УДК 517.9

УПЛОТНЯЕМОСТЬ ПРАВОИНВАРИАНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

© 2001 г. А. Ю. Гликлих

Воронежский государственный университет

Доказано, что непрерывное правоинвариантное векторное поле на группе диффеоморфизмов компактного многообразия является уплотняющим. Отсюда на указанной группе выводится теорема существования решений дифференциальных уравнений первого и второго порядка с правоинвариантными правыми частями, удовлетворяющими условию Каратеодори.

В работах [2], [3] была предложена следующая конструкция: пусть Ξ — гильбертово многообразие, на котором задана сильная риманова метрика и которое может быть изометрично вложено в некоторое гильбертово пространство как окрестностный ретракт. Как известно, на беконечномерных пространствах (многообразиях) непрерывные векторные поля могут не иметь интегральных кривых. Показано, что если подобное непрерывное векторное поле является на Ξ уплотняющим относительно меры некомпактности Хаусдорфа в римановых расстояниях, то задача Коши для интегральной кривой этого векторного поля разрешима на достаточно малом интервале времени. Отметим, что на нелинейных многообразиях непосредственное применение теории уплотняющих операторов невозможно, поскольку здесь отсутствуют выпуклые замыкания, на которых основана эта теория. Поэтому в предложенной конструкции использовался переход к векторным полям в объемлющем пространстве, уплотняющим относительно меры некомпактности Хаусдорфа в пространстве, внешней по отношению к многообразию.

В [3] было показано, что приведенным выше условиям удовлетворяют многообразия (группы) H^s-диффеоморфизмов компактного n-мерного многообразия при $s > \frac{n}{2} + 1$. Однако не были выявлены критерии при которых непрерывное векторное поле уплотняет. В настоящей работе показано, что непрерывное правоинвариантное векторное поле на указанной группе диффеоморфизмов оказывается уплотняющим при специальном задании метрики на касательном расслоении, и соответствующая модификация этого утверждения выполняется для некоторых специальных векторных полей (дифференциальных уравнений второго порядка) на касательном расслоении к группе диффеоморфизмов. При этом, несмотря на другой выбор метрики, предложенная в [2], [3] конструкция остается справедливой.

Отсюда на группе диффеоморфизмов выводится теорема существования решений для дифференциальных уравнений первого и второго порядка с правоинвариантными правыми частями, удовлетворяющими условию Каратеодори, важная для использования в современном лагранжевом формализме гидродинамики, предложенном В. И. Арнольдом [1] и развитом Д. Эбином и Дж. Марсденом [5]: ранее в указанной теории для обеспечения теоремы существования интегральных кривых накладывалось условие дополнительной гладкости конечномерного векторного поля, порождающего бесконечномерное правоинвариантное векторное поле. Оказывается этого дополнительного условия можно избежать.

Напомним основные конструкции многообразий отображений (см., например, [5]). Рассмотрим два компактных ориентируемых конечномерных многообразия без края M и N. Выберем на N риманову метрику и определим экспоненциальное отображение $\exp : TN \to N$. Рассмотрим множество $C^k(M,N)$ C^k-отображений из M в N. Зададим на нем структуру гладкого многообразия.

Пусть $g \in C^k(M,N)$. Рассмотрим множество

$$T_g C^k(M,N) = \{f \in C^k(M,N) | \pi \circ f = g\}$$

где $\pi : TN \to N$ обычная проекция. Отметим, что $T_g C^k(M,N)$ с C^k-нормой является банаховым пространством. Отображение

$$\Omega_{\exp} : T_g C^k \to C^k(M,N)$$

определенное как $\Omega f = \exp \circ f$ является взаимно однозначным в малой окрестности образа в $T_g C^k$. Поэтому эта окрестность вместе с отображением $\Omega_{\exp}$ может рассматриваться как карта в $g \in C^k(M,N)$. Легко видеть, что замены координат между такими картами являются бесконечно гладкими. Таким образом мы получили, что на $C^k(M,N)$ задана структура бесконечногладкого банахова многообразия, причем такая, что $T_g C^k$ является касательным пространством к $C^k(M,N)$ в точке g, и эта структура не зависит от римановой метрики, заданной на N.

Далее, пусть $\dim M = \dim N = n$. Зафиксируем $s > \frac{n}{2}$. Для данного s соболевские H^s-отображения из M в N корректно определены и являются непрерывными. Обозначим множество H^s-отображений из M в N $H^s(M,N)$. Также, как это было сделано выше мы можем определить касательное пространство $T_g H^s(M,N)$ для любого $g \in H^s(M,N)$, причем это пространство со стандартным соболевским внутренним произведением является гильбертовым пространством. Поэтому $H^s(M,N)$ является бесконечногладким гильбертовым многообразием. Также, как и в случае линейных пространств, легко видеть, что при $s > \frac{n}{2} + k$ непрерывно вкладывается в $C^k(M,N)$ и это вложение является всюду плотным.

