xi_k\xi_l v + \nu v$.

Умножим (67) на $\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}}}$ и проинтегрируем полученное тождество по $x_{n-1}\in(0,+\infty)$ и $y\in(0,d)$ и после этого применим тождество (66). Тогда получим

$$\int_0^{+\infty}\int_0^d M_\theta\left(\imath\xi',\frac{\partial}{\partial x_{n-1}},\frac{\partial}{\partial y}\right) v\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}}dydx_{n-1} = \int_0^{+\infty}\int_0^d m_\theta^{**}(\eta^{**},\xi^{**})dydx_{n-1} + \int_0^{+\infty}\int_0^d R_2 v\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}}dydx_{n-1}, \tag{68}$$

где $m_\theta^{**}(\eta^{**},\xi^{**}) = \eta^{**}\overline{\eta}^{**} + \theta\gamma_{n-1}\eta^{**}\overline{\xi}^{**} + \gamma_{n-1,n-1}\xi^{**}\overline{\xi}^{**}$,

$\eta^{**} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}, \xi^{**} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2{}_{n-1}}$.

Запишем оценку (48) при $\xi' = 0,\ \eta\in R,\ \xi_{n-1}\in R$

$$m_\theta(\eta,\xi)\big|_{\xi'=0} = \eta^2 + \theta\gamma_{n,n-1}\eta\xi_{n-1} + \theta\gamma_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 \ge \nu_1(\eta^2+\xi_{n-1}^2).$$

Поэтому Re $m^{**}(\eta^{**},\xi^{**}) \ge \nu_1[|\eta^{**}|^2 + |\xi^{**}|^2]$. Из (68) тогда следует

$$\nu_1\int_0^{+\infty}\int_0^d\left[\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2{}_{n-1}}\right|^2\right]dydx_{n-1} \le -\mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\int_0^d R_2 v\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2{}_{n-1}}}dydx_{n-1} + \mathrm{Re}\int_0^{+\infty}\int_0^d g\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2{}_{n-1}}}dydx_{n-1} \le$$
$$\le \int_0^{+\infty}\int_0^d |R_2 v|\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2{}_{n-1}}\right|dydx_{n-1} + \int_0^{+\infty}\int_0^d |g|\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2{}_{n-1}}\right|dydx_{n-1}. \tag{69}$$

Если снова воспользуемся элементарным неравенством, примененном в (64), то правую часть в (69) можно оценить следующим образом

$$\int_0^{+\infty}\int_0^d |R_2 v|\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2{}_{n-1}}\right|dydx_{n-1} + \int_0^{+\infty}\int_0^d |g|\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2{}_{n-1}}\right|dydx_{n-1} \le \varepsilon\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_{n-1}^2}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + \frac{1}{2\varepsilon}\|R_2 v\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))}, \tag{70}$$

где ε — любое положительное число. Выберем в (69) $\varepsilon = \frac{\nu_1}{2}$. Тогда из (69), (70) и (65) получим

$$\nu_1\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + \frac{\nu_1}{2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} \le \frac{1}{\nu_1}\|R_2 v\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + \frac{1}{\nu_1}\|g\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))}, \tag{71}$$

где $\|R_2 v\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} \le \|g\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))}$ с постоянной $c>0$, не зависящей от $\theta\in(0,1]$ и $\nu\ge 0$,то из (71) следует , что

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_{n-1}}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^2}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + |\xi'|^2\left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + |\xi'|^2\left\|\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}}\right\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} + (|\xi'|^4+\nu^2)\|v\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))} \le c\|g\|^2_{L_2((0,+\infty)\times(0,d))}$$

Если теперь проинтегрировать последнее неравенство по $\xi\in E^{n-2}$ и воспользоваться равенством Парсеваля, то получим требуемое неравенство. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. (априорная оценка). Пусть выполнено условие эллиптичности (48).Тогда для любого решения $w\in H^2(E_{+1}^{n-1}\times(0,d))$ задачи

$$M\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\right)w - \nu w = h(y,x),\ \ y\in(0,d), x\in E_{+1}^{n-1} \tag{73}$$

$$w\big|_{x_{n-1}=0} = 0,\ \ w_{y=0} = w_{y=d} = 0, \tag{74}$$

где $M\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = M_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) + M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$,

$$M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\gamma_n\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}+\sum_{k=1}^{n-2}\gamma_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\gamma_0,$$

