ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 1

УДК 517.988

ОЦЕНКИ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА*

© 2001 г. В. Г. Звягин, Н. М. Ратинер

Воронежский государственный университет

Пусть (V, g) – риманово многообразие, компактное и без края. Пусть $u(x)$ – вещественная функция на V, по крайней мере дважды дифференцируемая. Эта функция задает на V квадратичную форму g_u, матрица которой в локальных координатах такова: $g_{ij} + \nabla_{ij}u$, где $\nabla_{ij}u$ – ковариантные производные функции u второго порядка. Если квадратичная форма g_u положительна определена, то функция u называется допустимой, а g_u представляет собой новую метрику на V. Для допустимых функций на V определен оператор Монжа-Ампера $M(u) = |g_{ij} + \nabla_{ij}u|/|g_{ij}|$, где $|g_{ij}|$ и $|g_{ij} + \nabla_{ij}u|$ – определители метрик g и g_u.

Дифференциальные уравнения, содержащие оператор Монжа-Ампера, возникают во многих вопросах геометрии, касающихся метрик Кэлера и Эйнштейна, см.например [1], [2], [4] .

Рассмотрим на цилиндре $[0, T] \times V$ функцию $u(t, x)$, которая при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ является допустимой на V и, стало быть, при каждом t задает метрику $g_{u(t,\cdot)}$ на V. Можно применить оператор Монжа-Ампера к функции $u(t, x)$, и в результате получается функция двух переменных.

В статье изучается эволюционное уравнение

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \ln M(u) = f(t, x, u),\ (t, x) \in [0, T] \times V, \quad (1)$$

с начальным условием:

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (2)$$

Ниже будут получены оценки типа С. Н. Бернштейна максимума модуля первых производных решения задачи (1–2).

1. Оценка $|\nabla_x u|$

Оценка модуля градиента по пространственным переменным верна для любой допустимой функции на $[0, T] \times V$ и аналогична оценке, полученной в [3] для допустимых функций на римановых многообразиях.

Обозначим через $\nabla_x u(t, x) = (\nabla_1 u, \ldots, \nabla_n u)(t, x)$ – ковариантные производные по пространственным переменным и $|\nabla_x u|^2 = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u \nabla_\beta u$.

Теорема 1. *Пусть функция $u(t, x)$ допустима при каждом $t \in [0, T]$ и принадлежит $C\left([0, T], C^2(V)\right)$, пусть D – диаметр многообразия V, тогда*

$$\max_{[0,t]\times V} |\nabla_x u| \leq 2D.$$

Доказательство. При фиксированном $t_0 \in [0, T]$ рассмотрим функционал: $A_{t_0}(x) = |\nabla_x u(t_0, x)|^2 + 2u(t_0, x)$. Пусть x_m – точка, в которой A_{t_0} достигает своего максимума. В этой точке первые ковариантные производные функционала A_{t_0} равны нулю. Запишем это, учитывая, что ковариантные производные римановой метрики равны нулю:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\gamma A_{t_0}(x_m) = \nabla_\gamma\left(g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u \nabla_\beta u\right) + 2\nabla_\gamma u \\ &= g^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma\alpha}u\nabla_\beta u + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u \nabla_{\gamma\beta}u + 2\nabla_\gamma u \\ &= 2g^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma\alpha}u\nabla_\beta u + 2\nabla_\gamma u. \end{aligned} \quad (3)$$

Выберем в окрестности точки x_m такую локальную карту многообразия V, чтобы в точке x_m выполнялись соотношения: $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ и $\nabla_{\alpha\beta}u = \delta_{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}u$. Такие карты, см.[3], называются *адаптированными*. В адаптированной карте равенство (3) примет вид:

$$2\nabla_{\gamma\gamma}u\nabla_\gamma u + 2\nabla_\gamma u = 2u_\gamma(u_{\gamma\gamma} + 1) = 0. \quad (4)$$

