ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 1

УДК 517.988

УСЛОВИЯ ВЫПУКЛОСТИ КВАРТИЧНОЙ ФОРМЫ С СИММЕТРИЕЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

© 2001 г. С. Л. Царев

Воронежский государственный университет

1. Введение. Нестрогая выпуклость на $\mathbf{R}^n$ функции $P:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ означает, что

$$P''(x)(h,h)\geq 0 \quad \forall\, x,h\in\mathbf{R}^n.$$

В настоящей статье излагается алгоритм проверки на выпуклость функции P в виде квартичной формы (однородного полинома четвертой степени) с симметрией параллелепипеда, то есть четной по каждой переменной:

$$P(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i^2x_j^2, \quad a_{ij}=a_{ji}. \qquad (1)$$

Задача о выпуклости функции такого вида возникает, например, при построении нелокальной конечномерной редукции [1, 2] для потенциала системы взаимодействующих нелинейных осцилляторов

$$V(x,\lambda)=\int\limits_0^1\left(\frac{|\dot{x}|^2}{2}-\lambda\frac{|x|^2}{2}+P(x)\right)dt,$$

где P – функция вида (1), $x\in\mathbf{R}^n$, λ – бифуркационный параметр. Подобные функционалы встречаются также при изучении нелинейных колебаний, фазовых состояний и эволюционных процессов в теории упругих систем, теории кристаллов, в моделях нейтронных звезд и других нелинейных системах самой разнообразной физической природы (см., например, [3] – [7]).

Оказалось, что задача о выпуклости квартики легко решается с помощью критериев условной положительности квадратичной формы в положительном координатном углу $\mathbf{R}^n_+=\{x\in\mathbf{R}^n: x_i\geq 0\,\forall\, i=1,\ldots,n\}$, полученных Л. Б. Рапопортом [8].

2. Алгоритм проверки в общем случае. Для квартики (1) выполняется равенство

$$\frac{1}{2}P''(x)(h,h)=$$

$$6\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2h_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}(\,x_i^2h_j^2+4x_ix_jh_ih_j+x_j^2h_i^2\,).$$

Для неотрицательности этого выражения при любых x,h необходимо, чтобы неотрицательными были все коэффициенты a_{ij}. В самом деле, для

$$x^{(i)}=h^{(i)}=(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1},1,0\ldots,0)$$

верны равенства

$$\frac{1}{2}P''(x^{(i)})(h^{(i)},h^{(i)})=6a_{ii},$$

$$\frac{1}{2}P''(x^{(i)})(h^{(j)},h^{(j)})=2a_{ij}.$$

Всюду далее предполагается, что $a_{ij}\geq 0\;\forall\, i,j$.

Для произвольной двойки векторов $(x,h)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ определим множества $K_-(x,h),\ K_+(x,h)\subset\{1,\ldots,n\}$ условиями

$$i\in K_-(x,h),\quad x_ih_i<0,$$

$$i\in K_+(x,h),\quad x_ih_i\geq 0.$$

Таким образом пространство $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ разбивается на области, для каждой из которых множества $K_-(x,h)$ и $K_+(x,h)$ фиксированы. Границами между этими областями служат подпространства $\{x_i=0\}$ и $\{h_i=0\}$. Соединение условий неотрицательности выражения $P''(x)(h,h)$ на области в $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, соответствующей фиксированным множествам $K_-(x,h)$ и $K_+(x,h)$, для всевозможных разбиений множества $\{1,\ldots,n\}$ на подмножества K_- и K_+ даст искомое условие выпуклости квартичной формы (1) на $\mathbf{R}^n$.

Зададимся двумя подмножествами $K_-,\ K_+\subset\{1,\ldots,n\}$, такими, что $K_-\cap K_+=\emptyset$, $K_-\cup K_+=\{1,\ldots,n\}$, в остальном произвольными, и рассмотрим область

$$\mathcal{U}:=\{(x,h)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n: K_-(x,h)=$$

$= K_-,\ K_+(x,h) = K_+\}$.

Пусть $K^- = (K_- \times K_+) \cup (K_+ \times K_-)$, $K^+ = (K_- \times K_-) \cup (K_+ \times K_+)$. Поскольку $x_i^2 h_j^2 + x_j^2 h_i^2 \geq 2|x_i x_j h_i h_j|$, для $(x,h) \in \mathcal{U}$

$$x_i^2 h_j^2 + 4x_i x_j h_i h_j + x_j^2 h_i^2 \geq 2x_i x_j h_i h_j, \quad (i,j) \in K^-,$$

$$x_i^2 h_j^2 + 4x_i x_j h_i h_j + x_j^2 h_i^2 \geq 6x_i x_j h_i h_j, \quad (i,j) \in K^+.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}P''(x)(h,h) = 6\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 h_i^2 +$$

$$+\sum_{i\neq j} a_{ij}(\,x_i^2 h_j^2 + 4x_i x_j h_i h_j + x_j^2 h_i^2\,) \geq 6\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 h_i^2 +$$

$$+6\sum_{(i,j)\in K^+} a_{ij} x_i x_j h_i h_j + 2\sum_{(i,j)\in K^-} a_{ij} x_i x_j h_i h_j =$$

$$= \frac{1}{2}P''(\tilde{x})(\tilde{h},\tilde{h}),$$

где $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $h = (h_1,\ldots,h_n)$, $\tilde{x} = (\sqrt{|x_1 h_1|},\ldots,\sqrt{|x_n h_n|})$, $\tilde{h} = (sgn(x_1 h_1)\sqrt{|x_1 h_1|},\ldots,sgn(x_n h_n)\sqrt{|x_n h_n|})$.

