ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 2

УДК:517.988.6

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

© 2001 г. Б. Д. Гельман*

Воронежский государственный университет

В 1923 году Г. Кнезер доказал теорему о связности интегральной воронки обыкновенного дифференциального уравнения (см., например, [1]). Во многих работах эта теорема обобщалась на различные классы дифференциальных уравнений и включений. В 1959 году М. А. Красносельский и А. И. Перов [2] доказали свой принцип связности множества неподвижных точек вполне непрерывного отображения, распостроняющий теорему Кнезера на абстрактные операторные уравнения. В работе [3] этот принцип был доказан для случая неподвижных точек вполне непрерывных многозначных отображений.

С другой стороны, в 1942 году Ароншайн [4] доказал, что интегральная воронка обыкновенного дифференциального уравнения является ацикличным множеством в пространстве непрерывных функций. В работе [5] было доказано, что при выполнении условий принципа связности Красносельского—Перова, множество неподвижных точек является ацикличным, и выяснено, что условиям этого принципа удовлетворяют абстрактные Вольтерровы операторы, (см. определение 3), образы которых в начальный момент времени выходят из одной точки. Настоящая статья посвящена изучению топологической структуры множества неподвижных точек произвольного абстрактного Вольтеррова оператора.

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем факты и определения. Пусть X — метрическое пространство, $H^n(X,G)$ — когомологии Александера—Чеха пространства X с коэффициентами в группе G. Основные свойства теории когомологий содержатся, например, в [6].

Это исследование поддержано РФФИ грант № 99-01-00333.

Определение 1. *Будем говорить,что пространство X является G-ацикличным, если приведенные когомологии $\bar{H}^n(X,G) = 0$ для любого $n \geq 0$.*

В дальнейшем будем опускать G и говорить просто об ацикличности, считая группу G фиксированной.

Пусть X, Y — метрические пространства, $p : Y \to X$ — непрерывное отображение.

Определение 2. *Отображение p называется Виеторисовским, если:*

1) p является собственным и сюрьективным;

2) множество $p^{-1}(x)$ является ацикличным для любого $x \in X$.

Теорема (Виеторис-Бегл). *Если $p : Y \to X$ является Виеторисовским отображением, то гомоморфизм когомологий $p^* : H^n(X) \to H^n(Y)$ является изоморфизмом для любого $n = 0,1,\ldots$.*

Эта теорема является частным случаем теоремы, доказанной в [7].

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, X — замкутое подмножество в E_1, $f : X \to E_2$ — однозначное непрерывное собственное отображение (т.е. прообраз компакта есть компакт), $F : X \to K(E_2)$ — полунепрерывное сверху м-отображение такое, что $K = \overline{F(X)}$ — компакт в E_2. Рассмотрим следующее операторное включение:

$$f(x) \in F(x).$$

Обозначим множество решений этого включения A и пусть $A \neq \phi$. Имеет место следующее утверждение, доказанное в работе [3].

Теорема 1. *Если для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $g^\varepsilon : [0,1] \times A \times X \to E_2$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) множество $g^\varepsilon : [0,1] \times A \times X$ — относительно компактно в E_2;

2) для любых $(\lambda,x) \in [0,1]\times A$ *уравнение* $f(u) = g^\varepsilon(\lambda,x,u)$ *имеет непустое ациклическое множество решений* $N(\lambda,x)$ *и* $N(\lambda,x) \subset U_\varepsilon(A)$, *где* $U_\varepsilon(A)$ *—* ε*-окрестность множества* A;

3) при $\lambda = 0$ *и любом* $x \in A$ *справедливо тождество*: $f(x) = g^\varepsilon(0,x,x)$;

4) при $\lambda = 1$ существует $a_0 \in X$ *такое, что* $f(a_0) = g^\varepsilon(1,x,a_0)$ *для любого* $x \in A$.

Тогда множество A ациклично.

Опираясь на эту теорему, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть E — банахово пространство, T — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество в E,* $g : T \to T$ *— вполне непрерывное однозначное отображение. Пусть выполнены следующие условия*:

(1) для любого $\eta > 0$ *существует вполне непрерывное однозначное отображение* $\tilde{g}_\eta : T \to E$ *такое, что* $\|\tilde{g}_\eta(x) - g(x)\| \le \eta$ *для любого* $x \in T$;

(2) для любого $\lambda \in [0,1]$ *и для любой точки* $v(y) = y - \tilde{g}_\eta(y)$, *где y — неподвижная точка отображения g, уравнение* $x = \tilde{g}_\eta(x) + \lambda v(y)$, *имеет единственное решение. Тогда множество неподвижных точек A отображения g является ацикличным.*

Доказательство. Для доказательства этой леммы рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $U = U_\varepsilon(A)$ — ε-окрестность множества A. Тогда существует такое положительное число δ, что $\min\limits_{x\in T\setminus U}\|x - g(x)\| \ge \delta > 0$. Пусть $0 < \eta < \delta/2$. Рассмотрим отображение $g_\varepsilon : [0,1]\times A\times \overline{U} \to E$, определенное условием:

$$g_\varepsilon(\lambda,x,u) = \tilde{g}_\eta(u) + (1-\lambda)(x - \tilde{g}_\eta(x)).$$

