УДК 517.9 : 519.81

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© 2001 г. К. С. Демченко

Воронежский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

Широко известны классические модели экономических систем, рассматривающих все протекающие процессы как систему линейных зависимостей между показателями состояния системы. Классическим примером линейного подхода к моделированию является модель “затраты—выпуск” Леонтьева [1]. Эта модель сводится к решению системы линейных уравнений, причем на основании спектральной теории линейных операторов выведены условия существования и единственности решения системы уравнений, описывающего положение экономического равновесия. Помимо квазилинейной производственной функции, использующейся в модели Леонтьева, можно использовать нелинейные функции для отображения зависимостей между показателями состояния. Нелинейные функции являются более гибкими в представлении процессов, происходящих в экономике. Примером часто используемой нелинейной функции является производственная функция Кобба—Дугласа вида $y = a_0 \prod_i x_i^{a_i}$ $a_i \geq 0$, при этом нормирующие коэффициенты a_0 могут быть для простоты опущены, если их включить в единицу измерения y.

Для построения балансовой модели используется принципиальная схема, предложенная Леонтьевым. При этом, в отличие от классического подхода, предлагается выделить материальные (или количественные) и информационные (или качественные) ресурсы. С точки зрения моделирования отличие заключается в том, что информационные ресурсы не дробятся в системе (на все подсистемы, использующие ресурс x_i, поступает одно и тоже количество x_i, называемое затратой i-го ресурса в системе). Для материальных ресурсов должно выполняться дополнительное условие равенства затраты i-го ресурса в системе сумме затрат i-го ресурса во всех подсистемах. Заметим, что в системах с иерархической структурой взаимосвязи между показателями состояния, характеризующими количества материальных ресурсов, характерной для микроэкономических моделей, данное условие вырождается в равенство вида $x_i = x_i$, следовательно, им можно пренебречь.

Рассматривается модель экономической системы с производственными функциями Кобба—Дугласа, иерархической структурой взаимосвязи между показателями состояния, характеризующими количества материальных ресурсов и произвольной структурой взаимосвязи между показателями состояния, описывающими качественные ресурсы. Такая модель описывается следующей системой уравнений:

$$x_i = x_i^0 + \sum_{\substack{k \neq i \\ k: a_{ki} \neq 0}} x_k^{\frac{1}{a_{ki}}} \cdot \prod_{r \neq i,k} x_r^{-\frac{a_{kr}}{a_{ki}}} = F_{(x, x^0, A)}, \qquad (1)$$

где $i = \overline{1,n}$, A — матрица коэффициентов производственной функции, x_i — ресурсы, перерабатываемые и производимые в системе, x_i^0 — вектор ресурсов, предназначенный для потребления в случае макроэкономической модели и продажи в случае микроэкономической модели.

МЕТОДИКА

При изучении экономической модели очень важным является вопрос об условиях существования и единственности неподвижной точки отображения (1) — положения экономического равновесия, характеризующего стабильное состояние экономики. Условия существования неподвижной точки обычно получаются при применении теорем о сжимающем отображении. В данном случае частные производные отображения (1) имеют сложный вид, не позволяющий применять стандартные формулировки теорем. Оказалось возможным получить достаточные условия существования равновесия в модели, опираясь на асимптотические результаты, полученные М. А. Красносельским [4]. Эти условия накладываются на матрицу производственных коэффициентов A. Кроме того, опираясь на теорему Брауэра [5], можно получить альтернативное достаточное условие существования неподвижной точки в системе любого конкретного вида.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для проверки гипотез о существовании неподвижных точек в экономических системах с производственными функциями Кобба—Дугласа было разработано программное обеспечение, осуществляющее поиск этих точек методом простых итераций. Метод простых итераций был использован не только из-за своей простоты, но и из-за экономической обоснованности: в каждом следующем периоде в системе используются ресурсы, выработанные на протяжении предыдущего периода. Для систем разного вида этот период может варьироваться: так, для микроэкономических систем он обычно изменяется в пределах от одного дня до одного месяца, в макроэкономических — от месяца до года. Кроме того, были проведены численные расчеты, подтвердившие возможность отсутствия или неединственности в системе положения экономического равновесия, что является принципиальным отличием от классических линейных моделей.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Воспользуемся результатами, полученными М. А. Красносельским. Для этого необходимо выделить конус в пространстве $\mathcal{R}^n$, на котором будет рассматриваться оператор (1). Возьмем в качестве порождающего множества $\{x : m_i \le x_i \le Mi,\ i = \overline{1,n}\}$, где $0 < m_i < M_i$ — положительные константы, большие 0, экономический смысл которых может быть интерпретирован как границы диапазона “комплектности” ресурсов в данной производственной системе. Тогда искомый конус будет представлять собой множество следующего вида: $K = \{t\mathrm{x} : \mathrm{t} \le 0,\ m_i \le x_i \le M_i,\ i = \overline{1,n}\}$.

Теорема 1. Для экономических балансовых систем вида (1) с производственными функциями Кобба—Дугласа, имеющими возрастающую отдачу, то есть при выполнении ограничений вида $\sum_i a_{ki} > 1\ \forall k = \overline{1,n}$, положение экономического равновесия на конусе K (неподвижная точка отображения (1)) существует.

Доказательство. Рассмотрим структуру конуса K. Если $m_j, M_j \ge \varepsilon > 0\ \forall j = \overline{1,n};\ x \in K,$ то из $x_i \to +\infty$ следует, что и $x_k \to +\infty$, причем их отношение всегда ограничено константами, строго большими нуля: поскольку $m_i \le x_i \le M_i$ и $m_k \le x_k \le M_k$, имеем $\frac{m_k}{M_i} = \frac{x_k}{x_i} = \frac{M_k}{m_i}$. Данный конус будет являться телесным, воспроизводящим и нормальным (т.е. удовлетворяющим условиям используемых далее теорем). Более того, оператор (1) будет положителен и равномерно непрерывен на данном конусе, поскольку имеет особенности лишь при приближении к плоскостям, ограничивающим положительный октант пространства $\mathcal{R}^n$.