Положим $\tau_i = |x_i h_i|$; тогда

$$\frac{1}{4}P''(\tilde{x})(\tilde{h},\tilde{h}) = 3\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\tau_i^2 + 3\sum_{(i,j)\in K^+} a_{ij}\tau_i\tau_j -$$

$$-\sum_{(i,j)\in K^-} a_{ij}\tau_i\tau_j,$$

и, стало быть, неотрицательность выражения $P''(x)(h,h)$ на области $\mathcal{U}$ равносильна неотрицательности квадратичной формы

$$\Omega(\tau_1,\ldots,\tau_n) := 3\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\tau_i^2 + 3\sum_{(i,j)\in K^+} a_{ij}\tau_i\tau_j -$$

$$-\sum_{(i,j)\in K^-} a_{ij}\tau_i\tau_j \qquad (2)$$

в координатном углу $\mathbf{R}_+^n = \{r \in \mathbf{R}^n : r_i \geq 0\ \forall\, i = 1,\ldots,n\}$.

Как показал Л. Б. Рапопорт в работе [8], для неотрицательности на $\mathbf{R}_+^n$ квадрики $(A\cdot,\cdot)$ с матрицей $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий:

1) A неотрицательно определена на $\mathbf{R}^n$;

2) все сужения квадрики $(A\cdot,\cdot)$ на $(n-1)$-мерные координатные подпространства $\{r_i = 0\}$, $i = 1,\ldots,n$, неотрицательны на $\mathbf{R}_+^{n-1}$, и по крайней мере одна из этих квадратичных форм не является неотрицательно определенной на $\mathbf{R}^{n-1}$;

3) все сужения формы $(A\cdot,\cdot)$ на подпространства $\{r_i = 0\}, i = 1,\ldots,n$, неотрицательно определены на $\mathbf{R}^{n-1}$, матрица A имеет единственное отрицательное собственное значение, и среди алгебраических дополнений элементов последней (или любой другой) строки хотя бы одно отрицательно.

В статье [8] приводятся и алгебраические критерии проверки (все перечисленные условия сформулированы в терминах определителей).

Существует 2^n способов разбиения множества $\{1,\ldots,n\}$ на подмножества K_- и K_+. Поскольку симметричные варианты $K_- \cup K_+$ и $K_+ \cup K_-$ приводят к одной и той же квадратичной форме (2), проверке подлежат 2^{n-1} квадратичных форм. Для $K_- = \emptyset$ проверка тривиальна и дает уже сформулированное необходимое условие $a_{ij} \geq 0\ \forall\, i,j = 1,\ldots,n$.

3. Малые размерности. Для $n = 2$ и $n = 3$ условия выпуклости могут быть выведены непосредственно, без использования результатов Л. Б. Рапопорта.

При $n = 2$ единственному нетривиальному разбиению $\{1,2\} = \{1\} \cup \{2\}$ соответствует квадрика

$$\Omega(\tau_1,\tau_2) = 3a_{11}\tau_1^2 - 2a_{12}\tau_1\tau_2 + 3a_{22}\tau_2^2 =$$

$$= 3\left((\sqrt{a_{11}}\tau_1 - \sqrt{a_{22}}\tau_2)^2 + 2(\sqrt{a_{11}a_{22}} - \frac{a_{12}}{3})\tau_1\tau_2\right).$$

Очевидно, Ω неотрицательна на $\mathbf{R}_+^2$ при $a_{12} \leq 3\sqrt{a_{11}a_{22}}$. Таким образом, для выпуклости квартики

$$P_2(x_1,x_2) = a_{11}x_1^4 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 + a_{22}x_2^4$$

необходимо и достаточно выполнение системы неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq a_{11}, \\ 0 \leq a_{22}, \\ 0 \leq a_{12} \leq 3\sqrt{a_{11}a_{22}}. \end{cases}$$

Квартичная форма трех переменных общего вида

$$P_3(x_1,x_2,x_3) = a_{11}x_1^4 + a_{22}x_2^4 + a_{33}x_3^4 +$$

$$+2(a_{12}x_1^2x_2^2 + a_{13}x_1^2x_3^2 + a_{23}x_2^2x_3^2)$$

в случае положительности диагональных элементов a_{ii} (необходимость условий $a_{ii} \geq 0$ очевидна; при обращении в нуль одного из коэффициентов a_{ii} выпуклость функции P_3, как легко видеть, равносильна обращению в нуль двух коэффициентов a_{ij} при $j \neq i$ и выпуклости сужения формы P_3 на подпространство $\{x_i = 0\}$) заменой

$$y_i = \sqrt[4]{a_{ii}}x_i, \quad i = 1, 2, 3$$

(эта замена, будучи линейной, не влияет на знакоопределенность второго дифференциала) приводится к виду

$$P_3(x_1, x_2, x_3) = \tilde{P}_3(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + 2\alpha_{12}y_1^2y_2^2 + 2\alpha_{23}y_2^2y_3^2 + 2\alpha_{13}y_3^2y_1^2,$$

где $\alpha_{ij} = a_{ij}/\sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.

