УДК 621.37:519.213

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА РАЗРЫВНОГО ОДНОРОДНОГО ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

© 2001 г. А. П. Трифонов, А. В. Захаров

Воронежский государственный университет

Получены асимптотические аппроксимации для вероятности превышения порога величиной абсолютного максимума однородного гауссовского случайного поля с недифференцируемой в нуле и локально факторизуемой корреляционной функцией, а также для функции распределения величины абсолютного максимума поля. Границы применимости асимптотических выражений установлены с помощью статистического моделирования на ЭВМ.

Одной из основных задач теории случайных функций является исследование вероятностных распределений различных функционалов от реализаций случайных процессов и полей [1]. Важной теоретической проблемой, имеющей существенное прикладное значение, является нахождение распределений функционалов типа супремума (абсолютного максимума) случайных функций в пределах некоторой области определения [2, 3]. Задача нахождения экстремальных значений случайных функций встречается в различных областях физики и техники, биологии, медицины и др. В частности, вероятностные распределения абсолютных максимумов случайных функций необходимо знать при анализе надежности сложных технических систем, при исследовании шероховатости поверхностей, при изучении предельных отклонений и устойчивости механических конструкций [4-7] и др. В статистической радиофизике и радиотехнике задача нахождения распределений абсолютных максимумов случайных процессов и полей возникает при анализе флуктуационных явлений в различных средах, при изучении воздействия шума на пороговые устройства и следящие измерители, при исследовании эффективности процедур обработки сигналов и изображений, наблюдаемых на фоне помех [7-10] и др. Отметим, что проблема нахождения вероятностных распределений абсолютного максимума случайной функции непосредственно связана с практически важной задачей исследования выбросов случайных процессов и полей за фиксированный уровень [11, 12] или с задачей анализа пересечений уровня реализацией случайной функции [13, 14].

Особенно интенсивно в настоящее время развивается теория экстремальных значений гауссовских случайных функций [3, 13, 15, 16 и др.]. Это обусловлено тем, что гауссовские процессы и поля адекватно описывают многие реальные физические явления, а также отличаются естественностью и простотой теоретического вероятностного описания. Начало разносторонних исследований экстремумов случайных функций было положено теоретической работой Райса [17], в которой получены формулы для среднего числа выбросов и намечены способы вычисления распределения абсолютного максимума некоторых случайных процессов. В последующие годы проблеме исследования максимумов гауссовских случайных функций было посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Однако, несмотря на большой интерес к этой проблеме как со стороны математиков, так и со стороны исследователей в прикладных областях физики и техники, точное выражение для функции распределения $F(u) = P\left[\sup\limits_{(\eta,\kappa)\in\Lambda} r(\eta,\kappa) < u\right]$ абсолютного (наибольшего) максимума гауссовского случайного поля $r(\eta,\kappa)$ в пределах заданной области определения Λ остается неизвестным даже в случае однородного поля.

В конце 60-х годов Беляевым [6] было получено асимптотически точное (с ростом u) выражение для вероятности $\alpha(u) = P\left[\sup_{(\eta,\kappa)\in\Lambda} r(\eta,\kappa) > u\right] = 1 - F(u)$ превышения порога u величиной абсолютного максимума однородного гауссовского случайного поля с дважды дифференцируемой при $\Delta\eta = \Delta\kappa = 0$ корреляционной функцией $R(\Delta\eta, \Delta\kappa)$. Такое случайное поле называется регулярным [18], его реализации непрерывны и дифференцируемы в среднеквадратическом [19]. Однако, в различных областях радиофизики и радиотехники встречаются однородные случайные поля с непрерывными, но недифференцируемыми дважды при $\Delta\eta = \Delta\kappa = 0$ корреляционными функциями. Производные таких корреляционных функций имеют разрыв первого рода в точке $\Delta\eta = 0$, $\Delta\kappa = 0$, поэтому соответствующие им поля, следуя [18], называют разрывными (нерегулярными). Результаты [6] для разрывных полей оказываются неприменимы. Отметим, что в силу непрерывности корреляционной функции при $\Delta\eta = \Delta\kappa = 0$ реализации разрывных полей непрерывны в среднеквадратическом [19].

В 70-х годах для однородных гауссовских случайных полей предложен метод нахождения асимптотически точного (с ростом u) выражения для распределения $F(u)$ без обязательного требования регулярности поля. Впервые этот метод, названный впоследствии методом двойной суммы [16], изложен в работе Пикандса [20] применительно к гауссовским стационарным случайным процессам. Эта работа содержала ряд ошибок, которые были исправлены Питербаргом [21], а также Кволсом и Ватанабе [22]. Они же в [23,24] получили асимптотически точное (с ростом u) выражение для вероятности $\alpha(u)$, справедливое и в случае разрывного однородного гауссовского случайного поля.