Далее будем рассматривать $s > \frac{n}{2} + 1$. Теперь $H^s(M,M)$ содержит подмножество $D^s(M)$ H^s-отображений из M в M, которые являются C^1-диффеоморфизмами. Известно, что $D^s(M)$ открыто в $H^s(M,M)$ и поэтому это множество является гильбертовым многообразием. Более того, $D^s(M)$ является группой с групповой операцией суперпозиции $\circ$, где единица: $e = id$. Касательное пространство $T_e D^s(M)$ — пространство всех H^s векторных полей на M. Все касательное расслоение $TD^s(M)$ есть подмножество $H^s(M,TM)$, состоящее из отображений, которые в суперпозиции с проекцией $\pi : TM \to M$ дают элементы из $D^s(M)$. В частности, $T_g D^s(M) = \{f \in H^s(M,TM) | \pi \circ \mathrm{f} = g\} = \{X \circ g | X \in T_e D^s g\}$.

Группа $D^s(M)$ содержит подгруппу $D^s_\mu(M)$ диффеоморфизмов, сохраняющих риманов объем, которая также является подмногообразием в $D^s(M)$. Отметим, что $T_e D^s_\mu(M)$ есть множество всех бездивергентных векторных полей на M, касательные пространства в других точках определяются аналогично (см. подробное изложение в [5])

Пусть $g \in D^s(M)$. Рассмотрим правый сдвиг $R_g(\eta) = \eta \circ g$. Известно (см. [5]), что правый сдвиг R_g — бесконечногладкое отображение и для любого $X \in TD^s(M)$ верно, что $TR_g(X) = X \circ g$, где $TR_g : TD^s(M) \to TD^s(M)$, $TR_g(T_\eta D^s(M)) = \mathrm{T}_{\eta \circ g} D^s(M)$ есть касательное отображение для R_g. Для $D^s_\mu(M)$ правый сдвиг определяется аналогично и имеет такие же свойства.

Определение 1. *Правоинвариантным векторным полем называется векторное поле X на $D^s(M)$ (на $D^s_\mu(M)$), для которого $X_g = Y \circ g$, где $Y \in T_e D^s(M)$ — H^s-векторное поле на M (соответственно, $Y \in T_e D^s_\mu(M)$ — бездивергентное H^s-векторное поле на M).*

В [5] показано, что правоинвариантное векторное поле X на $D^s(M)$ и на $D^s_\mu(M)$ будет C^k-гладким тогда и только тогда, когда $Y \in H^{s+k}(TM)$, где Y — соответствующее ему поле на M.

Введем на $D^s(M)$ сильную риманову метрику, т.е. метрику, порождающую топологию модельного пространства. Для этого рассмотрим риманову метрику $<\cdot,\cdot>$ на многообразии M. Для $g \in D^s(M)$ и X, $Y \in T_e D^s(M)$ положим $X_g = X \circ g \in T_g D^s$ и $Y_g = Y \circ g \in T_g D^s$ и определим сильное скалярное произведение в $T_g D^s(M)$ по следующей формуле:

$$(X_g, Y_g)^s_g = \int_M < X_{g(m)}, Y_{g(m)} >_{g(m)} \mu(dm) +$$
$$+ \int_M < (d+\delta)^s X \circ g(m), (d+\delta)^s X \circ g(m) >_{g(m)} \mu(dm), \tag{1}$$

где $\mu(dm)$ — риманова форма объема, d — дифференциал де Рама, δ — кодифференциал и $(d + \delta d)^2 = d\delta + \delta d = \Delta$ — оператор Лапласа — де Рама. Сильная норма касательного вектора определяется обычной формулой.

Сужение (1) на $D^s_\mu(M)$ является сильной римановой метрикой на этом подмногообразии (подгруппе), которая (как легко видеть) к тому же является правоинвариантной: при правом сдвиге векторов их скалярное произведение не изменяется. В частности, норма правоинвариантного векторного поля постоянна.

Для любой кривой $\eta(t)$ в $D^s_\mu(M)$, $t \in [a,b]$ определим ее длину по обычной формуле $\int_a^b \sqrt{(\dot\eta(t),\dot\eta(t))^s_{\eta(t)}}\,dt$ которая приводит к стандартному определению риманова расстояния на $D^s_\mu(M)$:

Определение 1. *Пусть ξ_0, $\xi_1 \in D^s(M)$. Число, равное инфимуму длин кривых, соединяющих их назовем внутренним расстоянием между ними в $D^s_\mu(M)$ и обозначим $dist(\xi_0, \xi_1)$.*

Ниже нам потребуется несколько разных функций расстояния на $D^s_\mu(M)$, которые будут выражаться как инфимумы по-разному заданных длин кривых. В частности, для любой кривой $X(t)$ в $D^s_\mu(M)$, $t \in [a,b]$ определим ее длину по формуле

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt}\pi X(t), \frac{d}{dt}\pi X(t)\right)^s_{\pi X(t)}}\,dt + \\ + \left\| TR_{X(b)^{-1}}X(b) - TR_{X(a)^{-1}}X(a)\right\|, \tag{2}$$

где R_g — правый сдвиг, а $\|\cdot\|$ — норма, соответствующая $(\cdot,\cdot)^s_g$.