Проверим, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1. Очевидно, что $g_\varepsilon([0,1]\times A\times\overline{U}) \subset \overline{co}(g(\overline{U}) \cup \tilde{g}_\eta(x))$, является относительно компактным множеством. Заметим также, что

$$\|g(u) - g_\varepsilon(\lambda,x,u)\| \le$$
$$\le \|g(u) - \tilde{g}_\eta(u))\| + \|x - \tilde{g}_\eta(x))\| \le 2\eta < \delta$$

для любых $(\lambda,x) \in [0,1]\times A$. Тогда для любой точки $u \in T\setminus U$ выполнено неравенство
$\|u - g_\varepsilon(\lambda,x,u)\| \ge \|u - g(u)\| - \|g(u) - g_\varepsilon(\lambda,x,u)\| > 0$,
т.е. все неподвижные точки отображения $g_\varepsilon(\lambda,x,\cdot)$ лежат внутри множества U.

Заметим далее, что уравнение

$$u = \tilde{g}_\eta(u) + (1-\lambda)(x - \tilde{g}_\eta(x))$$

имеет единственное решение для любых $(\lambda,x) \in [0,1]\times A$.

При $\lambda = 0$, $g_\varepsilon(0,x,u) = \tilde{g}_\eta(u) + (x - \tilde{g}_\eta(x)) = u$ имеет единственное решение $u = x$. При $\lambda = 1$, $u = g_\varepsilon(1,x,u) = \tilde{g}_\eta(u)$ имеет единственное решение u_0, которое не зависит от $x \in A$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1, что и доказывает лемму.

Применим эту лемму для изучения топологической структуры множества неподвижных точек абстрактных операторов Вольтерра. Дадим некоторые определения.

Пусть $C_{[a,b]}$ — пространство непрерывных вектор-функций со значениями в R^n, $T = B_r[0] \subset C_{[a,b]}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в нуле этого пространства. Пусть $g : T \to C_{[a,b]}$ — вполне непрерывный оператор.

Определение 3. *Будем говорить,что отображение g является оператором Вольтерра, если для любого* $\varepsilon \in [0,b-a]$ *и для любых функций* $x,y \in T$ *из того, что* $x(t) = y(t)$ *для* $t \in [a,a+\varepsilon]$ *вытекает, что* $g(x)(t) = g(y)(t)$ для t *из того же промежутка* $[a,a+\varepsilon]$.

Пусть отображение $i : R^n \to C_{[a,b]}$ является каноническим вложением, т.е. любому вектору $h \in R^n$ сопоставляется функция $x(t) = h$ для любого $t \in [a,b]$. Если $T_0 = B_r[0]$ — шар в пространстве R^n радиуса r с центром в нуле, то $i(T_0) \subset T$. Рассмотрим отображение $g_0 : T_0 \to R^n$ определенное условием:

$$g_0(h) = g(i(h))(0).$$

Очевидно, что оператор g_0 определен корректно и является непрерывным.

Пример 1. Рассмотрим отображение $g : C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ определенный условием:

$$g(x)(t) = \varphi(x(a)) + \alpha(t) + \int_a^t k(t,s)f(s,x(s))ds,$$

где:
φ — непрерывное отображение пространства R^n в себя;
$\alpha \in C_{[a,b]}$;
k — непрерывное отображение множества $[a,b]\times[a,b]$ в пространство $L(R^n)$;
$f : [a,b]\times R^n \to R^n$ — некоторое непрерывное отображение.
Очевидно, что отображение g является оператором Вольтерра и оператор g_0 определен соотношением:

$$g_0(h) = \varphi(h) + \alpha(a).$$

Обозначим $A(g)$ — множество неподвижных точек отображения g, а $A(g_0)$ — множество неподвижных точек отображения g_0. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть вполне непрерывный оператор Вольтерра $g : T \to C_{[a,b]}$. Если для любого $x \in T$ образ $\|g(x)\| \le r - \varepsilon_0$, где ε_0 — произвольное положительное число, то отображение $p : A(g) \to A(g_0)$, $p(x) = x(a)$, порождает изоморфизм групп когомологий Александера—Чеха.*

Доказательство. Покажем, что отображение p действует из множества $A(g)$ в множество $A(g_0)$. Действительно, если $x \in A(g)$, то

$$x(a) = g(x)(a) = g(i(x(a)))(a) = g_0\ (x(0)).$$

Следовательно, $p : A(g) \to A(g_0)$. Покажем, что отображение p удовлетворяет условиям теоремы Виеториса—Бегла. Для этого необходимо проверить выполнение следующих условий:

а) отображение p является сюрьективным и собственным;

б) прообраз $p^{-1}(h)$ любой точки $h \in A(g_0)$ является ацикличным множеством.

Докажем сюрьективность отображения p. Пусть h — произвольная точка из $A(g_0)$. Рассмотрим множество

$$T_h = \{x = x(\cdot) \in C_{[a,b]} \mid x(a) = h,\ \|x\| \le r\}.$$

Очевидно, что $T_h \subset T$ и отображение $g : T_h \to T_h$. Так как множество T_h является выпуклым и компактным, то по теореме Шаудера отображение g имеет в нем неподвижную точку $x_0 \in A(g)$. Тогда $p(x_0) = h$, что и доказывает сюрьективность.