Дальнейшее обобщение результатов [23, 24] выполнено в [16, 25-27] и др. Приведенные в этих работах выражения для вероятности $\alpha(u)$ по-прежнему являются асимптотически точными с ростом u. Погрешность указанных выражений при конечных значениях u неизвестна, аналитически оценить эту погрешность не представляется возможным. Однако, анализ асимптотических выражений [16, 23-27] показывает, что их точность при конечных значениях u может оказаться неудовлетворительной. Так значения вероятности $\alpha(u)$, рассчитанные по формулам [16, 23-27], могут оказаться больше единицы, а соответствующие значения вероятности $F(u)$ - меньше нуля. При этом зависимости $\alpha(u)$ и $F(u)$ [16, 23-27] оказываются немонотонными по u и имеют экстремум. Это противоречит смыслу функций $\alpha(u)$ и $F(u)$ как вероятностей превышения и непревышения порога u величиной абсолютного максимума случайного поля. Отметим также, что погрешность выражения для $\alpha(u)$ [16, 23-27] значительно возрастает с уменьшением площади S области определения Λ случайного поля $r(\eta,\kappa)$. В частности, при $S \to 0$, когда область определения Λ стягивается в точку, формулы [16, 23-27] дают неверное нулевое значение вероятности $\alpha(u)$ вместо хорошо известного точного значения $\alpha(u) = 1 - \Phi(u)$ [19]. Здесь $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \exp(-t^2/2)\,dt \Big/ \sqrt{2\pi}$ - интеграл вероятности, являющийся функцией распределения гауссовской центрированной случайной величины с единичной дисперсией [19].

Далее найдены лишенные указанных недостатков асимптотически точные (с ростом u) выражения для распределений $\alpha(u)$ и $F(u)$ величины абсолютного максимума разрывного однородного гауссовского случайного поля с локально факторизуемой (разделимой) корреляционной функцией. Границы применимости полученных асимптотических выражений установлены экспериментально, с помощью статистического моделирования гауссовского случайного поля на ЭВМ. Полученные ниже аппроксимации распределения абсолютного максимума случайного поля удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим однородное центрированное гауссовское случайное поле $r(\eta,\kappa)$ с корреляционной функцией $R(\Delta\eta, \Delta\kappa) = R(\eta_1 - \eta_2, \kappa_1 - \kappa_2) = \langle r(\eta_1,\kappa_1) r(\eta_2,\kappa_2)\rangle$, где $\Delta\eta = \eta_1 - \eta_2$, $\Delta\kappa = \kappa_1 - \kappa_2$, а $\langle\ \rangle$ означает усреднение по реализациям случайного поля [19]. Не уменьшая общность получаемых результатов, полагаем, что случайное поле $r(\eta,\kappa)$ имеет единичную дисперсию. Будем считать, что функция $R(\Delta\eta, \Delta\kappa)$ локально факторизуема (разделима), так что при

$\delta = \max(|\Delta\eta|, |\Delta\kappa|) \to 0$ справедливо асимптотическое представление

$$R(\Delta\eta, \Delta\kappa) = R_1(\Delta\eta) R_2(\Delta\kappa) + o(\delta), \qquad (1)$$

где $R_1(\Delta\eta) = R(\Delta\eta, 0)$, $R_2(\Delta\kappa) = R(0, \Delta\kappa)$ - ортогональные сечения корреляционной функции по переменным $\Delta\eta$ и $\Delta\kappa$, а $o(\delta)$ - величина большего порядка малости, чем δ. Условие (1) фактически требует разделения переменных корреляционной функции $R(\Delta\eta, \Delta\kappa)$ или так называемой "сепарабельности"ее ортогональных сечений в малой окрестности точки $\Delta\eta = 0$, $\Delta\kappa = 0$. Модель однородного гауссовского случайного поля с факторизуемой корреляционной функцией широко используется в различных приложениях статистической радиофизики и радиотехники [28-31 и др.].

Рассмотрим здесь случай разрывного поля, когда факторизованные сомножители $R_i(t)$, $i = 1, 2$ корреляционной функции (1) при $t \to 0$ допускают асимптотическое представление

$$R_i(t) = 1 - d_i\,|t| + o(|t|), \quad d_i > 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