γ_k, $0\le k\le n$ — произвольные комплексные постоянные при $\nu\ge\nu_0$ справедлива оценка

$$\|w\|_{H_+^2}+\nu\|w\|_{L_2^+}\le\nu_{02}\|h\|_{L_2^+}, \qquad (75)$$

где полунорма в H_2^+

$$\|w\|_{H_+^2}=\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_k}\right\|_{L_2^+}^2+\sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l}\right\|_{L_2^+}^2$$

постоянная $\nu_{02}>0$.

Доказательство. Запишем уравнение (75) в виде

$$M_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w-\nu w=h(y,x)-M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w.$$

Тогда в силу леммы 2 получим ($l = 1$) оценку

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_k}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l}\right\|_{L_2^+}+\nu\|w\|_{L_2^+}\le$$

$$\le\nu_0\|h\|_{L_2^+}+\nu_0\left\|M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w\right\|_{L_2^+},$$

Кроме того, непосредственно из уравнения следует

$$\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\|_{L_2^+}\le\sum_{k=1}^{n-1}|\gamma_{nk}|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x_k}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k,l=1}^{n-1}|\gamma_{kl}|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_l}\right\|_{L_2^+}+$$

$$+\left\|M'\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right)v\right\|+\nu^2\|v\|_{L_2^+},$$

где $\|\cdot\|_{L_2^+}$ — норма в $L_2(E_+^{n-1}\times(0,d))$.

Из последних неравенств вытекает оценка

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_k}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k,l=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_k\partial x_l}\right\|_{L_2^+}+\nu\|w\|_{L_2^+}\le$$

$$\le(\max_{1\le k,l\le n}|\gamma_{kl}|+1)\nu_0\|g\|_{L_2^+}+(\nu_0+1)\left\|M'\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right)v\right\|_{L_2^+}. \qquad (76)$$

Здесь мы положили $g_{nn} = 1$.

Для оценки нормы $M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w$ заметим, что

$$\left\|M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w\right\|_{L_2^+}\le$$

$$\le|\gamma_n|\left\|\frac{\partial w}{\partial y}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k=1}^{n-1}|\gamma_k|\left\|\frac{\partial w}{\partial x_k}\right\|_{L_2^+}+|\gamma_0|\|w\|_{L_2^+}$$

и при $\nu>\nu_1$ выполняется оценка

$$\sqrt{\nu}\left(\left\|\frac{\partial w}{\partial y}\right\|_{L_2^+}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial w}{\partial x_k}\right\|_{L_2^+}+\|w\|_{L_2^+}\right)\le\frac{n+1}{\sqrt{\nu_1}}\|h\|_{L_2^+}. \qquad (77)$$

Последняя оценка вытекает из неравенства (65) после интегрирования (65) и применения равенства Парсеваля. Из (76) и (77) находим

$$\left\|M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w\right\|_{L_2^+}\le\frac{\nu_{11}}{\sqrt{\nu}}\|h\|_{L_2^+},\ \nu\ge\nu'_{11}>0, \qquad (78)$$

где $\nu_{11}=\max\limits_{0\le k<n}\{|\gamma_k|\}\dfrac{n+1}{\sqrt{\nu_1}}$.

Применим оценку (78) в правой части (76) получим требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (73)—(74). Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 4. Пусть выполнено условие эллиптичности (48). Тогда при любых $h\in L_2^+$ и $\theta\in[0,1]$ для оператора $T_\theta=R_1A_\theta^{-1}$, где R_1, A_θ^{-1} введены выше при изучении разрешимости задачи (58)—(59), справедлива оценка

$$\|T_\theta h\|_{L_2^+}\le\nu_{21}\|h\|_{L_2^+},$$

причем постоянная ν_{21} не зависит от $\nu\ge0$ и $\theta\in[0,1]$.