Определение 3. *Пусть X^1, $X^2 \in TD^s(M)$. Число, равное инфимуму длин (2) кривых, соединяющих их, назовем внутренним расстоянием $d(X^1,X^2)$ между ними в $TD^s(M)$.*

Очевидно, что расстояние d между двумя векторами в $D^s_\mu(M)$ есть расстояние между точками их приложения в $D^s_\mu(M)$ плюс норма разности сносов этих векторов в единицу. Т.е. для любых X^1, $X^2 \in D^s_\mu(M)$

$$d(X^1, X^2) = dist(\pi X^1, \pi X^2) + \\ + \left\| TR_{\pi X^{2^{-1}}} X^1 - TR_{\pi X^{1^{-1}}} \pi X^1 \right\|. \tag{3}$$

Вложим риманово многообразие M изометрично в евклидово пространство R^k, где k достаточно велико (это можно сделать по Теореме Нэша). Тогда многообразие $H^s(M,M)$ очевидно изометрично вкладывается как замкнутое гладкое подмногообразие в гильбертово линейное пространство $H^s(M,R^k)$ со скалярным произведением, аналогичным (1). В дальнейшем мы не будем различать в обозначениях нормы в пространстве $H^s(M,R^k)$ и в касательных пространствах к $D^s(M)$ и $D^s_\mu(M)$.

Пусть $R : V \to M$ — ретракция трубчатой окрестности $V \subset R^k$ на M. Понятно, что R порождает ретракцию трубчатой окрестности $U = R^{-1}(D^s(M)) \subset H^s(M,V)$ в $H^s(M,R^k)$ на $D^s(M)$. Таким образом мы показали, что $D^s(M)$ изометрично вкладывается в $H^s(M,R^k)$ как окрестностный ретракт.

Поскольку $D^s_\mu(M)$ — подмногообразие в $D^s(M)$, оно имеет трубчатую окрестность в $D^s(M)$ и, следовательно, после вложения $D^s(M)$ в $H^s(M,R^k)$ возникает также трубчатая окрестность $D^s_\mu(M)$ в $H^s(M,R^k)$. Следовательно, для $D^s(M)$ и $D^s_\mu(M)$ применима конструкция работ [2], [3].

Исходя из стандартного определения меры некомпактности Хаусдорфа (см., например, [4]), введем внешнюю и внутреннюю меры некомпактности на $D^s(M)$ следующим образом:

Определение 4. *Внешней мерой некомпактности Хаусдорфа ограниченного множества $\Omega \subset D^s_\mu(M) \subset H^s(M,R^k)$ называется число $\chi(\Omega) = inf\{\varepsilon > 0 \mid$ в $H^s(M,R^k)$ существует конечная ε-сеть множества Ω, соответствующая норме $\|\cdot\|$.*

Определение 5. *Внутренней мерой некомпактности Хаусдорфа ограниченного множества $\Omega \subset D^s_\mu(M)$ называется число $\chi_I(\Omega) = inf\{\varepsilon > 0 \mid$ в $D^s_\mu(M)$ существует конечная ε-сеть множества Ω, соответствующая внутреннему расстоянию $dist\}$.*

Аналогично определяются внешняя χ и внутренняя χ_I мера некомпактности на $TD^s_\mu(M)$ относительно расстояния d.

Определение 6. *Пусть M и N — метрические пространства. Отображение $F : M \to N$ называется уплотняющим с константой $q > 0$ относительно меры некомпактности Хаусдорфа, если для любого ограниченного множества $\Omega \subset M$ $\chi(F(\Omega)) \leq q\chi(\Omega)$.*

Теорема 7. *Пусть X — правоинвариантное векторное поле на $D^s_\mu(M)$. Тогда это векторное поле уплотняет относительно внутренней меры некомпактности χ_I с константой $q = 1$, то есть для любого ограниченного множества $\Omega \subset D^s_\mu(M)$ выполнено неравенство $\chi_I(\Omega) \leq \chi_I(\Omega)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть в $D^s_\mu(M)$ существует конечная ε-сеть множества Ω. Покажем, что ее образ при отображении

