ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 2

УДК 517.983

О ЗАДАЧЕ ТИПА КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2001 г. А. В. Глушак

Воронежский государственный университет

В банаховом пространстве E рассматривается следующая задача

$$D^{\alpha}v(t) = Av(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}v(t) = v_0, \tag{2}$$

где A — линейный замкнутый оператор в E с плотной в E областью определения $D(A)$, $v_0 \in D(A)$,

$$D^{\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)ds \text{ —}$$

левостороняя дробная производная Римана-Лиувилля (см. [1, с. 84]) порядка $\alpha \in (0,1)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция,

$$D^{\alpha-1}v(t) = I^{1-\alpha}v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}v(s)ds \text{ —}$$

левостороний дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $1-\alpha$.

Под решением задачи (1), (2) понимается сильно непрерывная при $t > 0$ функция $v(t)$ такая, что $I^{1-\alpha}v(t)$ представляет собой сильно непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию, функция $v(t)$ принимает значения из $D(A)$ и удовлетворяет (1), (2).

Используя метод регуляризации контурного интеграла, в [2] был указан критерий равномерной корректности задачи (1), (2). В настоящей работе мы приводим иной критерий равномерной корректности этой задачи, который при $\alpha = 1$ превращается в известную теорему Хилле—Иосиды [3, с. 68].

Задача Коши для уравнения порядка α, содержащего регуляризованную дробную производную, рассматривалась в [4]. В этой статье вместо условия (2) задается условие $v(0) = v_0$. В идейном отношении излагаемые в [4] результаты примыкают к теории ослабленной задачи Коши (см. [3, с. 76].

Определение. Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если существуют заданная на E, коммутирующая с A операторная функция $T_\alpha(t)$ и числа $M \ge 1$, $\omega \in R$ такие, что для любого $v_0 \in D(A)$ функция $T_\alpha(t)v_0$ является ее единственным решением, и при этом

$$\|T_\alpha(t)\| \le Mt^{\alpha-1}\exp(\omega t). \tag{3}$$

Например, если A — ограниченный оператор, то (см. [1, с. 601]) $T_\alpha(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)$, где $E_{\alpha,\beta}(\cdot)$ — функция типа Миттаг-Леффлера.

Установим вначале необходимое условие равномерной корректности задачи (1), (2). Пусть $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A.

Теорема 1. Если задача (1), (2) равномерно корректна и $Re\lambda > \omega$, то λ^α принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, для любого $x \in E$ справедливо представление

$$R(\lambda^\alpha)x = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)T_\alpha(t)x\,dt, \tag{4}$$

и при этом для всех целых $n \ge 0$

$$\left\|\frac{d^n R(\lambda^\alpha)}{d\lambda^n}\right\| \le \frac{M\Gamma(n+\alpha)}{(Re\lambda - \omega)^{n+\alpha}}. \tag{5}$$

Доказательство. Проверим, что определяемый равенством (4) оператор $R(\lambda^\alpha)$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda^\alpha I - A)R(\lambda^\alpha) = R(\lambda^\alpha)(\lambda^\alpha I - A) = I.$$

Пусть $x \in D(A)$ и $Re\lambda > \omega$. Тогда, учитывая (2) и (3), получим

$$(\lambda^\alpha I - A)R(\lambda^\alpha)x = \lambda^\alpha\int_0^\infty \exp(-\lambda t)T_\alpha(t)x dt -$$

$$-\int_0^\infty \exp(-\lambda t)\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}T_\alpha(t)x dt = \lambda^\alpha\int_0^\infty \exp(-\lambda t)T_\alpha(t)x dt -$$

$$-\exp(-\lambda t)I^{1-\alpha}T_\alpha(t)x\Big|_0^\infty - \lambda\int_0^\infty \exp(-\lambda t)I^{1-\alpha}T_\alpha(t)x dt =$$

$$= \lambda^{\alpha}\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)T_{\alpha}(t)xdt +$$

$$+x - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}T_{\alpha}(s)xdsdt =$$

$$= \lambda^{\alpha}\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)T_{\alpha}(t)xdt + \tag{6}$$

$$+x - \frac{\lambda}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}T_{\alpha}(s)xds\int_s^{\infty}\exp(-\lambda t)(t-s)^{-\alpha}dt = x.$$

Поскольку в определение равномерной корректности задачи (1), (2) входит требование коммутирования операторов A и $T_{\alpha}(t)$, то равенство $R(\lambda^{\alpha})(\lambda^{\alpha}I - A)x = x$, $x \in D(A)$ доказывается аналогично равенству (6).

