УДК 517.958:532.5

О ЗАДАЧЕ НАВЬЕ-СТОКСА В ПОДОБЛАСТЯХ $\mathbf{R^n}$

© 2001 г. Д. А. Воротников[1]

Воронежский государственный университет

1. Введение

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы Навье-Стокса.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu \Delta u + grad\, p = f_0 & (NS1) \\ div\, u = 0 & (NS2) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & (NS3) \\ u(T_1) = a & (NS4) \end{cases}$$

Здесь Ω — область(произвольное открытое множество, возможно и неограниченное) с липшицевой границей (см. [5]) в $\mathbf{R^n}$.

$u = u(t,x) : [T_1, T_2] \times \Omega \to \mathbf{R^n}$ — неизвестная скорость жидкости.

$p : [T_1, T_2] \times \Omega \to \mathbf{R}$ — неизвестное давление жидкости.

$\nu > 0$ — вязкость жидкости.

$[T_1, T_2]$ — отрезок времени($T_1 < T_2$).

$a : \Omega \to \mathbf{R^n}$ — начальная скорость жидкости.

$f_0 : [T_1, T_2] \times \Omega \to \mathbf{R^n}$ — внешняя сила.

Операторы $div, grad, \Delta$ берутся только по пространственной компоненте x.

Обозначим через $H^m_\sigma(\Omega)$ — подпространство соболевского пространства $(H^m(\Omega))^n$ (ниже верхний индекс n и область Ω у всех функциональных пространств опускаются и подразумеваются), состоящее из замыкания множества бесконечно дифференцируемых функций с нулевой дивергенцией и компактным носителем в Ω. $n \geq 2$, $m \geq 0$, оба целые.

Через P обозначим ортогональную проекцию L_2 на H^0_σ (см. [4],[6]).

Пусть Ω такова, что $P|_{H^m}$ – непрерывный в норме H^m оператор, переводящий H^m в себя, а $\overset{\circ}{H}{}^m$ он переводит в H^m_σ. Мы его тоже будем обозначать P. В частности, нас устроят ограниченные и внешние (т.е. имеющие ограниченное дополнение) области с достаточно гладкой границей, в том числе и все $\mathbf{R^n}$.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ: грант № 01-01-00425

Введем также следующие обозначения:

$\eta = \frac{n}{2} + \frac{n\ mod\ 2}{2}$. Нетрудно видеть, что η — целое число.

$A = -P\Delta$ — линейный самосопряженный(при $m > 0$) положительно определенный оператор в H^m_σ с плотной в H^m_σ областью определения.

$F(u,v) = -P(u \cdot grad)v = -P \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}$ — билинейный оператор, $Fu = F(u,u)$, $f(t) = P f_0(t)$ — проекция внешней силы на соленоидальное подпространство.

Если предположить, что $m \geq 2, f \in L([T_1, T_2], H^m_\sigma) \cap C([T_1, T_2], H^{m-2}_\sigma), u \in C^1([T_1, T_2], H^{m-2}_\sigma) \cap C([T_1, T_2], H^m_\sigma)$, $grad\, p \in C([T_1, T_2], H^{m-2}_\sigma)$, то применяя P к (NS1) и замечая, что $P\ grad\, p = 0$, можно перейти к задаче Коши

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \nu A u = F u + f(t) & (1) \\ u(T_1) = a, & (2) \end{cases}$$

эквивалентной задаче (NS1)-(NS4).

Норма в H^m обозначается $\|\cdot\|_m$, скалярное произведение — $(\cdot,\cdot)_m$; $c_i, i \geq 0$ означают различные константы, не зависящие от варьируемых на данном этапе величин, γ, γ_1- некоторые положительные числа.

2. Локальная разрешимость

В этом пункте доказывается локальная по времени разрешимость задачи (1)-(2).Похожий результат для $\Omega = \mathbf{R^3}$ имеется в [1].

Теорема 1. *Пусть* $m \geq \eta + 1, a \in H^m_\sigma, f \in L([T_1, T_2], H^m_\sigma) \bigcap C([T_1, T_2], H^{m-2}_\sigma)$ *. Тогда существует такое* $T_\nu > 0$*, что на* $[T_1, T_1 + T_\nu]$ *существует решение задачи (1)-(2) в классе*

$$C^1([T_1, T_1 + T_\nu], H^{m-2}_\sigma) \bigcap C([T_1, T_1 + T_\nu], H^m_\sigma) \qquad (3)$$

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие два вспомогательных утверждения.

Лемма 1.

$$\|F(u,v)\|_m \le c_1\|u\|_m\|v\|_{m+1},$$

$$m \ge \eta, u \in H^m_\sigma, v \in H^{m+1}_\sigma \quad (4)$$

$$\|F(u,v)\|_m \le c_1\|u\|_m\|v\|_{m+2},$$

$$m \ge \eta - 1, u \in H^m_\sigma, v \in H^{m+2}_\sigma \quad (4')$$

В обоих случаях $F(u,v) \in H^m_\sigma$.

$$|(F(u,v),v)_m| \le c_2\|u\|_m\|v\|^2_m,$$

$$m \ge \eta+1, u \in H^m_\sigma, v \in H^{m+1}_\sigma \quad (5)$$

$$|(F(u,v),v)_m| \le c_2\|u\|_{m+1}\|v\|^2_m,$$

$$m \ge \eta, u \in H^{m+1}_\sigma, v \in H^{m+1}_\sigma \quad (6)$$

$$|(F(u,v),v)_m| \le c_2\|u\|_{m+2}\|v\|^2_m,$$

$$m \ge \eta-1, u \in H^{m+2}_\sigma, v \in H^{m+2}_\sigma \quad (6')$$

Доказательство.