$X : D^s_\mu(M) \to TD^s_\mu(M)$ будет ε-сетью множества $X(\Omega)$ в $D^s_\mu(M)$. Пусть расстояние между точками $\eta,\theta \in \Omega$ меньше ε. Из правой инвариантности сильной римановой метрики и поля X получим, что $\left\| TR_{X(\eta)^{-1}}X(\eta) - TR_{X(\theta)^{-1}}X(\theta)\right\| = 0$. Следовательно по формуле (3) $d(X(\eta),X(\theta)) = dist(\eta,\theta) < \varepsilon$. **Ч.Т.Д.**

Обозначим через $i : D^s_\mu(M) \to H^s(M,R^k)$ указанное выше гладкое изометрическое вложение. Тогда касательное отображение Ti отображает векторы, касательные к $D^s_\mu(M)$, в $H^s(M,R^k)$. Напомним, что по построению для правоинвариантного векторного поля X норма его векторов во всех точках одинакова, это значение мы обозначим $\|X\|$.

Лемма 8. *Для любой точки $\xi \to D^s_\mu(M)$ существует окрестность $V \subset D^s_\mu(M)$ и константа $K > 0$ такие, что при $\eta,\theta \in V$ для правоинвариантного векторного поля X выполняется неравенство $\|TiX(\eta) - TiX(\theta)\| \le (1 + K\|X\|)d(X(\eta),X(\theta))$.*

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $d_g i : T_\xi\ D^s_\mu(M) \to H^s(M,R^k)$ — производную вложения i в точке $g \in D^s_\mu(M)$. В силу того, что i — отображение класса C^∞, эта производная непрерывна по g. Понятно, что $TiX(g) = i(g) + d_g i(X(g))$.

Из правой инвариантности поля X получаем $TiX(\eta) = TiTR_{\eta\circ\xi^{-1}}X(\xi) = i(\eta) + d_\eta i(TR_{\eta\circ\xi^{-1}}X(\xi))$. Как было отмечено выше, касательное к правому сдвигу отображение $TR_{\eta\circ\xi^{-1}}$ непрерывно по η. Из непрерывной зависимости от η линейного оператора $d_\eta i(TR_{\eta\circ\xi^{-1}}) : D^s_\mu(M) \to H^s(M,R^k)$ следует, что существуют окрестность V точки ξ в $D^s_\mu(M)$ и константа $K > 0$ такие, что для любых $\eta,\theta \in V$ норма оператора $d_\eta i(TR_{\eta\circ\xi^{-1}}) - d_\theta i(TR_{\theta\circ\xi^{-1}})$ не превосходит $K\,dist(\eta,\theta)$ — в противном случае существовала бы пара последовательностей η_i,θ_i, сходящихся к ξ, для которых указанная норма разности стремилась бы к бесконечности, тогда как по непрерывности она должна стремиться к нулю.

Из изометричности вложения и определения расстояний как инфимумов длин кривых получаем, что $\|i(\eta) - i(\theta)\| \le dist(\eta,\theta)$. Так же, как в доказательстве Теоремы 7, из правой инвариантности поля X получаем, что $d(X(\eta),X(\theta)) = dist(\eta,\theta)$. Из полученных формул следует, что $\|TiX(\eta) - TiX(\theta)\| \le \|i(\eta) - i(\theta)\| + \|(d_\eta i(TR_{\eta\circ\xi^{-1}} - d_\theta i(TR_{\theta\circ\xi^{-1}}))(X(\xi))\| \le dist(\eta,\theta) + \|X(\eta)\|K,\ dist(\eta,\theta) = (1 + K\|X\|)d(X(\eta),X(\theta))$. **Ч.Т.Д.**

Пусть U — трубчатая окрестность $D^s(M)$ в $H^s(M,R^k)$ и $R : U \to D^s(M)$ — ретракция. Как следует из Теоремы Урысона, существует функция $\varphi : H \to [0,1]$ такая, что

$$\varphi = \begin{cases} 1, x \in D^s(M), \\ 0, n \notin U. \end{cases}$$

Рассмотрим продолжение $\bar{X} : J \times H^s(M,R^k) \to H^s(M,R^k)$ поля $TiX : J \times D^s(M) \to H^s(M,R^k)$ определенное по формуле

$$\bar{X}(t) \begin{cases} \varphi(x)TiX(t,R(x)), x \in U, t \in J \\ 0, x \notin U, t \in J. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольную точку $\eta_0 \in D^s_\mu(M)$. Пусть $B \subset U$ — окрестность точки η_0 такая, как в Теореме 1.4 работы [3]. Без ограничения общности можно считать, что $R(B) \subset V$, где V — окрестность точки η_0 из Леммы 7.