Доказательство. Положим $w_\theta=A_\theta^{-1}h(A_\theta^{-1}:L_2^+\to H_+^2)$. Тогда из леммы 2 получим

$$\|T_\theta h\|_{L_2^+}=\|R_1w_\theta\|_{L_2^+}\le$$

$$\le|\gamma_{n,n-1}|\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x_{n-1}}\right\|_{L_2^+}+2\sum_{l=1}^{n-2}|\gamma_{l,n-1}|\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_{n-1}\partial x_l}\right\|_{L_2^+}\le$$

$$\le\max_{1\le l<n-2}\{|\gamma_{n,n-1}|,2|\gamma_{l,n-1}|\}\nu_0\|h\|_{L_2^+}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть выполнено условие эллиптичности (48).Тогда при любом $h\in L_2^+$ и $\nu\ge\nu_{01}$ для оператора $T'=M'A_1^{-1}$, где оператор

$M'\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ введен в (73) и A_1^{-1} разрешающий оператор задачи (58)—(59) при $\theta = 1$, справедливо неравенство

$$\|T'h\|_{L_2^+} \le \frac{\nu'_{11}}{\nu}\|h\|_{L_2^+}, \qquad (79)$$

причем постоянная $\nu'_{11} > 0$ не зависит от $\sqrt{\nu} \ge \nu_{01}$.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4 . Полагая $w_1 = A_1^{-1}h$, с помощью леммы 2 находим

$$\|T'h\|_{L_2^+} = \|M'w\|_{L_2^+} \le \frac{\nu_{11}}{\nu}\|h\|_{L_2^+} \quad (\sqrt{\nu} \ge \nu_{01}).$$

Теорема 3. При выполнении условия эллиптичности (48) и любых $h \in L_+^2$ и $\sqrt{\nu} \ge \nu_1 > 0$ существует решение задачи (73)—(74). Для этого решения справедлива априорная оценка (результат леммы 3).

Доказательство. Рассмотрим вначале разрешимость задачи

$$M_1\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\right)w - \nu w = h(y,x),\ y \in (0,d),\ x \in E_+^{n-1}$$
$$w|_{x_{n-1}=0} = 0,\ w_{y=0} = w_{y=d} = 0. \qquad (80)$$

Воспользуемся методом продолжения по параметру $\theta \in (0,1]$, примененному к задаче (58)—(59). Как было показано выше в лемме 1, при $\theta = 0$ задача (58)—(59) разрешима. Переход от θ к $\theta + {}_\Delta\theta\ (\theta \in (0,1])$ при достаточно малом ${}_\Delta\theta > 0$ позволяет достичь, начиная с $\theta = 0$, значения $\theta = 1$ в задаче (58)—(59), если оценка нормы оператора $T_\theta = R_1 A_\theta^{-1}$ равномерно по $\theta \in (0,1]$. Справедливость этого утверждения установлена в лемме 4. Таким образом, за m шагов (${}_\Delta\theta m = 1$) можно перейти от значения с $\theta = 0$ к значению $\theta = 1$ и построить обратный оператор в задаче (80) по формуле $A_1^{-1} = A_0^{-1}Q$, где Q — ограниченный оператор в L_2^+, имеющий вид

$$Q = (I + {}_\Delta\theta T_{{}_\Delta\theta})^{-1}(I + {}_\Delta\theta T_{2{}_\Delta\theta})^{-1}\dots(I + {}_\Delta\theta T_{(m-1){}_\Delta\theta})^{-1}.$$

Таким образом, устанавливается разрешимость задачи (80) $w = A_1^{-1}h \in H_+^2$ при любом $\nu \ge 0$.

Доказательство разрешимости задачи (73)—(74) после замены $w = A_1^{-1}\Omega$ сводится к решению следующего уравнения в L_2^+ $\Omega + T'\Omega = h$, где $T' = R'A_1^{-1}$. Поскольку для оператора T' справедлива оценка (79), то выбрав $\nu \ge 2\nu_{11}$ можно добиться того, что $\|T'\|_{L_2^+} \le \frac{1}{2}$. Поэтому существует оператор $(I + T')^{-1}_{L_2^+ \to L_2^+}$, причем $\|(I + T')^{-1}\|_{L_2^+ \to L_2^+} \le 2$.