Поскольку функция u допустимая, то при каждом фиксированном t квадратичная форма $(g_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta}u)$ положительно определена. В адаптированной карте матрица этой формы имеет вид:

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00425

$$\begin{pmatrix} 1+u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+u_{nn} \end{pmatrix}$$

В силу положительной определенности $1+u_{\gamma\gamma} > 0$, и тогда из (4) получаем $u_\gamma = 0$ для $\gamma = 1, \dots, n$. Поэтому значение функционала A_{t_0} в точке максимума равно: $A_{t_0}(x_m) = 2u(t_0, x_m)$. С другой стороны, для любой точки $x \in V$

$$A_{t_0}(x) = |\nabla_x u|^2_{t=t_o} + 2u(t_0, x) \le A_{t_o}(x_m) =$$

$$= 2u(t_0, x_m).$$

Отсюда $|\nabla_x u|^2_{t=t_0} \le 2[u(t_0, x_m) - u(t_0, x)] \le \le 2 \underset{\{t_0\}\times V}{\operatorname{osc}} u \le 2D|\nabla_x u|_{t=t_0}$, в последнем неравенстве использована теорема конечных приращений. Разделив обе части на $|\nabla_x u|_{t=t_0}$, получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

2. Оценка $|u_t|$

Для последующих вычислений нам понадобятся две простые формулы:

Лемма 1. *Пусть $A = (a_{ij}(x))$ – матрица, элементы которой суть функции от x, обратимая при всех x, и пусть $\left(a^{ij}(x)\right)$ – матрица обратная к A. Тогда*

1) производная по x от определителя матрицы A равна:

$$\frac{d}{dx}\det A = a^{ij}(x)\det A \cdot \frac{d}{dx}a_{ij}(x).$$

2) Производная от элементов обратной матрицы вычисляются по формуле:

$$\frac{d}{dx}a^{ij} = -a^{ik}a^{lj}\frac{d}{dx}a_{kl}.$$

Здесь, как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам, в первой формуле по i и j, во второй – по k и l.

Доказательство. Первая формула хорошо известна, она является следствием того факта, что определитель – линейная функция от своих столбцов, поэтому производная от определителя порядка n равна сумме определителей, один из столбцов которых состоит из производных от элементов матрицы, а остальные совпадают со столбцами матрицы A. Раскладывая каждый определитель по столбцу, содержащему производные, и учитывая, что алгебраическое дополнение A_{ij} к элементу a_{ij} равно соответствующему элементу обратной матрицы, умноженному на определитель, получаем:

$$\frac{d}{dx}\det A = \sum_{ij} A_{ij}\frac{d}{dx}a_{ij} = a^{ij}\det A\frac{d}{dx}a_{ij}.$$

Для того, чтобы получить вторую формулу, продифференцируем равенства $a^{ij}(x) \cdot a_{jk}(x) = \delta^i_k$, определяющие обратную матрицу:

$$\left(a^{ij}(x)\right)' \cdot a_{jk}(x) + a^{ij}(x) \cdot (a_{jk}(x))' = 0,$$

умножим обе части на $a^{km}(x)$ и просуммируем по k:

$$\left(a^{ij}(x)\right)' \cdot a_{jk}(x) \cdot a^{km}(x) + a^{ij}(x) \cdot a^{km}(x) \cdot (a_{jk}(x))' = 0,$$

учитывая, что $a_{jk} \cdot a^{km} = \delta^m_j$, получаем

$$\left(a^{im}\right)' = -a^{ij}(x) \cdot a^{km}(x) \cdot (a_{jk}(x))',$$

суммирование в правой части формулы производится по j и k.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $u(t,x)$ допустима при каждом $t \in [0,T]$, является решением задачи (1-2)и принадлежит $C\left([0,T], C^3(V)\right) \bigcap C^1\left([0,T], C^2(V)\right) \bigcap C^2\left([0,T], C(V)\right)$. Предположим, что функция $f(t,x,u)$, стоящая в правой части уравнения, ограничена и имеет ограниченные первые производные по всем переменным, причем $f'_u(t,x,u) \ge \delta > 0$ на $[0,T] \times V \times R^1$. Тогда $u_t(x,t)$ ограничена по модулю константой, зависящей от диаметра многообразия V, исходной метрики g на V, начальной функции u_0, максимума модулей правой части f, ее первых производных и δ.*