Имеют место оценки:

$$\|uv\|_0 \le c_0\|u\|_k\|v\|_{l-k}, 0 \le k \le l, l \ge \eta \quad (1.1)$$

Действительно, воспользуемся теоремами вложения соболевских пространств ([5, стр. 161,424,436])

$$H^k \subset L_p, H^{l-k} \subset L_q \quad (1.2)$$

если

$$2 \le p,q \le +\infty,\ \frac{n}{2}-k \le \frac{n}{p},\ \frac{n}{2}-l+k \le \frac{n}{q}$$

В частности (1.2) выполнено, если

$$p = \frac{n}{\max(0,\frac{n}{2}-k)}, q = \frac{n}{\max(0,\frac{n}{2}-l+k)} \quad (1.3)$$

(в этих рассуждениях полагается $1:0=+\infty$). Воспользуемся также известным неравенством типа Гельдера:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \|uv\|_{L_2} \le \|u\|_{L_p}\|v\|_{L_q} \quad (1.4)$$

Из (1.3) имеем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \max(1-\frac{l}{n},\frac{1}{p},\frac{1}{q},0) \le \frac{1}{2}$ (т.к. $p,q \ge 2; l \ge \eta \ge \frac{n}{2}$, и, значит $\frac{l}{n} \ge \frac{1}{2}$).
(1.2) и (1.4) влекут (1.1).

Пользуясь правилом Лейбница(D^α означают мультииндексные производные по x):

$$\|uv\|_m = \sum_{|\alpha|\le m}\|(D^\alpha(uv)\|_0 =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m}\|\sum_{0\le\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}(D^\beta u\ D^{\alpha-\beta}v)\|_0 \le \quad (1.5)$$

$$\le c_0\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{0\le\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}\|D^\beta u\|_{m-|\beta|}\|D^{\alpha-\beta}v\|_{|\beta|} \le$$

$$\le c_1\|u\|_m\|v\|_m \quad (1.6)$$

(мы воспользовались (1.1) при $k=m-|\beta|, l=m, m\ge\eta$). Из (1.6) следует, что $H^m, m \ge \eta$ является банаховой алгеброй. Отсюда сразу следует (4):

$$\|F(u,v)\|_m \le c_1\|u\|_m\|grad\, v\|_m \le c_1\|u\|_m\|v\|_{m+1}$$

Легко видеть, что $\overset{\circ}{H}{}^m$ — подалгебра $H^m_\circ$.

Т.к. u и $grad\, v$ лежат в $\overset{\circ}{H}{}^m$, то и их скалярное произведение лежит в $\overset{\circ}{H}{}^m$, и из вышеупомянутого свойства P следует $F(u,v) \in H^m_\sigma$. Если же воспользоваться в (1.5) оценкой (1.1) при $k=m-|\beta|, l=m+1, m \ge \eta-1$ то получится:

$$\|uv\|_m \le c_0\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{0\le\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}\|D^\beta u\|_{m-|\beta|}\times$$

$$\times\|D^{\alpha-\beta}v\|_{|\beta|+1} \le c_1\|u\|_m\|v\|_{m+1} \quad (1.7)$$

Отсюда следует (4'):

$$\|F(u,v)\|_m \le c_1\|u\|_m\|grad\, v\|_{m+1} \le c_1\|u\|_m\|v\|_{m+2}$$

С помощью (1.7) можно показать, что и в условиях (4') $F(u,v) \in H^m_\sigma$ (пользуясь тем, что C_0^∞ — поле).

При доказательстве (5) , (6) , (6') предположим сначала $u,v \in C_0^\infty$; тогда

$$(F(u,v),v)_m = -((u\cdot grad)v,v)_m =$$

$$= -\sum_{|\alpha|\le m}(D^\alpha(u\cdot grad)v, D^\alpha v)_0, \quad (1.8)$$

применим правило Лейбница:

$$D^\alpha(u\cdot grad)v = (u\cdot grad)D^\alpha v +$$

$$+\sum_{0<\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}(D^\beta u\cdot grad)D^{\alpha-\beta}v. \quad (1.9)$$

Интегрируя по частям имеем:

$$((u\cdot grad)D^\alpha v, D^\alpha v)_0 = (\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial D^\alpha v}{\partial x_i}, D^\alpha v)_0 =$$

$$= -(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} D^\alpha v, D^\alpha v)_0 -$$
$$-(\sum_{i=1}^{n} u_i D^\alpha v, \frac{\partial D^\alpha v}{\partial x_i})_0 \qquad (1.10)$$

Первое слагаемое в (1.10) с учетом (NS2) равно нулю; тогда второе равно себе самому с противоположным знаком, т.е. тоже равно нулю. Поэтому вклад первого слагаемого из правой части (1.9) в (1.8) равен нулю. Вклад остальных будет оценен с помощью следующего факта:

Предложение. *Пусть* $0 < \beta \leq \alpha$. *Тогда*

$$\|(D^\beta u \cdot grad) D^{\alpha-\beta} v\|_0 \leq c_0 \|u\|_{\eta+1} \|v\|_{|\alpha|},$$
$$|\beta| = 1, 2 \ldots \eta \qquad (1.11)$$
$$\|(D^\beta u \cdot grad) D^{\alpha-\beta} v\|_0 \leq c_0 \|u\|_{|\beta|} \|v\|_{|\alpha|-|\beta|+\eta+1},$$
$$|\beta| \geq \eta + 1 \qquad (1.12)$$

Доказательство.