Таким образом, существует $\Omega = (I + T')^{-1}h$ и функция $w = A_1^{-1}(I + T')^{-1}h$ является решением задачи (73)—(74), принадлежащее $H_+^2(\nu \ge 2\nu_{11})$.

Априорная оценка решения вытекает из леммы 3.

Теорема доказана.

Замечание. Если при младших членах в теореме 3 будут переменные коэффициенты, непрерывные в области D,то результат леммы 3 сохраняется с возможной заменой константы ν_0 на некоторую новую ν_{02}.

Пусть далее точка x^i — произвольная точка, принадлежащая S. Тогда после преобразования $\tilde{x} = T^i(x)$ (см. § 1)можно рассмотреть оператор $M^\delta\left(\tilde{x},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial y}\right)$, построенный по оператору M (см. (10)) подобно тому, как по оператору M^0 был построен оператор $M^{0\delta}$ в конце § 2. В силу гладкости границы и коэффициентов исходного оператора оператор $M^\delta\left(\tilde{x},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial y}\right)$, будем рассматривать с ε — маломеняющимися коэффициентами в $E_+^{n-1} \times (0,d)$. Тогда из теоремы 3 стандартным способом может быть получена

Теорема 4. Пусть выполнены условия 0.1—0.4, 1.3—1.4 и $\delta \in (0,\delta_0)$ при достаточно малом $\delta_0 > 0$. Тогда при любом $h(\tilde{x},y) \in L_2^+$ и $\nu \ge \nu_4 > 0$ существует решение $w(\tilde{x},y) \in H^2(E_+^{n-1})$ задачи

$$M^\delta\left(\tilde{x},\frac{\partial}{\partial\tilde{x}},\frac{\partial}{\partial y}\right)w - \nu w = h;$$
$$w|_{\tilde{x}_{n-1=0}} = 0;\ w|_{y=0} = w|_{y=d} = 0.$$

§ 4. Разрешимость задачи (1)—(2) в $D \times (0,\infty)$

Оценка решения и разрешимость задачи

$$L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u - \nu u = f(x,t) \qquad (81)$$

$$u|_{S\times(0,\infty)} = 0;\ u|_{t=+0} = \lim_{t\to+\infty} = 0 \qquad (82)$$

являются следствием результатов § 2 и § 3 и предположений § 1. Для того чтобы сформулировать основной результат работы, введем необходимые функциональные пространства и нормы в этих пространствах. Построим конечное покрытие $\bar{D}$, состоящей из конечной системы окрестностей $\mathcal{A}_{x^i}(2\delta)$ точек $x^i \in \bar{D}$, $1 \le i \le N$, причем при $1 \le i \le i_0$ окрестности $\mathcal{A}_{x^i}(2\delta)$ являются строго внутренними для D, а при $i_0 + 1 \le i \le N$ точки x^i принадлежат S. Предполагается, что $\max\limits_{1\le i\le N} \delta_i \le \delta_0$ и δ_0 — достаточно малое положительное число. Пусть функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty$ образуют разложение единицы, соответствующее этому покрытию:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \equiv 1 \text{ при } x \in \bar{D};\ supp\ \varphi_i \subset \mathcal{A}_{x^i}(2\delta);$$

$$\varphi_i(x) = 1 \text{ при } x \in \mathcal{A}_{x^i}(\delta).$$

Определение 1. Функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$, если функция $\dfrac{u(x,t)}{\sqrt{\alpha(t)}}$ интегрируема в квадрате по $D \times (0,\infty)$. Норма в $L_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$ определяется формулой

$$\|u\|_{L_{2,\alpha}} = \left\{ \int_0^\infty \int_{E_{n-1}} |u(x,t)|^2 \, dx \frac{dt}{\alpha(t)} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Весовая функция $\alpha(t)$ введена в § 1.