Нетривиальным разбиениям $\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\} = \{2\} \cup \{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\} = \{3\} \cup \{1, 2\}$ соответствуют квадратичные формы

$$\Omega_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 3\tau_1^2 + 3\tau_2^2 + 3\tau_3^2 - 2\alpha_{12}\tau_1\tau_2 -$$

$$-2\alpha_{13}\tau_1\tau_3 + 6\alpha_{23}\tau_2\tau_3,$$

$$\Omega_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 3\tau_1^2 + 3\tau_2^2 + 3\tau_3^2 - 2\alpha_{12}\tau_1\tau_2 +$$

$$+6\alpha_{13}\tau_1\tau_3 - 2\alpha_{23}\tau_2\tau_3,$$

$$\Omega_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 3\tau_1^2 + 3\tau_2^2 + 3\tau_3^2 + 6\alpha_{12}\tau_1\tau_2 -$$

$$-2\alpha_{13}\tau_1\tau_3 - 2\alpha_{23}\tau_2\tau_3.$$

Выражение для Ω_1 может быть преобразовано следующим образом:

$$\Omega_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 3\tau_1^2 - 2(\alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3)\tau_1 + 3\tau_2^2 + 3\tau_3^2 +$$

$$+6\alpha_{23}\tau_2\tau_3 = 3(\tau_1 - \frac{\alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3}{3})^2 + (3 - \frac{\alpha_{12}{}^2}{3})\tau_2^2 +$$

$$+2(3\alpha_{23} - \alpha_{12}\alpha_{13})\tau_2\tau_3 + (3 - \frac{\alpha_{13}{}^2}{3})\tau_3^2 =$$

$$= 3(\tau_1 - \frac{\alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3}{3})^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{9 - \alpha_{12}^2}\tau_2 - \sqrt{9 - \alpha_{13}^2}\tau_3)^2 +$$

$$+6(\alpha_{23} + \frac{\sqrt{9 - \alpha_{12}^2}\sqrt{9 - \alpha_{13}^2} - \alpha_{12}\alpha_{13}}{9})\tau_2\tau_3.$$

Из этого представления функции Ω_1 следует, что для ее положительности на $\mathbf{R}_+^3$ необходимо и достаточно выполнение условий $\alpha_{12}^2 \leq 9$, $\alpha_{13}^2 \leq 9$, $\alpha_{23} \geq \frac{\alpha_{12}\alpha_{13} - \sqrt{9-\alpha_{12}^2}\sqrt{9-\alpha_{13}^2}}{9}$. Аналогичные неравенства получаются для Ω_2 и Ω_3. Соединение этих условий с условиями $\alpha_{ij} \geq 0$ дает совокупность неравенств, доставляющую критерий выпуклости приведенной квартики $\tilde{P}_3$, а с ней и исходной квартики P_3, на $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} max\left(0, \frac{\alpha_{13}\alpha_{23}}{9} - \frac{\sqrt{9-\alpha_{13}^2}\sqrt{9-\alpha_{23}^2}}{9}\right) \leq \alpha_{12} \leq 3, \\ max\left(0, \frac{\alpha_{23}\alpha_{12}}{9} - \frac{\sqrt{9-\alpha_{23}^2}\sqrt{9-\alpha_{12}^2}}{9}\right) \leq \alpha_{13} \leq 3, \\ max\left(0, \frac{\alpha_{12}\alpha_{13}}{9} - \frac{\sqrt{9-\alpha_{12}^2}\sqrt{9-\alpha_{13}^2}}{9}\right) \leq \alpha_{23} \leq 3. \end{cases}$$

Список цитированной литературы

1. Сапронов Ю. И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // УМН, 1996. Т. 51. № 1. С. 101—132.

2. Царев С. Л. Существование и сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Воронеж, 2000. 97 с.

3. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.

4. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.

5. Монастырский М. И. Топология калибровочных полей и конденсированных сред. М.: ПАИМС, 1995. 478 с.

6. Смоленский Г. А., Боков В. А., Исупов В. А. и др. Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. Л.: Наука, 1971. 476 с.

7. Даринский Б. М., Сапронов Ю. И. Топологический подход к классификациям фаз кристаллических сегнетоэлектриков // В кн.: Топологические методы нелинейного анализа. Воронеж:, ВГУ, 2000. С. 41—57.

8. Рапопорт Л. Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы в конусе// ПММ, 1986. Т. 50. № 4. С. 674—679.