Если $|\beta| = 1, 2 \ldots \eta$, то $\|D^\beta u\|_{\eta+1-|\beta|} \leq \|u\|_{\eta+1}$ и $\|grad\ D^{\alpha-\beta} v\|_{|\beta|-1} \leq \|v\|_{|\alpha|}$ и полагая в (1.1) $k = \eta + 1 - |\beta|, l = \eta$ получим (1.11). Если $|\beta| \geq \eta + 1$, то $\|D^\beta u\|_0 \leq \|u\|_{|\beta|}$ и $\|grad\ D^{\alpha-\beta} v\|_\eta \leq \|v\|_{|\alpha|-|\beta|+\eta+1}$ и полагая в (1.1) $k = 0$, $l = \eta$ получим (1.12).

Применение (1.11),(1.12) к каждому слагаемому в (1.9)(кроме первого) даст соответствующие оценки на слагаемые (1.8).Подводя итог, имеем:

$$|(F(u,v), v)_m| \leq c_2 \|u\|_{\max(\eta+1,m)} \|v\|_m^2 \qquad (1.13)$$

Если теперь u, v как в условии леммы,то приближаем их последовательностями из C_0^∞ $u_s \to u$ в $H^{\max(\eta+1,m)}$, $v_s \to v$ в $H^{\max(m,\eta)+1}$, $s = 0, 1, \ldots$, $div\, u_s = 0, div\, v_s = 0$; для этих u_s, v_s (1.13) уже доказано. Переходя к пределу при $s \to \infty$ получаем в силу того, что $H^l, l \geq \eta$ — банахова алгебра, что (1.13) верно и для u, v.(1.13) влечет (5),(6),(6'). Лемма доказана.

Напомним [3], что линейный самосопряженный положительно определенный оператор B с плотной в гильбертовом пространстве H областью определения $D(B)$ и со спектральной функцией S_λ представим в виде

$$B = \int_0^\infty \lambda dS_\lambda \qquad (9)$$

Он порождает *полугруппу* $e^{-tB} : H \to H, t \geq 0$

$$e^{-tB} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dS_\lambda$$

Оператор e^{-tB} имеет норму не более 1 и обладает следующим свойством: $e^{-tB} : H \to D(B), t > 0$ и вектор-функции $y(t) = e^{-tB} b, b \in H$ являются решениями дифференциального уравнения:

$$y'(t) = -By, t > 0 \qquad (7)$$

Если $b \in D(B)$, то

$$y'(t) = -By, t \geq 0 \qquad (7')$$

Оператор e^{-tB} коммутирует с любой степенью B.

A – линейный самосопряженный положительно определенный оператор в H_σ^m, $m > 0$; $D(A) = H_\sigma^{m+2}$. Значит при $t > 0$ $e^{-tA} : H_\sigma^m \to H_\sigma^{m+2}$ и можно рассмотреть e^{-tA} как оператор из H_σ^m в $H_\sigma^{m+2k}, 0 \leq k \leq 1$.

Лемма 2.

$$\|e^{-tA}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^m} \leq 1 \qquad (8)$$

$$\|e^{-tA}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^{m+2k}} \leq c_3 e^t t^{-k} \qquad (8')$$

$0 < k \leq 1, t > 0, m > 0$.

Доказательство.

(8) очевидно.

Далее, т.к. оператор $I+A$ строго положительно определен и самосопряжен, то он сильно позитивен (см. [3]). Поэтому для него справедлива оценка (см. [3]).

$$\|(I+A)^k e^{-t(A+I)}\|_{H_\sigma^p \to H_\sigma^p} \leq \frac{c_3}{t^k} \qquad (2.1)$$

Имеем далее:

$$\|e^{-tA}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^{m+2k}} \leq$$
$$\leq \|e^{tI}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^m} \|e^{-tI-tA}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^{m+2k}} \leq$$
$$\leq e^t \|(I+A)^{-k}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^{m+2k}} \times$$
$$\times \|(I+A)^k e^{-t(A+I)}\|_{H_\sigma^{m+2k} \to H_\sigma^{m+2k}} \leq$$
$$\leq \frac{c_3 e^t}{t^k} \|(I+A)^{-k}\|_{H_\sigma^m \to H_\sigma^{m+2k}} \qquad (2.2)$$

Но норма в пространстве $H_\sigma^p, p \geq 0$ может быть задана как

$$\|u\|_{H^p_\sigma} = \|(I+A)^{p/2}u\|_{L_2} \tag{9}$$

Действительно, при $\Omega = \mathbf{R^n}$ (см. [7]) $\|u\|_{H^p_\sigma(\mathbf{R^n})} = \|(I+A)^{p/2}u\|_{L_2(\mathbf{R^n})}$. Тогда

$$\|u\|_{H^p_\sigma(\Omega)} = \inf_{v:v|_\Omega=u} \|v\|_{H^p_\sigma(\mathbf{R^n})} = \|v_0\|_{H^p_\sigma(\mathbf{R^n})} =$$

$$= \|(I+A)^{p/2}v_0\|_{L_2(\mathbf{R^n})} = \|(I+A)^{p/2}u\|_{L_2(\Omega)},$$

где $v_0|_\Omega = u, v_0|_{\mathbf{R^n}\setminus\Omega} = 0, v_0 \in H^m_\sigma(\mathbf{R^n})$.

В силу (9) последняя норма в (2.2) равна 1. Лемма доказана.

Замечание. c_1, c_2, c_3 могут зависеть от m.

Доказательство теоремы 1.