Доказательство. Рассмотрим функционал $B(t,x) = u_t^2 + |\nabla_x u|^2$ на $[0,T] \times V$. Предположим сначала, что B достигает своего максимума в точке (t_1, x_1), где $0 < t_1 \le T$. Тогда в этой точке ковариантные производные функционала B по пространственным переменным равны нулю, матрица вторых производных не положительна, $g^{\gamma\delta}\nabla_{\gamma\delta}B \le 0$, а производная по t неотрицательна ($B_t = 0$ при $t_1 < T$, $B_t \ge 0$ при $t_1 = T$).

Вычислим первую ковариантную производную функционала B:

$$\nabla_\gamma B \quad = 2u_t\nabla_\gamma u_t + g^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma\alpha}u\cdot\nabla_\beta u + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u\cdot\nabla_{\gamma\beta}u = 2[u_tu_{\gamma t} + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u\cdot\nabla_{\gamma\beta}u]. \tag{5}$$

Выберем адаптированную карту в окрестности точки (t_1, x_1), тогда в точке (t_1, x_1) получим следующее равенство:

$$(u_tu_{\alpha t} + u_\alpha u_{\alpha\alpha})(t_1, x_1) = 0. \tag{6}$$

Вычислим производную B по t, учитывая что коэффициенты исходной римановой метрики не зависят от t:

$$B_t = 2u_tu_{tt} + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u_t\cdot\nabla_\beta u + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha u\cdot\nabla_\beta u_t.$$

В адаптированной карте в точке (t_1, x_1) получаем:

$$u_tu_{tt} + u_{\alpha t}u_t \geq 0. \tag{7}$$

Вычислим теперь $g^{\gamma\delta}\nabla_{\gamma\delta}B$, для этого (5) продифференцируем по x^δ и умножим на $g^{\gamma\delta}$:

$$\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\nabla_{\gamma\delta}B = g^{\gamma\delta}u_{\delta t}\cdot u_{\gamma t} + g^{\gamma\delta}u_t\cdot\nabla_{\delta\gamma}u_t +$$

$$+g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}\nabla_{\delta\alpha}u\nabla_{\gamma\beta}u + g^{\gamma\delta}g^{\alpha\beta}\nabla_{\delta\gamma\beta}u\nabla_\alpha u \leq 0,$$

в адаптированной карте при $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$ получаем:

$$u_{\gamma t}^2 + u_t\cdot u_{\gamma\gamma t} + u_{\gamma\alpha}^2 + u_{\gamma\gamma\alpha}\cdot u_\alpha \leq 0. \tag{8}$$

Пусть теперь функция u является решением (1-2). Продифференцируем уравнение (1) по t.

$$-u_{tt} + g_u^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha\beta}u_t = f_t + f_u\cdot u_t,$$

где $g_u^{\alpha\beta}$ – элементы матрицы, обратной к матрице $(g_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta}u)$. В адаптированной карте в точке (t_1, x_1) имеем: $g_u^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}\frac{1}{1+u_{\alpha\alpha}}$, и значит

$$-u_{tt} + \frac{u_{t\alpha\alpha}}{1+u_{\alpha\alpha}} = f_t + f_u\cdot u_t. \tag{9}$$

Продифференцируем уравнение (1) по x^γ;

$$-u_{t\gamma} + g_u^{\alpha\beta}\nabla_{\gamma\alpha\beta}u = f_\gamma + f_u\cdot\nabla_\gamma u.$$

В адаптированной карте в точке (t_1, x_1) получим:

$$-u_{t\gamma} + \frac{\nabla_{\gamma\alpha\alpha}}{1+u_{\alpha\alpha}} = f_\gamma + f_u\cdot u_\gamma. \tag{10}$$