В соответствии с теоремами о существовании неподвижной точки [4], если положительный вполне непрерывный на конусе K оператор A имеет сильную асимптотическую производную на бесконечности A'_∞ по конусу, причем спектр линейного оператора A'_∞ лежит в круге $|\lambda| \le \rho$, где $\rho < 1$, то на конусе K существует по крайней мере одна неподвижная точка оператора A.

Опираясь на свойства конуса K, можно показать [2], что $A'_\infty \equiv (0)$, то есть спектр линейного оператора A'_∞ лежит в круге $|\lambda| \le \rho$, где $\rho < 1$, а значит, неподвижная точка оператора (1) на конусе K существует. Для производственных систем с функциями Кобба—Дугласа с возрастающей отдачей существует положение экономического равновесия. Теорема доказана.

Замечание 1. Полученное условие не гарантирует единственности неподвижной точки; кроме того, данное условие является достаточным, но не необходимым, что было подтверждено в ходе численных экспериментов.

Рассмотрим производственные функции с убывающей отдачей ($\sum_{k\neq i} a_{ik} < 1$). Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы, получаем, что производная на бесконечности не определена и данный метод исследования неприменим. В случае же производственных функций с постоянной отдачей ($\sum_{k\neq i} a_{ik} = 1$), элементы якобиана оператора (1) будут ограничены, и для применения теоремы о существовании положения равновесия системы необходимо исследовать существование и спектр A'_∞ для оператора (1), что может быть сделано при помощи пакетов математических программ [2].

Теорема 2. Для существования неподвижной точки отображения (1) (положения экономического равновесия системы) достаточно выполнения условия:

$$x_i^0 + \sum_{\substack{k\neq i\\ k:a_{ki}\neq 0}} \bar{x}_k^{\frac{1}{a_{ki}}} \cdot \prod_{r\neq i,k} x_r^{0-\frac{a_{kr}}{a_{ki}}} \leq \bar{x}_i. \qquad (2)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Брауэра, гласящей, что любое непрерывное отображение пространства, гомеоморфного единичному шару $\mathcal{B}^n$, в себя, имеет неподвижную точку [5]. Рассмотрим отображение (1) на следующем множестве. Пусть зафиксированы $\bar{x}_i$, тогда искомое множество представляется как $\mathcal{D}^n = \{\bar{x}_i \geq x_i \geq x_i^0 \ \forall i = \overline{1,n}\}$ — n-мерный симплекс. Симплекс топологически эквивалентен (гомеоморфен) n-мерному шару $\mathcal{B}^n$. Поскольку на любом отделенном от 0 множестве функционал (1) непрерывен, для применения теоремы Брауэра остается найти условия, при которых он отображает $\mathcal{D}^n$ в себя.

Известно, что функционал (1) принимает значения строго большие x^0 (по всем компонентам вектора) при x отделенном от 0. Для применения теоремы Брауэра необходимо выполнение следующего условия: $x_i \leq \bar{x}_i$, или

$$x_i = x_i^0 + \sum_{\substack{k\neq i\\ k:a_{ki}\neq 0}} \bar{x}_k^{\frac{1}{a_{ki}}} \cdot \prod_{r\neq i,k} x_r^{0-\frac{a_{kr}}{a_{ki}}} \leq$$

$$\leq x_i^0 + \sum_{\substack{k\neq i\\ k:a_{ki}\neq 0}} \bar{x}_k^{\frac{1}{a_{ki}}} \cdot \prod_{r\neq i,k} x_r^{0-\frac{a_{kr}}{a_{ki}}} \leq \bar{x}_i,$$

таким образом, получено достаточное условие (2) существования неподвижной точки (положения экономического равновесия) системы (1). Теорема доказана.

Замечание 2. Неподвижная точка находится в полученном множестве $\mathcal{D}^n$ (то есть, получены верхняя ($\bar{x}_i$) и нижняя (x_i^0) оценки для каждой компоненты неподвижной точки), что может быть использовано при численном нахождении положений экономического равновесия.

Получены частные условия существования положения экономического равновесия в системе с нелинейными производственными функциями. В отличие от классических линейных моделей экономических систем, не удалось доказать существования и единственности неподвижной точки соответствующего отображения при любых экономически обоснованных производственных коэффициентах (как это было сделано для модели Леонтьева [1]). Более того, было показано, что в замкнутых экономических системах конкретного вида, не имеющих ресурсов x_i, которые только затрачиваются, то есть, являются невоспроизводимыми, положение экономического равновесия отсутствует. Для иерархических систем была получены условия существования нескольких неподвижных точек одновременно. Эти результаты были подтверждены численными экспериментами. Таким образом, построенная нелинейная балансовая модель точнее, чем линейная, отражает ряд процессов, имеющих место в реальном мире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллен Р. Дж. Математическая экономия. — М.: Из-во иностр. лит., 1963. — 667 с.

2. Демченко К. С., Руссман И. Б. Нахождения положения экономического равновесия в нелинейной балансовой модели затраты — выпуск общего вида // Системное моделирование социально-экономических процессов: Сб. науч. тр. — Воронеж, 2000. — С. 93—99.

3. Жак С. В. Математические модели менеджмента и маркетинга. — Ростов-на-Дону: ЛаПо, 1997. — 316 с.

4. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. — 394 с.

5. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 510 с.