Определение 2. Функция $u(x,t) \in L_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$ принадлежит пространству $\mathcal{H}^2_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$, если существует покрытие $\mathcal{A}_{x^i}(2\delta)$ $1 \le i \le N$ области $\bar{D}$ такое, что конечна норма

$$\|u\|_{\mathcal{H}^2_{2,\alpha}} = \left\{ \sum_{i=1}^{i_0} \left(\|\varphi_i u\|^2_{L_{2,\alpha}} + \sum_{|\beta'|+\beta_n=2} \left\| D_x^{\beta'} \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\beta_n} (\varphi_i u) \right\|^2_{L_{2,\alpha}} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=i_0+1}^{N} \left(\|\varphi_i u\|^2_{L^+_{2,\alpha}} + \sum_{|\beta'|+\beta_n=2} \left\| D_x^{\beta'} \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\beta_n} (\varphi_i u) \right\|^2_{L^+_{2,\alpha}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{83}$$

где $\|u\|_{L^+_{2,\alpha}} = \left\{ \int_0^\infty \int_{E^+_{n-1}} |u(x,t)|^2 \, dx \dfrac{dt}{\alpha(t)} \right\}^{\frac{1}{2}}$;

$\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$; $(\varphi_i u) = \varphi_i(x) u(x,t)\big|_{x = T_i^{-1}(\tilde{x})}$.

Можно показать (см. [1]), что нормы (83), порожденные различными покрытиями $\{\mathcal{A}_{x^i}(2\delta)\}_i$ области $\bar{D}$ эквивалентны. Если ввести функцию $w(x,y) = J_\alpha[u(x,t)]$, где преобразование J_α введено в § 1, то легко установить, что норма (83) эквивалентна норме $\|u\|_{H^2_{2,\alpha}} \approx \|w\|_{H^2_2(D\times(0,d))}$, где

$$\|w\|_{H^2_2(D\times(0,d))} = \left\{ \sum_{i=1}^{i_0} \left(\|\varphi_i w\|^2_{L_2} + \sum_{|\beta'|+\beta_n=2} \left\| D_x^{\beta'} D_y^{\beta_n} (\varphi_i w) \right\|^2_{L_2} \right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=i_0+1}^{N} \left(\|\varphi_i w\|^2_{L_2^+} + \sum_{|\beta'|+\beta_n=2} \left\| D_{\tilde{x}}^{\beta'} D_y^{\beta_n} (\varphi_i w) \right\|^2_{L_2^+} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$\|\cdot\|_{L_2}$ ($\|\cdot\|_{L_2^+}$) — норма в пространстве $L_2(E^{n-1} \times (0,d))$ (норма в пространстве $L_2(E_+^{n-1} \times (0,d))$).

Из результатов § 2, § 3 и эквивалентности норм (84) вытекает следущая

Теорема 5. . Пусть выполнены условия 0.1—0.4, 1.1—1.4 и $\delta \in (0,\delta_0)$ при достаточно малом $\delta_0 > 0$. Тогда при любом $f(x,t) \in L_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$ и $\nu \ge \nu_4 > 0$ существует решение $u(x,t) \in u(x,t) \in \mathcal{H}^2_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$ задачи (81)—(82). Для этого решения справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{\mathcal{H}^2_{2,\alpha}} \le c_5 \|f\|_{L^2_{2,\alpha}}$$

с постоянной $c_5 > 0$, не зависящей от ν.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда оператор, соответствующий задаче (81)—(82), обладает следующими свойствами

1) ядро конечномерно;

2) область значений замкнута в $L_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$;

3) спектр дискретен и обобщенные собственные функции этого оператора полны в $L_{2,\alpha}(D \times (0,\infty))$.

Доказательство следствия основывается на теореме 5, эквивалентности норм (84) и известных теоремах о полной непрерывности оператора вложения в пространствах Соболева (см. [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Панич О. И. Введение в общую теорию эллиптических краевых задач. — Киев: Вища школа, 1986. — 128 с.

2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физмат. из., 1959. — 684 с.

3. Глушко В. П. Оценки в $\mathcal{L}_2$ и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка //Тр. Моск. матем. о-ва. — 1970. — Т. 23. — С. 113—178.

4. Соболев С. А. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск.: СОАН СССР, 1962. — 255 с.