Умножим уравнение (9) на u_t, и уравнение (10) при $\gamma = \alpha$ на u_α и сложим:

$$-u_{tt}\cdot u_t + \frac{u_{t\alpha\alpha}\cdot u_t}{1+u_{\alpha\alpha}} - u_{t\alpha}\cdot u_\alpha + \frac{\nabla_{\alpha\alpha\alpha}u\cdot u_\alpha}{1+u_{\alpha\alpha}} =$$

$$= f_tu_t + f_u\cdot u_t^2 + f_\alpha u_\alpha + f_u\cdot u_\alpha^2.$$

Поскольку в точке (t_1, x_1) из неравенства (7) сумма первого и третьего слагаемых меньше или равна нулю, а из (8)

$$u_t\cdot u_{t\alpha\alpha} + u_{\alpha\alpha\alpha}\cdot u_\alpha \leq -(u_{\alpha t}^2 + u_{\alpha\alpha}^2),$$

то

$$f_t\cdot u_t + f_u\cdot u_t^2 + f_\alpha\cdot u_\alpha + f_u\cdot u_\alpha^2 \leq \frac{-(u_{\alpha t}^2 + u_{\alpha\alpha}^2)}{1+u_{\alpha\alpha}} \leq 0.$$

Итак,

$$f_t\cdot u_t + f_u\cdot u_t^2 \leq -(f_\alpha\cdot u_\alpha + f_u\cdot u_\alpha^2).$$

В виду теоремы 1, $|u_\alpha| \leq c|\nabla u| \leq 2cD$, где константа зависит от метрики g. Производные правой части f по x^α и по u ограничены по модулю, следовательно

$$f_t\cdot u_t + f_u\cdot u_t^2 \leq C_1.$$

По условию $f_u(t, x) \geq \delta > 0$, поэтому можно записать:

$$f_u\left(u_t + \frac{f_t}{2f_u}\right)^2 \leq C_1 + \frac{f_t^2}{4f_u},$$

или

$$\left(u_t + \frac{f_t}{2f_u}\right)^2 \leq \frac{C_1}{f_u} + \frac{f_t^2}{4f_u^2} \leq M,$$

где константа M зависит дополнительно от δ и максимума модуля f_t. Отсюда $|u_t(t_1, x_1)| \leq C_3$. Таким образом, если максимум функционала B достигается в точке (t_1, x_1), $0 < t_1 \leq T$, то

$$u_t^2(t, x) \leq u_t^2 + |\nabla_x u|^2 = B(t, x) \leq B(t_1, x_1) =$$

$$= u_t^2(t_1, x_1) + |\nabla_x u(t_1, x_1)|^2 \leq C_3^2 + 4D^2.$$

Пусть теперь максимум B достигается в точке (t_1, x_1), $t_1 = 0$. Если u – решение задачи (1-2), то $u(0, x) = u_0(x)$ – фиксированная начальная функция, тогда $B(0, x_1) = u_t^2(0, x_1) + |\nabla_x u_0|^2(x_1)$. В силу (1) $u_t(0, x) = \ln M(u_0) - f(0, x, u_0)$ и, стало быть, $u_t(0, x_1)$ ограничена константой C_4, зависящей от начальной функции u_0 и правой части f. Таким образом, в обоих случаях u_t ограничена константой, зависящей от исходной метрики на многообразии V, диаметра многообразия, начальной функции, правой части, и ее первых производных.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Aubin T. Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations.- Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252. — Springer-Verlag. — 1982. — 204 p.

2. Aubin T. Mètrique riemanniennes et courbure//J. Diff. Gèo. —1970, —V. 4, — P. 383—424.

3. Delanoë P. Équations du type de Monge-Ampère sur les variétés Riemannienes compactes, I// J. Funct. An. —1981. — V. 40 — P. 358—386.

4. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. т. 1, 2. — М.: Мир, — 1990. — 703 с.