Из оценки (5), которую мы докажем чуть позже, при $n = 0$ будет вытекать ограниченность оператора $R(\lambda^{\alpha})$ для $Re\lambda > \omega$. Поэтому при $x \in D(A)$ $R(\lambda^{\alpha})(\lambda^{\alpha}I - A)x = x$. А для $x \in E$ это равенство вытекает из плотности $D(A)$ в E и замкнутости оператора A.

Таким образом, нам осталось установить справедливость оценки (5). Продифференцировав n раз равенство (4) по λ, получим

$$\frac{d^n R(\lambda^{\alpha})x}{d\lambda^n} = \int_0^{\infty}(-t)^n\exp(-\lambda t)T_{\alpha}(t)xdt. \tag{7}$$

Неравенство (5) легко следует из (7) после применения неравенства (3).

Теорема доказана.

Следует отметить, что оператор A, для которого равномерно корректна задача (1), (2), вообще говоря, не является генератором C_0-полугруппы, т.к. его резольвентное множество не содержит правой полуплоскости.

Доказательству достаточности предпошлем следующую лемму.

Лемма. Пусть $Re\lambda > \omega$ и резольвента $R(\lambda^{\alpha})$ удовлетворяет неравенству (5), тогда функция $\tilde{R}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}R(\lambda^{\alpha})$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|\frac{d^n\tilde{R}(\lambda^{\alpha})}{d\lambda^n}\right\| \le \frac{M\Gamma(\alpha)n!}{(Re\lambda-\omega)^{n+1}} \tag{8}$$

для любого целого $n \ge 0$.

Доказательство. Используя формулу Лейбница и неравенство (5), для любого целого $n \ge 0$ запишем неравенства

$$\left\|\frac{d^n\tilde{R}(\lambda^{\alpha})}{d\lambda^n}\right\| = \left\|\sum_{j=0}^{n}C_n^j\frac{d^j}{d\lambda^j}\lambda^{\alpha-1}\frac{d^{n-j}}{d\lambda^{n-j}}R(\lambda^{\alpha})\right\| \le$$

$$\le \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^{n+1}}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\left|(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+j)\Gamma(j+\alpha)\right| \le$$

$$\le \frac{M\Gamma(\alpha)}{(Re\lambda-\omega)^{n+1}}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{n}C_n^j(\alpha+j-1)(\alpha+j-2)\cdots\alpha(n-j-\alpha)(n-j-\alpha-1)\cdots(1-\alpha). \tag{9}$$

Докажем далее, что для любого $\alpha \in R$ справедливо равенство

$$n! = ((n-\alpha)+\alpha)((n-1-\alpha)+\alpha)\cdots((1-\alpha)+\alpha) =$$

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^j(\alpha+j-1)(\alpha+j-2)\cdots\alpha(n-j-\alpha)(n-j-\alpha-1)\cdots(1-\alpha). \tag{10}$$

Чтобы доказать (10), достаточно убедиться, что эти многочлены степени n по α совпадают в $n + 1$ точках. Удобно взять $\alpha = k \in \{0,1,...,n\}$. Тогда, используя формулу 4.2.5.48 [5], получим

$$\sum_{j=0}^{n}C_n^j(k+j-1)(k+j-2)\cdots k(n-j-k)(n-j-k-1)\cdots(1-k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^jC_n^{n-j}\frac{(n+k-1-j)!}{(k-1-j)!} = n!\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^jC_n^jC_{n+k-1-j}^n = n!,$$

и равенство (10) тем самым установлено. Теперь неравенство (8) вытекает из (9) и (10). Лемма доказана.

Теорема 2. Если при $Re\lambda > \omega$ оператор A имеет резольвенту $R(\lambda^{\alpha})$, которая удовлетворяет неравенству (5), и $v_0 \in D(A)$, то функция

$$T_{\alpha}(t)v_0 = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi i}v.p.\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\lambda^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(\lambda t)R(\lambda^{\alpha})v_0d\lambda \tag{11}$$

является решением задачи (1), (2).

Доказательство. Используя определение функции $\tilde{R}(\lambda)$ и соотношения (6), равенство (4) перепишем в виде

$$\tilde{R}(\lambda)v_0 = \int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)I^{1-\alpha}T_{\alpha}(t)v_0dt. \tag{12}$$

Поскольку функция $\tilde{R}(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам (8), то как следует из теоремы Хилле—Иосиды, равенство (12) можно обратить, и мы приходим к равенству

$$I^{1-\alpha}T_\alpha(t)v_0 = \frac{1}{2\pi i}\, v.p.\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t)R(\lambda^\alpha)v_0 d\lambda, \tag{13}$$

при этом $I^{1-\alpha}T_\alpha(t)v_0$ — сильно непрерывно дифференцируемая при $t > 0$ функция, принимающая значения из $D(A)$.