Теорема 9. *Пусть $\bar{X}(t)$ продолжение поля $TiX(t)$ на $H^s(M,Rk)$, описанное выше. Для любого ограниченного множества $\Omega \subset B$ выполняется соотношение $\chi(\bar{X}(\Omega)) \le 2(1 + K\|X(t)\|)\chi(\Omega)$, где χ — внешняя мера некомпактности Хаусдорфа, построенная по норме пространства $H^s(M,R^k)$.*

Доказательство. По Теореме 1.4 работы [2] R локально липшицево на B с константой $q = 2$ относительно нормы в $H^s(M,R^k)$ и метрики $dist$ на $D^s(M)$. Отсюда, из Теоремы 7, Леммы 8 и из свойств меры некомпактности χ (см., например, [4]) получим

$$\chi(\bar{X}(t,\Omega)) \le \chi(\overline{co}(0 \cup \bar{X}(t,R(\Omega))) =$$
$$= \chi(\bar{X}(t,R(\Omega))) \le (1 + K\|X(t)\|)\chi_I(X(t,R(\Omega))) \le$$
$$\le (1 + K\|X(t)\|)\chi_I(R(\Omega)) \le 2(1 + K\|X(t)\|)\chi_I(\Omega).$$

Ч.Т.Д.

Теорема 10. *Пусть $X(t)$ измеримо по t в $T_e D^s_\mu(M)$ и $\|X(t)\|$ интегрируемо на каждом конечном промежутке. Пусть $\tilde{X}(t)$ — соответствующее правоинвариантное векторное поле на $D^s_\mu(M)$. Тогда задача Коши*

$$\dot{m}(t) = \tilde{X}(t), \quad m(0) = m_0 \in D^s(M)$$

имеет решение при всех $t \in [0,\infty)$, причем единственное.

Доказательство. Пусть $\bar{X}(t)$ продолжение поля $Ti\tilde{X}(t)$ как это описано выше. Из условий теоремы и из Теоремы 9 следует, что для $\bar{X}(t)$ выполнены условия Теоремы 2.4 работы [3]. Поэтому решение соответствующей задачи Коши существует.

Нетрудно видеть (см. [5]), что интегральная кривая правоинвариантного поля $X(t)$ — это поток конечномерного векторного поля $X(t,m)$ на M. Так как поле $X(t,m) \in H^s(M,TM)$ при $s \geq \frac{n}{2}+1$ является C^1-гладким на M, этот поток единственный в пространстве C^1, а следовательно, и в $D^s_\mu(M)$. Так как M — компактное многообразие без края, этот поток существует при всех $t \in [0,\infty)$. **Ч.Т.Д.**

Наибольший интерес представляет дифференциальное уравнение второго порядка на $D^s_\mu(M)$ вида

$$\frac{\bar{D}}{dt}\dot{\eta}(t) = \tilde{F}, \tag{4}$$

где $\frac{\bar{D}}{dt}$ — ковариантная производная связности Леви—Чивита слабой римановой метрики

$$(X_g, Y_g)_g = \int_M < X_g(m), Y_g(m) >_{g(m)} \mu(dm), \tag{5}$$

а $\tilde{F}(t)$ — правоинвариантное векторное поле, порожденное полем $F(t) = F(t,m) \in T_e D^s_\mu(M)$ на M. Будем предполагать, что $F(t)$ измеримо по t в $T_e D^s_\mu(M)$. Тогда поле $\tilde{F}(t)$ на $D^s_\mu(M)$ удовлетворяет условию Каратеодори.

Напомним (см. [5]), что уравнение (4) описывает движение идеальной несжимаемой жидкости на M под действием силы $F(t,m)$.

Известно, что (4) сводится к задаче об интегральных кривых векторного поля

$$\tilde{S} + \tilde{F}^1(t) \tag{6}$$

на $TD^s(M)$, где $\tilde{F}^1(t)$ — вертикальный подъем поля $\tilde{F}$, а $\tilde{S}$ — геодезическая пульверизация указанной связности Леви—Чивита. Напомним, что $\tilde{S}$ гладко и удовлетворяет условию

$$T\pi\tilde{S}(X) = X. \tag{7}$$

При сделанных выше предположениях поле $\tilde{F}^1(t)$ удовлетворяет условию Каратеодори.

В связи с тем, что $TD^s(M)$ не является группой, полученные выше утверждения в данной ситуации непосредственно не применимы. Модифицируем приведенные выше конструкции для этого случая.

Введем риманову метрику на TM. Каждое $T_{(m,X)}TM$ представим как прямую сумму подпространств $H_{(m,X)}$, — связности Леви-Чивита римановой метрики $<,>$ на M, и вертикального подпространства $V_{(m,X)}$. Для любых Y_1 и Y_2 $H_{(m,X)}$ определим скалярное произведение как $<T\pi Y_1, T\pi Y_2>_m$; для любых Y_1 и Y_2 из $V_{(m,X)}$ определим скалярное произведение как $<KY_1, KY_2>_m$, где K — коннектор связности Леви—Чивита. Положим эти подпространства ортогональными друг другу. Таким образом риманова метрика на TM задана.