Построим сначала решение следующего интегрального уравнения:

$$u(t) = Gu(t) \tag{10}$$

где

$$Gu(t) = e^{-(t-T_1)\nu A}a + \int\limits_{T_1}^{t} e^{-(t-s)\nu A}(Fu(s)+$$

$$+f(s))ds \tag{11}$$

Обозначим через $\|u\|_{m,C}$ норму в $C([T_1, T_1+T_\nu], H^m_\sigma)$, $T_\nu > 0$ будет определено ниже. Из (4) следует, что:

$$\|F(u,v)\|_{l,C} \le c_1\|u\|_{l,C}\|v\|_{l+1,C}, l \ge \eta \tag{12}$$

Но в силу билинейности F

$$Gu(t) - Gv(t) =$$

$$= \int\limits_{T_1}^{t} e^{-(t-s)\nu A}(F(u-v,u) + F(v,u-v))ds$$

$$\|Gu(t) - Gv(t)\|_m \le \int\limits_{T_1}^{t} \|e^{-(t-s)\nu A}\|_{H^{m-1}_\sigma \to H^m_\sigma} \times$$

$$\times(\|F(u-v,u)\|_{m-1} + \|F(v,u-v)\|_{m-1})(s)ds$$

Переходя здесь к максимуму по t и используя (12), заменяя где нужно $m-1$ на m, получаем

$$\|Gu - Gv\|_{m,C} \le$$

$$\le \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int\limits_{T_1}^{t} \|e^{-(t-s)\nu A}\|_{H^{m-1}_\sigma \to H^m_\sigma} \times$$

$$\times c_1(\|u\|_{m,C} + \|v\|_{m,C})\|u-v\|_{m,C}ds$$

Используя (8')

$$\|Gu - Gv\|_{m,C} \le$$

$$\le \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int\limits_{T_1}^{t} c_3 \frac{1}{(t-s)^{\frac12}\nu^{\frac12}} e^{(t-s)\nu} \times$$

$$\times c_1(\|u\|_{m,C} + \|v\|_{m,C})\|u-v\|_{m,C}ds \le$$

$$\le 2c_3\frac{T_\nu^{\frac12}}{\nu^{\frac12}}c_1e^{\nu T_\nu}(\|u\|_{m,C} + \|v\|_{m,C})\|u-v\|_{m,C} \tag{13}$$

Подобным образом, используя (11) и (8)

$$\|G0\|_{m,C} \le \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|e^{-(t-s)\nu A}\|_{H^m_\sigma \to H^m_\sigma}\|f\|_m(s)\,ds +$$

$$+\|e^{-(t-T_1)\nu A}a\|_{m,C} \le$$

$$\le \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds + \|a\|_m \tag{14}$$

Из (13), (14) и неравенства треугольника (предполагая $T_1 + T_\nu < T_2$)

$$\|Gu\|_{m,C} \le \|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_2} \|f\|_m(s)ds +$$

$$+2c_3\frac{T_\nu^{\frac12}}{\nu^{\frac12}}c_1e^{\nu T_\nu}\|u\|^2_{m,C} \tag{15}$$

Если $\|u\|_{m,C} \le R = 2(\|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_2}\|f\|_m(s)ds)$, то $\|Gu\|_{m,C} \le \frac{R}{2} + 2c_3\frac{T_\nu^{\frac12}}{\nu^{\frac12}}c_1e^{\nu T_\nu}R^2$.

Возьмем T_ν настолько малым,что

$$4c_3\frac{T_\nu^{\frac12}}{\nu^{\frac12}}c_1e^{\nu T_\nu}R < 1 \tag{16}$$

Тогда G переводит шар радиуса R в $C([T_1, T_1+T_\nu], H^m_\sigma)$ в себя. Из (13) и (16) видно, что G является сжатием. Значит (10) имеет решение в шаре; обозначим его u. Из (16) также следует, что T_ν зависит лишь от норм a и f в соответствующих пространствах, и при уменьшении этих норм не уменьшается.

Для этого решения u из (12) имеем $Fu \in C([T_1, T_1+T_\nu], H^{m-1}_\sigma)$. Обозначим интеграл в правой части (11) через v. Имеем :

$$Av(t) = \int_{T_1}^{t} A^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)\nu A} A^{\frac{1}{2}} Fu\, ds +$$

$$+ \int_{T_1}^{t} e^{-(t-s)\nu A} Af\, ds \qquad (17)$$

Но

$$\| \int_{T_1}^{t} A^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)\nu A} A^{\frac{1}{2}} Fu\, ds \|_{m-2} \leq$$

$$\leq \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)\nu A}\|_{H_\sigma^{m-2}\to H_\sigma^{m-2}} \times$$

$$\times \|A^{\frac{1}{2}} Fu\|_{m-2}(s) ds \leq$$

$$\leq \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|(I+A)^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)\nu A}\|_{H_\sigma^{m-2}\to H_\sigma^{m-2}} \times$$

$$\times \|A^{\frac{1}{2}} Fu\|_{m-2,C} ds \leq$$

$$\leq \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|e^{-(t-s)\nu A}\|_{H_\sigma^{m-2}\to H_\sigma^{m-1}} \times$$

$$\times \|A^{\frac{1}{2}} Fu\|_{m-2,C} ds \leq$$

$$\leq \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} c_3 \frac{e^{\nu(t-s)}}{\nu^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}}} \|A^{\frac{1}{2}} Fu\|_{m-2,C} ds$$

Т.к. подынтегральное выражение суммируемо, то последний максимум существует. Поэтому первое слагаемое в правой части (17) при каждом t принадлежит H_σ^{m-2}. А значит(как интеграл с переменным верхним пределом), оно принадлежит $C([T_1, T_1+T_\nu], H_\sigma^{m-2})$. Далее

$$\| \int_{T_1}^{t} e^{-(t-s)\nu A} Af\, ds \|_{m-2} \leq$$

$$\leq \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|e^{-(t-s)\nu A}\|_{H_\sigma^{m-2}\to H_\sigma^{m-2}} \times$$

$$\times \|Af\|_{m-2}(s) ds \leq$$

$$\leq \max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s) ds \leq \|f\|_{L([T_1,T_2],H_\sigma^m)}$$

Отсюда и второе слагаемое в правой части (17) принадлежит $C([T_1, T_1 + T_\nu], H_\sigma^{m-2})$. Значит $Av(t) \in C([T_1, T_1+T_\nu], H_\sigma^{m-2})$.