Собственность отображения p вытекает из компактности множества $A(g)$.

Докажем теперь ацикличность множества $p^{-1}(h)$. Для этого воспользуемся леммой 1. Пусть $\gamma \in (a,b]$, рассмотрим отображение $s_\gamma : [a,b] \to [a,b]$ определенное условием:

$$s_\gamma(t)\begin{cases} a, & \text{если } t \in [a,\gamma], \\ t-\gamma, & \text{если } t \in [\gamma,b]; \end{cases}$$

Пусть отображение $g_\gamma : T_h \to C_{[a,b]}$ определено по правилу:

$$g_\gamma(t) = g(x)(s_\gamma(t)).$$

Изучим свойства этого отображения. Так как отображение g является вполне непрерывным, то множество функций $g(T_h)$ является равностепенно непрерывным. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что как только $|t_1 - t_2| \le \delta$, $t_1, t_2 \in [a,b]$, то $|y(t_1) - (t_2)| \le \varepsilon$ для любой функции $y \in g(T_h)$. Следовательно,

$$\|g(x)(t) - g_\gamma(x)(t)\| = \|g(x)(t) - g(x)(s_\gamma(t))\| \le \varepsilon,$$

если $|t - s_\gamma(t)| \le \delta$. Так как $|t - s_\gamma(t)| \le \gamma - a$, то, если $|\gamma - a| \le \delta$, то $\|g(x)(t) - g_\gamma(x)(t)\| \le \varepsilon$.

Заметим, что отображение g_γ отображает множество T_h в себя, т.к. $g_\gamma(x)(a) = g(x)(a) = h$ и $\|g_\gamma(x)\| \le \|g(x)\| \le r - \varepsilon_0$.

Пусть $\gamma - a \in (a,\varepsilon_0)$, рассмотрим уравнение

$$x = g_\gamma(x) + \lambda v(y)$$

на множестве T_h, где, $v(y) = y - g_\gamma(y)$, а $y \in A(g) \cup T_h$. Покажем, что это уравнение имеет единственное решение для любого $y \in A(g) \cup T_h$ и $\lambda \in [0,1]$. Прежде всего докажем, что оно имеет решение.

Пусть $v(y) = y - g_\gamma(y)$, тогда

$$\|v(y)\| = \|y - g_\gamma(y)\| = \|g(y) - g_\gamma(y)\| \le \gamma - a < \mathrm{e}_0.$$

Причем $v(a) = y(a) - g_\gamma(y)(a) = 0$. Тогда отображение φ, $\varphi(x) = g_\gamma(x) + \lambda v(y)$, переводит множество T_h в себя и является вполне непрерывным. Следовательно, по теореме Шаудера это отображение имеет неподвижную точку, которая и является решением этого уравнения.

Докажем теперь единственность этого решения. Пусть у этого уравнения существуют два решения $x_1 = x_1(\cdot)$ и $x_2 = x_2(\cdot)$. Тогда $x_1(a) = x_2(a) = h$, $x_1(t) = g_\gamma(x_1)(t)$ и $x_2(t) = g_\gamma(x_2)(t)$.

Тогда, если $t \in [a,\gamma]$, то

$$x_1(t) - x_2(t) = g_\gamma(x_1)(t) - g_\gamma(x_2)(t) = 0,$$

т.е. $x_1(t) = x_2(t)$ на $[a,\gamma]$. Следовательно,

$$x_1(t) - x_2(t) = g_\gamma(x_1)(t) - g_\gamma(x_2)(t) = 0,$$

если $t \in [\gamma, 2\gamma - a]$. Таким образом получаем, что $x_1(t) - x_2(t)$ на $[a, 2\gamma - a]$. Продолжая это рассуждение далее, получим, что $x_1(t) = x_2(t)$ на всем промежутке $[a,b]$.

Таким образом выполнены все условия леммы 1, что доказывает ацикличность множества $p^{-1}(h)$ для любого $h \in A(g_0)$.

Следовательно, отображение p удовлетворяет условиям теоремы Виеториса—Бегла, что и доказывает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М: Мир, 1970. — 720 с.

2. Красносельский М. А., Перов А. И. О существовании решений у некоторых нелинейных опе-

раторных уравнений// Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 126, № 1. — С. 15—18.

3. Гельман Б. Д. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений// Математ. сб. — 1997, — Т. 188, № 12. — С. 33—56.

4. Aronszajn N. Le correspondent topologique de l'unicit dans la theorie des equations differentielles// Ann. Math. — 1942. — V. 43. — P. 730—738.

5. Szufla S. Sets of fixed points of nonlinear mappings in function spaces// Funkcial. Ekvac. — 1979, — V. 22. — P. 121—126.

6. Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М: Мир, 1971. 680 с.

7. Скляренко Е. Г. О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии// Успехи мат. наук. — 1964. — Т. 19, № 6. — С. 47—70.