Введем сильную риманову метрику на $TD^s(M)$. Как и выше, представим касательное пространство $T_{(m,X)}TD^s(M)$ как прямую сумму вертикального подпространства $\bar{V}_{(m,X)}$ и $\bar{H}_{(m,X)}$ — связности Леви—Чивита слабой римановой метрики (5). Для любых Y_1 и Y_2 из $\bar{V}_{(m,X)}$ определим скалярное произведение как $(KY_1, KY_2)^s_\eta$, где K — указанный выше коннектор. Для любых Y_1 и Y_2 из $\bar{H}_{(m,X)}$ определим скалярное произведение как $(T\pi Y_1, T\pi\, Y_2)^s_\eta$. Положим $\bar{H}_{(m,X)}$ и $\bar{V}_{(m,X)}$ ортогональными друг другу. Таким образом на $TD^s(M)$ задана сильная риманова метрика.

Вложим изометрично TM в R^k, где k достаточно велико, как это можно сделать по теореме Нэша. Также как и раньше, в этом случае $H^s(M,TM)$ вложится изометрично в $H^s(M,R^k)$ и соответственно $TD^s(M)$ и $D^s_\mu(M)$ изометрично вложатся в $H^s(M,R^k)$ как окрестностные ретракты.

Стандартная формула длины кривой $X(t)$, $t \in [a,b]$ на $D^s_\mu(M)$ примет вид

$$\int_a^b \left(\left(T\pi \frac{d}{dt}X(t), T\pi \frac{d}{dt}X(t) \right)_\eta + \right.$$
$$\left. + \left(K\left(\frac{d}{dt}X(t)\right), K\left(\frac{d}{dt}X(t)\right) \right)_\eta \right)^{\frac{1}{2}} dt. \tag{8}$$

Определение 11. *Пусть $X,Y \in D^s_\mu(M)$. Число, равное инфимуму введенных по формуле* (8) *длин кривых, соединяющих их, назовем внутренним расстоянием $d_1(X,Y)$ между ними в $D^s_\mu(M)$.*

Определим теперь расстояние $d_2(X,Y)$ на $TTD^s_\mu(M)$ формулой

$$d_2(X,Y) = d(\pi_1 X, \pi_1 Y) + \left\| TR^{-1}_{\pi_1\pi X}KX - TR^{-1}_{\pi_1\pi Y}KY \right\| +$$
$$+ \left\| TR^{-1}_{\pi_1\pi X}T\pi X - TR^{-1}_{\pi_1\pi Y}T\pi Y \right\|, \tag{9}$$

где $\pi : TD^s(M) \to TD^s(M)$, $\pi_1 : TTD^s(M) \to TD^s(M)$ — естественные проекции.

Теорема 12. *Векторное поле $\tilde{S} + \tilde{F}^l$ уплотняет с константой $q = 2$ относительно внутренней меры некомпактности Хаусдорфа в расстояниях $d(\cdot,\cdot)$* на $D^s_\mu(M)$ и $d_2(\cdot,\cdot)$ *на $TTD^s_\mu(M)$*.

Доказательство. Пусть расстояние $d(X,Y)$ между $X,Y \in TD^s_\mu(M)$ меньше ε. Покажем, что тогда $d_2(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X),\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X)) < 2\varepsilon$. В самом деле, из формулы (9) с учетом определения вертикального подъема, свойства (7) и правой инвариантности поля $\tilde{F}$ нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} d_2(\tilde{S}(Y) + \tilde{F}^l(t, X), \tilde{S}(Y) + \tilde{F}^l(t, Y)) &= \\ = d(X, Y) + \left\| TR^{-1}_{\pi X} X - TR^{-1}_{\pi Y} Y \right\| &+ \\ + \left\| TR^{-1}_{\pi X}\tilde{F}(t, \pi X) - TR^{-1}_{\pi Y}\tilde{F}(t, \pi Y) \right\| &= \\ = d(X, Y) + \left\| TR^{-1}_{\pi X} X - TR^{-1}_{\pi Y} Y \right\| &\le \\ \le d(X, Y) + dist(\pi X, \pi Y) &+ \\ + \left\| TR^{-1}_{\pi X} X - TR^{-1}_{\pi Y} Y \right\| &= 2d(X, Y). \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, $d_2(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(X),\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(X)) < 2\varepsilon$. **Ч.Т.Д.**

Лемма 13. *Для любой точки $Z \in TD^s_\mu(M)$ существуют окрестность $V_0 \subset TD^s_\mu(M)$ и числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$* такие, что для любых $X,Y \in V_0$ *выполняются неравенства $d(X,Y) < C_1 d_1(X,Y)$ и $d_1(X,Y) < C_2 d(X,Y)$.*

Утверждение Леммы 13 вытекает из эквивалентности сходимостей по метрикам $d(\cdot,\cdot)$ и $d_1(\cdot,\cdot)$.