Далее, дифференцируя (используя (7)) $v(t) = \int_{T_1}^{t} e^{-(t-s)\nu A}(Fu(s) + f(s))ds$ имеем $\frac{dv}{dt} = -\nu Av + Fu + f \in C([T_1, T_1+T_\nu], H_\sigma^{m-2})$, т.к. каждое слагаемое принадлежит этому пространству. Поэтому $v \in C^1([T_1, T_1+T_\nu], H_\sigma^{m-2})$. Т.к. $e^{-(t-T_1)\nu A} a \in C^1([T_1, T_1+T_\nu], H_\sigma^{m-2})$ (из (7')), то $u \in C^1([T_1, T_1+T_\nu], H_\sigma^{m-2})$ и

$$\frac{du}{dt} = -\nu Av + Fu + f + \frac{d}{dt}(e^{-(t-T_1)\nu A} a)$$

Пользуясь (11) и (7')

$$\frac{du}{dt} = -\nu Au + Fu + f \qquad (18)$$

Значит u удовлетворяет (1) и очевидно (из (10) и (11)) (2). Теорема доказана.

3. Единственность

Теорема 2. *При $m \geq \eta + 1$ на отрезке $[T_1, T_2]$ существует не более одного решения задачи (1)-(2) в классе:*

$$u \in C([T_1, T_2], H_\sigma^m), u' \in L([T_1, T_2], H_\sigma^{m-2}) \qquad (19)$$

Доказательство.
Пусть есть два решения u_1 и u_2, обозначим $w = u_1 - u_2$. Подставим их в (1), возьмем разность двух уравнений:

$$\frac{dw}{dt} = -Aw + F(w, u_1) + F(u_2, w) \qquad (20)$$

Умножим это скалярно в H^{m-2} на $w(t)$ при некотором фиксированном $t, w(t) \neq 0$, пользуясь положительной определенностью A:

$$(\frac{dw}{dt}, w)_{m-2} \leq (F(w, u_1), w)_{m-2} + (F(u_2, w), w)_{m-2}$$

Пользуясь (4') и (6') ($c_4 = \max(c_1, c_2)$):

$$(\frac{dw}{dt}, w)_{m-2} \leq c_4(\|u_1\|_m \|w\|_{m-2}^2 + \|u_2\|_m \|w\|_{m-2}^2)$$

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{m-2}\|w\|_{m-2} \leq c_4(\|u_1\|_m + \|u_2\|_m)\|w\|_{m-2}^2$$

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{m-2}(t) \leq c_5 \|w\|_{m-2}(t) \qquad (21)$$

т.к. $\|u_1\|_m$ и $\|u_2\|_m$ непрерывны, а следовательно равномерно ограничены на $[T_1, T_2]$. По лемме Гронуолла получаем противоречие с $w(t) \neq 0$, что доказывает теорему.

4. Оценка решения

Пусть Ω ограничена в некотором направлении (т.е. лежит между двумя параллельными гиперплоскостями), $m \geq \eta + 1$. В этом случае из неравенства Пуанкаре [6] следует оценка

$$(Au, u)_m \geq \gamma\|u\|_{m+1}^2 \geq \gamma\|u\|_m^2, u \in H_\sigma^{m+2} \quad (22)$$

Лемма 3. *Пусть a и f удовлетворяют условиям теоремы 1, а Ω ограничена в некотором направлении. По теореме 1 существует решение (обозначим его через u) задачи (1)-(2) на некотором отрезке $[T_1, T_1 + T_\nu]$. Предположим*

$$\|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds < \frac{\gamma\nu}{c_2} \quad (23)$$

Тогда

$$\|u\|_m(t) \leq \|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds \quad (24)$$

Доказательство.

Пусть сначала a и $f(t)$ *достаточно гладки по* x (т.е. лежат в H^p и $L([T_1, T_1 + T_2], H_\sigma^p)$ с достаточно большим p). Тогда по теореме 1 существует решение на некотором $[T_1, T_1+T_\nu]$ и оно достаточно гладко по x и непрерывно дифференцируемо по t. Перемножим (1) с $u(t)$ скалярно в H^m при фиксированном t (предполагая $\|u\|_m(t) \neq 0$).

$$(\frac{du}{dt}, u)_m = (-\nu Au, u)_m + (Fu, u)_m + (f, u)_m$$

Из (22) и (5):

$$\frac{d\|u\|_m}{dt}\|u\|_m \leq -\nu\gamma\|u\|_m^2 + c_2\|u\|_m^3 + \|f\|_m\|u\|_m$$

$$\frac{d\|u\|_m}{dt} \leq -\nu\gamma\|u\|_m + c_2\|u\|_m^2 + \|f\|_m$$

Интегрируем от T_1 до t:

$$\|u\|_m(t) \leq \int\limits_{T_1}^{t} -\gamma\nu\|u\|_m(s) + c_2\|u\|_m^2(s)ds + \|a\|_m +$$

$$+ \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds \quad (25)$$

Заметим, что (25) также верно при $\|u\|_m(t) = 0$. Очевидно

$$\|u\|_m(0) \leq \|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds$$

Докажем

$$\|u\|_m(t) \leq \|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds$$

Действительно, если это не так, то найдутся $t_0 \geq T_1, \varepsilon > 0$, что

$$\|u\|_m(t_0) = \|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds + \varepsilon,$$