Учитывая равенство (см. [1, с. 140]) $D^{1-\alpha}\exp(\lambda t) = t^{\alpha-1}E_{1,\alpha}(\lambda t)$, для искомого решения $T_\alpha(t)v_0$ из (13) получаем представление (11).

Убедимся, что, определяемая равенством (11), функция $T_\alpha(t)v_0$ действительно является решением задачи (1), (2).

Чтобы проверить справедливость равенства (2), применим методику, изложенную в [3, с. 47] для случая $\alpha = 1$ и видоизмененную затем в [4] для случая $\alpha \in (0,1)$.

Пусть вначале $v_0 \in D(A^2)$. Зафиксируем $\lambda_0 > \omega^\alpha$ и обозначим $z_0 = (\lambda_0 I - A)^2 v_0$. Тогда $v_0 = R^2(\lambda_0)z_0$ и при $Re\lambda > \omega$

$$R(\lambda^\alpha)v_0 = \frac{R(\lambda_0)-R(\lambda^\alpha)}{\lambda^\alpha-\lambda_0}R(\lambda_0)z_0 =$$

$$= \frac{R(\lambda^\alpha)z_0}{(\lambda^\alpha-\lambda_0)^2} + \frac{R^2(\lambda_0)z_0}{\lambda^\alpha-\lambda_0} - \frac{R(\lambda_0)z_0}{(\lambda^\alpha-\lambda_0)^2}.$$

Если обе части этого равенства умножить на $\lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t)/(2\pi i)$ и проинтегрировать по прямой $Re\lambda = \omega$, то интегралы от второго и третьего слагаемых обратятся в нуль в силу леммы Жордана. Поэтому из (13) следует

$$I^{1-\alpha}T_\alpha(t)v_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{\lambda^{\alpha-1}\exp(\lambda t)R(\lambda^\alpha)z_0 d\lambda}{(\lambda^\alpha-\lambda_0)^2} = \frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{\lambda^{\alpha-1}(\alpha E_\alpha(\lambda^\alpha t^\alpha)+(\exp(\lambda t)-(\alpha E_\alpha(\lambda^\alpha t^\alpha)))R(\lambda^\alpha)z_0 d\lambda}{(\lambda^\alpha-\lambda_0)^2}. \tag{14}$$

Как доказано в [4], при $t = 0$ интеграл

$$\frac{\alpha}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{\lambda^{\alpha-1}E_\alpha(\lambda^\alpha t^\alpha)R(\lambda^\alpha)z_0 d\lambda}{(\lambda^\alpha-\lambda_0)^2}$$

равен v_0.

Оставшиеся слагаемые в (14) обозначим через $J(t)$ и вычислим их, используя равенство (см. [6, с. 222])

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}\exp(z^{1/\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)z} + O(|z|^{-2}),$$
$$z\to\infty,\quad |\arg z| \le \frac{\alpha\pi}{2}. \tag{15}$$

Обозначим через Λ_ρ кривую вида $z = (\omega + i\tau)^\alpha$, $-\rho \le \tau \le \rho$, а через Ξr — часть окружности радиуса $r = |\omega \pm i\rho|^\alpha = (\omega^2 + \rho^2)^{\alpha/2}$ с центром в начале координат, лежащую справа от кривой Λ_ρ.

Для достаточно малых t согласно (15) запишем

$$J(t) = \frac{t^{2\alpha}}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\frac{\mu^{\alpha-1}\left(\frac{(t/\mu)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} + O\left(|\mu/t|^{-2\alpha}\right)\right)R((\mu/t^2)^\alpha)z_0 d\mu}{(\mu^\alpha-\lambda_0 t^{2\alpha})^2} =$$
$$= \frac{t^{2\alpha}}{2\pi i\alpha}\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Lambda_\rho}\frac{\left(\frac{t^\alpha}{\xi\Gamma(1-\alpha)} + O\left(|\xi/t^\alpha|^{-2}\right)\right)R(\xi/t^{2\alpha})z_0 d\xi}{(\xi-\lambda_0 t^{2\alpha})^2}.$$

Поскольку при $\rho\to\infty$

$$\int_{\Xi_\rho}\frac{\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} + O\left(|\xi/t^\alpha|^{-2}\right)\right)R(\xi/t^{2\alpha})z_0 d\xi}{(\xi-\lambda_0 t^{2\alpha})^2}\to 0$$

и внутри контура $\Lambda_\rho \cup \Xi_r$ при достаточно малых t нет особых точек подынтегральной функции, то $J(0) = 0$ и справедливость начального условия для $v_0 \in D(A^2)$ установлена.