Следствие 14. *На V_0 векторное поле $\tilde{S} + \tilde{F}^l$ уплотняет с константой $q = 2C_1$ относительно внутренней меры некомпактности Хаусдорфа в расстояниях $d_1(\cdot,\cdot)$ на $TD^s_\mu(M)$ и $d_2(\cdot,\cdot)$ на $TTD^s_\mu(M)$.*

Действительно, если $d_1(X,Y) < \varepsilon$ для $X,Y \in V_0$, то по Лемме 13 $d(X,Y) < C_1\varepsilon$. Тогда по формуле (10)

$$d_2(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t, X), \tilde{S}(Y) + \tilde{F}^l(t, Y)) \le 2d(X, Y) < 2C_1\varepsilon.$$

Обозначим через $j : TD^s_\mu(M) \to H^s(M,R^k)$ указанное выше гладкое изометрическое вложение. Тогда касательное отображение Tj отображает векторы, касательные к $TD^s_\mu(M)$, в $H^s(M,R^k)$. Как и для вложения i выше, $Tj(A_B) = j(B) + d_B j(A)$, где $d_B j$ — производная отображения j в точке B, A_B — касательный вектор в B. Напомним, что по построению при фиксированном t норма всех векторов $\tilde{F}^l(t,X)$ одинакова, ее значение мы обозначим через $\|F(t)\|$.

Лемма 15. *Для любой точки $Z \in TD^s_\mu(M)$ существуют окрестность $V_0 \subset TD^s_\mu(M)$ и числа $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ такие, что для любых $X,Y \in V$ выполняется неравенство $\|Tj\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X) - Tj(\tilde{S}(Y) + \tilde{F}^l(t,Y))\| \le C_2(1 + K_1 + K_2\|F(t)\|)d_2(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X),\tilde{S}(Y)+\tilde{F}^l(t,Y))$.*

Доказательство. Из гладкости j и поля $\tilde{S}$ следует их локальная липшицевость. Это означает, что существует окрестность $V_1 \subset TD^s_\mu(M)$ точки Z и число $K_1 > 0$ такие, что для любых $X,Y \in V_1$ выполняется неравенство $\|d_X j\tilde{S}(X) - d_Y j\tilde{S}(Y)\| \le K_1 d_1(X,Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $V_1 \subset V_0$, где V_0 — окрестность Z из Леммы 13.

Представим $d_X j\tilde{F}^l(t,X)$ в виде $d_X j(TR_{\pi X\circ\pi Z^{-1}}\tilde{F}(t,\pi Z))^l$. Из гладкости j и из непрерывности поля $\tilde{F}^l$ и операций правого сдвига и вертикального подъема следует, что существуют окрестность $V_2 \subset TD^s_\mu(M)$ точки Z и число $K_2 > 0$ такие, что для любых $X,Y \in V_2$ норма линейного оператора $d_X j(TR_{\pi X\circ\pi Z^{-1}})^l - d_Y j(TR_{\pi Y\circ\pi Z^{-1}})^l$ не превосходит $K_2 dist(\pi X,\pi Y)$ (ср. доказательство Леммы 8). Тогда

$$\begin{aligned} &\left\| d_X j\tilde{F}^l(t, X) - d_Y j\tilde{F}^l(t, Y) \right\| = \\ &= \left\| d_X j(TR_{\pi X\circ\pi Z^{-1}}\tilde{F}^l(t, \pi, X))^l - d_Y j(TR_{\pi Y\circ\pi Z^{-1}}\tilde{F}^l(t, \pi, Y))^l \right\| \le \\ &\le K_2 \left\| F(t) \right\| dist(\pi X, \pi Y). \end{aligned}$$

Как и ранее, можно считать, что $V_2 \subset V_0$.