Без ограничения общности ε достаточно мало (т.к. функция $\|u\|_m(t)$ непрерывна, а непрерывная функция принимает все промежуточные значения):

$$\|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds + \varepsilon < \frac{\gamma\nu}{c_2},$$

Если таких t_0 (при фиксированном ε) несколько, перейдем к их инфимуму; тогда

$$\|u\|_m(t) < \|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds + \varepsilon < \frac{\gamma\nu}{c_2} \quad (24')$$

при $t < t_0$. Тогда полагая в (25) $t = t_0$:

$$\|a\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds + \varepsilon \leq \|a\|_m +$$

$$+ \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds + \int\limits_{T_1}^{t_0} c_2\|u\|_m(s)(\|u\|_m(s) - \frac{\gamma\nu}{c_2})ds$$

В силу (24') последний интеграл неположителен. Противоречие.

Пусть теперь a и f как в теореме 1 и u— решение (1)-(2), существующее на $[T_1, T_1 + T_\nu]$; возьмем a_j и f_j— последовательности ($j \in \mathbf{N}$) достаточно гладких по x функций, которые сходятся к a и f в соответственно H^m_σ и $L([T_1, T_1+T_\nu], H^m_\sigma)$. В силу того, что в банаховом пространстве пересечение всюду плотного множества с шаром плотно в этом шаре, можно считать, что

$$\|a_j\|_m \leq \|a\|_m,$$

$$\int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f_j\|_m(s)ds \leq \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f\|_m(s)ds \tag{26}$$

Если рассматривать задачи (1)-(2) с данными a_j и f_j, то в силу (26) и того, что при уменьшении a и f интервал существования не уменьшается (см. п.2) у этих задач будут достаточно гладкие по x и непрерывно дифференцируемые по t решения u_j на $[T_1, T_1+T_\nu]$. В частности, если выполнено (23) для a и f, то выполнен аналог (24):

$$\|u_j\|_m(t) \leq \|a_j\|_m + \int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f_j\|_m(s)ds < \frac{\gamma\nu}{c_2} \tag{27}$$

Чтобы доказать (24) для наших данных достаточно доказать, что $u_j \to u$ в $C([T_1, T_1+T_\nu], H^m_\sigma)$. Для этого покажем, что $u_j \to u$ в $C([T_1, T_1 + T_\nu], H^{m-2}_\sigma)$ и что последовательность u_j фундаментальна в $C([T_1, T_1+T_\nu], H^m_\sigma)$.

Берем разность (1) при подставленных туда u и u_j.

$$\frac{d}{dt}(u-u_j) = \nu A(u_j-u)+$$
$$+F(u-u_j, u) + F(u_j, u-u_j) + f - f_j \tag{28}$$

Умножая в H^{m-2} (28) на $w_j(t) = (u-u_j)(t)$ при фиксированном $t, \|w_j\|_{m-2}(t) \neq 0$, получим, пользуясь (4'),(6') и (22):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_j\|^2_{m-2} \leq (c_1\|u\|_m + c_2\|u_j\|_m)\|w_j\|^2_{m-2}+$$
$$+\|f-f_j\|_{m-2}\|w_j\|_{m-2}$$

В силу (27) и равномерной ограниченности $\|u\|_m(t)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_j\|^2_{m-2} \leq c_6\|w_j\|^2_{m-2} + \|f-f_j\|_{m-2}\|w_j\|_{m-2}$$

$$\frac{d}{dt}\|w_j\|_{m-2} \leq c_6\|w_j\|_{m-2} + \|f-f_j\|_{m-2}$$

Интегрируем от T_1 до t:

$$\|w_j\|_{m-2}(t) \leq \|a-a_j\|_{m-2}+$$
$$+c_6\int\limits_{T_1}^{t} \|w_j\|_{m-2}(s)ds+$$
$$+\int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f-f_j\|_{m-2}(s)ds \tag{29}$$

Если $\|w_j\|_{m-2}(t) = 0$, то (29), очевидно, тоже верно.

Отсюда по лемме Гронуолла при $j \to \infty$:

$$\max_{t\in[T_1, T_1+T_\nu]} \|w_j\|_{m-2}(t) \to 0 \tag{30}$$

Для доказательства фундаментальности последовательности в $C([T_1, T_1+T_\nu], H^m_\sigma)$ возьмем разность (1) при подставленных туда u_k и u_l, $k, l \in \mathbf{N}$, $w_{kl} = u_k - u_l$, $w_{kl}(t) \neq 0$, при некотором фиксированном t; опять возьмем скалярное произведение полученной разности с $w_{kl}(t)$, но в H^m_σ.

$$(\frac{dw_{kl}}{dt}, w_{kl})_m + (\nu A w_{kl}, w_{kl})_m + (F(w_{kl}, u_k), w_{kl})_m+$$
$$+(F(u_l, w_{kl}), w_{kl})_m + (f_k - f_l, w_{kl})_m$$