В общем случае $v_0 \in D(A)$ требуемый результат может быть получен, если в качестве начального условия взять $w_0 = R(\lambda_0)v_0, \lambda_0 > \omega^\alpha$ и воспользоваться коммутируемостью $R(\lambda_0)$ и $T^\alpha(t)$.

Чтобы убедиться в справедливости равенства (1), достаточно проверить равенство

$$I^{1-\alpha}D^\alpha T_\alpha(t)v_0 = AI^{1-\alpha}T_\alpha(t)v_0. \tag{16}$$

Найдем преобразование Лапласа левой и правой части равенства (16). После очевидных преобразований получим

$$L(I^{1-\alpha}D^\alpha T_\alpha(t)v_0) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)dt\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}D^\alpha T_\alpha(s)v_0 ds =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty D^\alpha T_\alpha(s)v_0 ds\int\limits_s^\infty \exp(-\lambda t)(t-s)^{-\alpha}dt =$$
$$= \lambda^{\alpha-1}\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda s)D^\alpha T_\alpha(s)v_0 ds =$$
$$= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda s)\frac{d}{ds}\int\limits_0^s (s-\tau)^{-\alpha}T_\alpha(\tau)v_0 d\tau ds =$$
$$= \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\Gamma(1-\alpha)v_0 + \lambda\int\limits_0^\infty T_\alpha(t)v_0 dt\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda s)(s-t)^{-\alpha}ds\right) =$$
$$= -\lambda^{\alpha-1}v_0 + \lambda^{2\alpha-1}\int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)T_\alpha(t)v_0 dt = -\lambda^{\alpha-1}v_0 + \lambda^{2\alpha-1}R(\lambda^\alpha)v_0,$$

при этом мы воспользовались равенством (4), которое эквивалентно равенству (12).

С другой стороны, в силу (12),

$$L(AI^{1-\alpha}T_\alpha(t)v_0) = \lambda^{\alpha-1}AR(\lambda^\alpha)v_0 =$$
$$= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha R(\lambda^\alpha)v_0 - v_0) =$$
$$= -\lambda^{\alpha-1}v_0 + \lambda^{2\alpha-1}R(\lambda^\alpha)v_0,$$

следовательно, равенство (14) установлено и теорема доказана.

Теорема 3. Для того чтобы задача типа Коши (1), (2) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы при $Re\lambda > \omega$ оператор A имел резольвенту $R(\lambda^\alpha)$, удовлетворяющую неравенству (5).

Доказательство. Необходимость нами уже доказана в теореме 1. Учитывая теорему 2, для доказательства достаточности осталось установить оценку (3) найденного решения и убедиться в его единственности.

Оценка (3) вытекает из представления (11) для решения задачи (1), (2) и асимптотики функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ (см. [6, с. 224])

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) + O(|z|^{-1}),$$
$$z \to \infty, |\arg z| \le \frac{\alpha\pi}{2},$$

и мы переходим к доказательству единственности, которое будем вести методом от противного.

Пусть $v_1(t)$ и $v_2(t)$ — два решения задачи (1), (2). Рассмотрим функцию двух переменных $w(t,s) = f(T_\alpha(s)(v_1(t) - v_2(t)))$, где операторная функция $T_\alpha(s)$ определяется равенством (11), а f — произволный линейный непрерывный функционал над E ($f \in E^*$), $t,s \ge 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$D_t^\alpha w(t,s) = D_s^\alpha w(t,s) \qquad (17)$$

и нулевому начальному условию $D_t^{\alpha-1} w(0,s) = 0$.

Общим решением уравнения (17) является функция

$$w(t,s) = f(T_\alpha(t)T_\alpha(s)v_0).$$

Учитывая нулевое начальное условие и произвольность $f \in E^*$, получаем $v_0 = 0$ и $w(t,s) \equiv 0$, а, следовательно, $v_1(t) \equiv v_2(t)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 687 с.

2. Костин В. А. К задаче Коши для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными // Докл. АН СССР. — 1992. — Т. 326. № 4. — С. 597—600.

3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

4. Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Диф. уравнения. — 1989. — Т. 25. № 8. — С. 1359—1368.

5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 797 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1967. — Т. 3 — 299 с.