Из изометричности вложения j и определения расстояний как инфимумов длин кривых вытекает, $\|j(X) - j(Y)\| \le d_1(X,Y)$. Из формулы (10) и Леммы 13 следует, что $d_1(X,Y) \le C_2 d(X,Y) \le C_2 d(X,Y) + C_2\|TR_{\pi X^{-1}}X - TR_{\pi Y^{-1}}Y\| = C_2 d_2(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X),\tilde{S}(Y) + \tilde{F}^l(t,Y)$. Из формулы (8) нетрудно видеть, что $dist(\pi X,\pi Y) \le d_1(X,Y)$. Таким образом, при $X,Y \in V = V_1 \cap V_2$ мы получаем $\|Tj(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X)) - Tj(\tilde{S}(Y)+\tilde{F}^l(t,Y))\| \le \|j(X) - j(Y)\| + \|d_X j\tilde{S}(X) - d_Y j\tilde{S}(Y)\| + \|d_X j\tilde{F}^l(t,X) - d_Y j\tilde{F}^l(t,Y)\| \le C_2(1 + K_1 + K_2\|F(t)\|)d_2(\tilde{S}(X) + \tilde{F}^l(t,X),\tilde{S}(Y) + \tilde{F}^l(t,Y))$. **Ч.Т.Д.**

Пусть U — трубчатая окрестность $TD^s_\mu(M)$ в $H^s(M,R^k)$ и $R : U \to TD^s(M)$ — ретракция. Рассмотрим продолжение $\bar{S} + \bar{F}^l : H^s(M,R^k) \to H^s(M,R^k)$ поля $Tj(\tilde{S} + \tilde{F}^l) : TD^s(M) \to H^s(M,R^k)$, определенное по формуле

$$\bar{S}(x) + \bar{F}^l(t, x) = \begin{cases} \varphi(x)Tj(\tilde{S}(t, R(x)) + \tilde{F}^l(t, R(x))), x \in U, t \in J \\ 0, x \notin U, t \in J, \end{cases}$$

где φ — функция Урысона на U (см. выше).

Зафиксируем произвольную точку $Z \in TD^s_\mu(M)$ и выберем ее окрестность $B \subset U$, как в Теореме 1.4 работы [3], такую, что $R(B) \subset V$, где V — окрестность из Леммы 15.

Теорема 16. *Для любого ограниченного множества $\Omega \subset B$ выполняется соотношение $\chi((\bar{S}(\Omega) + \bar{F}^l(t,\Omega)) \le 4C_1C_2(1 + K_1 + K_2\|F(t)\|)\chi(\Omega)$, где χ — внешняя мера некомпактности Хаусдорфа, построенная по норме пространства $H^s(M,R^k)$.*

Доказательство. Используем Теорему 12, Следствие 14, Лемму 15 и свойства меры некомпактности Хаусдорфа. Рассуждая аналогично доказательству Теоремы 9, получим

$$\chi(\bar{S}(\Omega) + \bar{F}^l(t,\Omega)) \le \chi(\overline{co}(0 \cup (\bar{S}(\Omega) + \bar{F}^l(t,\Omega)))) =$$
$$= \chi(\bar{S}(R(\Omega)) + \bar{F}^l(t,R(\Omega))) \le$$
$$\le C_2(1 + K_1 + K_2\|F(t)\|)\chi_I(\tilde{S}(\Omega) + \tilde{F}^l(t,\Omega))) \le$$
$$\le 2C_1C_2(1 + K_1 + K_2\|F(t)\|)\chi_I(R(\Omega)) \le$$
$$\le 4C_1C_2(1 + K_1 + K_2\|F(t)\|)\chi_I(\Omega).$$

Ч.Т.Д.

Как следствие получаем утверждение:

Теорема 17. *Для правоинвариантного векторного поля $\bar{F}(t,\eta)$, порожденного векторным полем $F(t) = F(t,m) \in T_eD^s_\mu(M)$, которое измеримо по t в пространстве $TD^s(M)$, и $\|F\|$ интегрируема, задача (4) с начальными условиями $\eta(0) = \eta_0$, $\dot{\eta}(0) = X_0 \in T_{\eta(0)}D^s_\mu(M)$ имеет решение на достаточно малом промежутке времени $t \in [0,\varepsilon)$, причем единственное.*

Подчеркнем, что в отличие от Теоремы 10, полученное в Теореме 17 решение является потоком векторного поля на некомпактном многообразии TM и поэтому оно локально по времени.

Автор благодарит В. В. Обуховского за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnol'd V. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits.// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — **T. 16**, **№ 1**, — C. 319—361.

2. Гликлих Ю. Е., Обуховский В. В. Дифференциальные уравнения типа Каратеодори на гильбертовых многообразиях.// Тр. Мат. фак. (новая серия)/ ВГУ. — 1996. — № 1. — С. 23—28.

3. Gliklikh Yu. E., Obukhovskiĭ V. V. Tubular Neighbouhoods of Hilbert manifolds and differential equations of Carathéodory type on groups of diffeomorphisms. // New Approaches in Nonlinear Analysis. — Palm Harbor, 1999. — P. 109—123.

4. Меры некомпактности и уплотняющие операторы /Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов и др. — Новосибирск: Наука, 1986. — 265 с.

5. Эбин Д. Дж., Марсден Дж. Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости // Математика: (Сб. переводов). — 1973. — Т. 17, № 5. — С. 142—167; № 6. — С. 111—146.