Пользуясь (4),(5),(22), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_{kl}\|^2_m + \gamma\nu\|w_{kl}\|^2_{m+1} \leq$$
$$\leq c_4(\|u_l\|_m + \|u_k\|_{m+1})\|w_{kl}\|^2_m + \|f_k - f_l\|_m\|w_{kl}\|_m$$
$$\frac{d}{dt}\|w_{kl}\|_m + \gamma\nu\|w_{kl}\|_{m+1} \leq$$
$$\leq c_4(\|u_l\|_m + \|u_k\|_{m+1})\|w_{kl}\|_m + \|f_k - f_l\|_m \tag{31}$$

Зафиксируем k. Пользуемся (27) и равномерной ограниченностью $\|u_k\|_{m+1}(t)$

$$\frac{d}{dt}\|w_{kl}\|_m + \gamma\nu\|w_{kl}\|_{m+1} \leq c_7\|w_{kl}\|_m + \|f_k - f_l\|_m$$

Интегрируем от T_1 до t:

$$\|w_{kl}\|(t) + \gamma\nu\int\limits_{T_1}^{t} \|w_{kl}\|_{m+1}ds \leq c_7\int\limits_{T_1}^{t} \|w_{kl}\|_m ds+$$
$$+\int\limits_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f_k - f_l\|_m ds + \|a_k - a_l\|_m \tag{32}$$

Из (27) следует, что правая часть (32) равномерно ограничена, а следовательно

$$\int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|w_{kl}\|_{m+1}(s)ds < c_8$$

Т.к. k фиксировано, то

$$\int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|u_l\|_{m+1}(s)ds < c_9 \quad (33)$$

где константа не зависит от l.
Из (31), интегрируя, имеем:

$$\|w_{kl}\|_m(t) \le c_4 \int_{T_1}^{t} (\frac{\gamma\nu}{c_2} + \|u_k\|_{m+1})\|w_{kl}\|_m ds +$$

$$+ \int_{T_1}^{t} \|f_k - f_l\|_m ds + \|a_k - a_l\|_m$$

Отсюда по лемме Гроноулла:

$$\|w_{kl}\|_m(t) \le (\|a_k - a_l\|_m +$$

$$+ \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f_k - f_l\|_m) \exp(\frac{c_4}{c_2} \int_{T_1}^{t} \gamma\nu + c_2\|u_k\|_{m+1}(s)ds) \quad (34)$$

Если $w_{kl}(t) = 0$, то (34) все равно верно. Пользуясь (33) при $\min(k, l) \to \infty$:

$$\max_{t\in[T_1,T_1+T_\nu]} \|w_{kl}\|_m(t) \le (\|a_k - a_l\|_m +$$

$$+ \int_{T_1}^{T_1+T_\nu} \|f_k - f_l\|(s)ds)c_{10} \to 0 \quad (35)$$

Итак, (24) доказана.

5. Глобальная разрешимость

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 если выполняется*

$$\|a\|_m + \int_{T_1}^{T_2} \|f\|_m(s)ds < \frac{\gamma\nu}{c_2} \quad (36)$$

и Ω ограничена в некотором направлении, то можно взять $T_\nu = T_2 - T_1$.

Доказательство.

Очевидно, найдутся $\tau > 0, N \in \mathbf{N}$, что $N\tau = T_2 - T_1$ и τ, подставленное в (16) вместо T_ν дает верное неравенство. Докажем индукцией по k, что решение можно продлить на $[T_1, T_1 + k\tau]$, если $k\tau \le T_2 - T_1$, так, чтобы его норма в $C([T_1, T_1 + k\tau], H^m_\sigma)$ оценивалась сверху через $\|a\|_m + \int_{T_1}^{T_1+k\tau} \|f\|_m(s)ds$. При $k = 1$ утверждение следует из выбора τ, (24) как оценки на $[T_1, T_1 + \tau]$ и теоремы 1.

Если есть решение u на $[T_1, T_1+k\tau]$, оцененное соответствующим образом сверху, то рассматривая задачу типа (1)-(2) на промежутке $[T_1 + k\tau, T_1 + k\tau + \tau]$ с начальными данными $a_k = u(T_1 + k\tau)$,

$$\|a_k\|_m = \|u\|_m(T_1 + k\tau) \le \|a\|_m +$$

$$+ \int_{T_1}^{T_1+k\tau} \|f\|_m(s)ds \quad (37)$$

Тогда аналог (16), легко видеть, выполнен и для этой задачи. И существует решение по теореме 1 и на этом промежутке. Объединив решения на $[T_1, T_1 + k\tau]$ и $[T_1 + k\tau, T_1 + k\tau + \tau]$ получим решение, которое по построению принадлежит $C([T_1, T_1 + k\tau + \tau], H^m_\sigma)$. Тогда правая часть (18) принадлежит $C([T_1, T_1+k\tau+\tau], H^{m-2}_\sigma)$. Значит, и левая, а отсюда решение лежит в $C^1([T_1, T_1 + k\tau + \tau], H^{m-2}_\sigma)$.Оценка на норму решения в $C([T_1, T_1 + k\tau + \tau], H^m_\sigma)$ следует из предположения индукции,(37) и (24) как оценки на $[T_1 + k\tau, T_1 + k\tau + \tau]$. Теорема доказана.

Замечания.

1. Нетрудно видеть, что теорема верна и при $T_2 = \infty$. Действительно, тогда (36) верно для любых $T_2 > T_1$ и, значит, решение существует на любом интервале. Более того, в этом случае решение принадлежит $L([T_1, +\infty), H^m_\sigma)$.

Действительно, обозначим

$$\delta = -\|a\|_m - \int_{T_1}^{+\infty} \|f\|_m(s)ds + \frac{\gamma\nu}{c_2} > 0$$

Заметим, что (25) верно и в этом случае для любых $T_\nu \ge t \ge T_1$ в силу того, что оно верно для гладких по x a и f и непрерывной зависимости решений от данных (см. замечание к теореме 4, п. 6); (24) также верно (см. доказательство теоремы 3); (25) с учетом (24) дает:

$$\|u\|_m(t)+\int\limits_{T_1}^{t} c_2\delta\|u\|_m(s)ds \le \|a\|_m+\int\limits_{T_1}^{+\infty}\|f\|_m(s)ds,$$

что влечет доказываемое.

2. Подобные результаты в других функциональных пространствах см. напр. [2], [4].

6. Непрерывная зависимость решений от данных

В этом пункте Ω опять может быть неограничена. Пусть a_k и f_k, $k=0,1,2,\dots$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Пусть

$$a_k \to a_0 \text{ в } H^m_\sigma, f_k \to f_0 \text{ в } L([T_1,T_2],H^m_\sigma) \quad (38)$$

тогда для всех k существуют решения u_k задачи (1)-(2) в классах (3). Пусть T^0_ν удовлетворяет (16) для a_0 и f_0. Тогда в силу непрерывной зависимости R от a и f в соответствующих нормах T^0_ν удовлетворяет (16) для a_k и f_k, для k, больших некоторого k_0, и решения u_k существуют на едином интервале. Без ограничения общности, можно считать, что $k_0=0$. Тогда верно следующее:

Теорема 4. *$u_k\to u_0$ в $C([T_1,T_1+T^0_\nu],H^m_\sigma)$.*

Доказательство. Заметим, что в п.4 при доказательстве непрерывной зависимости решений от данных при гладких по x a_k и f_k существенно использовалось не (26), а существование решений на едином интервале, ограниченность их по норме в $C([T_1,T_1+T^0_\nu],H^m_\sigma)$ единой константой, и оценка (33).

Первое в теперешнем случае верно из вышеприведенных рассуждений, второе следует из того, что u_k ограничено $R(a_k,f_k)$, а все R ограничены сверху в силу их непрерывной зависимости от a_k и f_k и (38). Оценку типа (33) можно получить из очевидной оценки

$$\int\limits_{T_1}^{T_1+T^0_\nu}\|u_l\|_m(s)ds<c_{11} \quad (39)$$

и оценки

$$\int\limits_{T_1}^{T_1+T^0_\nu}(\|u_l\|_{m+1}-\|u_l\|_m)(s)ds<c_{12} \quad (40)$$

Последняя следует из аналога (22)

$$(Au,u)_m\ge\gamma_1(\|u\|^2_{m+1}-\|u\|^2_m), u\in H^{m+2}_\sigma \quad (41)$$

(если воспользоваться (9), то в (41) вообще получается равенство с $\gamma_1=1$) и рассуждений, подобных проведенным в п.4 по выводу (33) в ограниченной области.

Таким образом, теорема верна в случае достаточно гладких по x a_k и f_k. Осталось воспользоваться следующей леммой.

Лемма 4. *Пусть X,Y - метрические пространства, множество B всюду плотно в X, f — отображение из X в Y. И пусть для любого x_0 из X и последовательности x_k из B, $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ выполнено $f(x_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. Тогда f непрерывно.*

Доказательство.

Действительно, докажем, что из $y_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ в X следует $f(y_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(y_0)$. Для этого построим для каждой точки y_k последовательность $x^k_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} y_k, x^k_l\in B$. Тогда $f(x^k_l)\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} f(y_k)$.

Зафиксируем $\varepsilon>0$. По каждому k найдем $L(k)$ такое, что (ρ означает расстояние).

$$l\ge L(k)\Rightarrow \rho(f(x^k_l),f(y_k))\le\frac{\varepsilon}{2} \quad (42)$$

Теперь по k найдем $M(k)$, что

$$l\ge M(k)\Rightarrow\rho(x^k_l,y_k)\le\frac{1}{k}$$

Обозначим $P(k)=\max(L(k),M(k))$. Тогда при $k\to\infty$:

$$\rho(x^k_{P(k)},y_0)\le\rho(x^k_{P(k)},y_k)+\rho(y_k,y_0)\le$$

$$\le \frac{1}{k}+\rho(y_k,y_0)\longrightarrow 0$$

Т.е. $x^k_{P(k)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_0$. Отсюда $f(x^k_{P(k)})\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(y_0)$. Найдем K такое, что

$$k>K\Rightarrow\rho(f(x^k_{P(k)}),f(y_0))\le\frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда из (42) и неравенства треугольника получаем

$$\rho(f(y_0),f(y_k))\le\varepsilon$$

что и влечет утверждение леммы.

Замечание. Пусть a_0 и f_0 удовлетворяют еще и условиям теоремы 3. Тогда (в силу (38)) (36) верно для a_k и f_k при достаточно больших k; без ограничения общности для всех. Тогда теорема

4 верна и в этом случае с заменой T_ν^0 на $T_2 - T_1$, что доказываеся совершенно аналогично(с некоторыми упрощениями).

Литература

1. T. Kato. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$. J. Funct. Anal. 9 (1972), p. 296—305.

2. T. Kato, H. Fujita. On the nonstationary Navier-Stokes system. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 32 (1961), p. 243—260

3. Красносельский М. А., Забрейко П. Е., Пустыльник Е. И. , Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.

4. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

5. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

6. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. М., 1981.

7. Функциональный анализ. Под ред. С. Г. Крейна. М., 1972.