а при $t \to \infty : R_i(t) = o(1/|\ln|t||)$ [18, 32, 33 и др.]. Согласно (2), корреляционная функция $R(\Delta\eta, \Delta\kappa)$ случайного поля $r(\eta, \kappa)$ не имеет второй производной при $\Delta\eta = \Delta\kappa = 0$. Одним из примеров факторизуемой корреляционной функции, удовлетворяющей условию (2), является экспоненциальная функция $R(\Delta\eta, \Delta\kappa) = \exp(-\beta|\Delta\eta| - \gamma|\Delta\kappa|)$, где β и γ - некоторые константы. Гауссовское случайное поле с такой корреляционной функцией используется для описания шумового фона в системах обработки изображений [29-31], при пространственно-временных радиофизических измерениях [28] и др. Другим примером недифференцируемой в нуле и факторизуемой корреляционной функции является функция $R(\Delta\eta, \Delta\kappa) = \max(0; 1 - \beta|\Delta\eta|) \max(0; 1 - \gamma|\Delta\kappa|)$. К анализу гауссовского поля с такой корреляционной функцией сводится вычисление вероятности ложной тревоги при обнаружении гауссовского имульсного стохастического сигнала с неизвестными временем прихода и частотой [34].

Получим асимптотически точное (с ростом u) выражение для функции распределения $F(u) = P\left[\sup\limits_{(\eta,\kappa)\in\Lambda} r(\eta, \kappa) < u\right]$ абсолютного максимума случайного поля $r(\eta, \kappa)$, а также соответствующее выражение для вероятности $\alpha(u) = P\left[\sup\limits_{(\eta,\kappa)\in\Lambda} r(\eta, \kappa) > u\right]$ превышения порога u величиной абсолютного максимума поля. Будем считать, что область определения Λ, в пределах которой фиксируется максимум случайного поля $r(\eta, \kappa)$, задается условиями $\eta \in [0; m_1]$, $\kappa \in [0; m_2]$. Учтем, что вероятность непревышения (или превышения) порога $u \to \infty$ реализацией однородного центрированного гауссовского случайного поля $r(\eta, \kappa)$ определяется только асимптотическим поведением его корреляционной функции $R(\Delta\eta, \Delta\kappa)$ при $\delta = \max(|\Delta\eta|, |\Delta\kappa|) \to 0$ [16,23,24]. Согласно (1), (2), при $\delta \to 0$ корреляционная функция поля $r(\eta, \kappa)$ допускает асимптотическое представление

$$R(\Delta\eta, \Delta\kappa) = R_1(\Delta\eta) + R_2(\Delta\kappa) + o(\delta), \qquad (3)$$

где

$$R_i(t) = (1 - 2d_i\,|t|)/2, \quad i = 1, 2. \qquad (4)$$

Обозначим $r_i(t)$, $i = 1, 2$ - статистически независимые стационарные центрированные гауссовские случайные процессы с треугольными корреляционными функциями

$$B_i(t) = \begin{cases} 1/2 - d_i\,|t|, & \text{при } |t| \le 1/2d_i\,; \\ 0, & \text{при } |t| > 1/2d_i\,; \end{cases} \qquad (5)$$

соответственно. Из (3),(4) следует, что корреляционные функции гауссовских полей $r(\eta, \kappa)$ и $r_1(\eta) + r_2(\kappa)$ совпадают при $\delta \to 0$. Поэтому при больших значениях u вероятность $\alpha(u)$ можно приближенно представить в виде:

$$\alpha(u) \approx P\left[\sup_{\eta\in[0;m_1]} r_1(\eta) + \sup_{\kappa\in[0;m_2]} r_2(\kappa) > u\right] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [1 - F_1(u - x)]\, W_2(x)\, dx, \qquad (6)$$

где $F_1(x) = P\left[\sup\limits_{\eta\in[0;m_1]} r_1(\eta) < x\right]$, $F_2(x) = P\left[\sup\limits_{\kappa\in[0;m_2]} r_2(\kappa) < x\right]$ - функции распределения, а $W_1(x) = dF_1(x)/dx$ и $W_2(x) = dF_2(x)/dx$ - плотности вероятностей величин абсолютных максимумов случайных процессов $r_1(\eta)$ и $r_2(\kappa)$ на интервалах $\eta \in [0; m_1]$ и $\kappa \in [0; m_2]$ соответственно.

Воспользовавшись результатами [35] можно найти функцию распределения величины абсолютного максимума стационарного центрированного гауссовского случайного процесса $r(t)$ с треугольной корреляционной функцией $B(\Delta t) = \max(0; 1-|\Delta t|)$ на интервале $t \in [0;\rho]$ длительностью $0 \le \rho \le 1$:

$$F_r(u,\rho) = P\left[\sup_{t\in[0;\rho]} r(t) < u\right] = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} \Phi\left(\frac{u - x(1-\rho)}{\sqrt{\rho(2-\rho)}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx -$$

$$- \frac{\rho u}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{2-\rho}}\right) -$$

$$- \frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2-\rho}\right).$$

Соответствующая (7) плотность вероятности величины абсолютного максимума процесса $r(t)$ имеет вид

$$W_r(u,\rho) = \frac{2+\rho(u^2-1)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{u\sqrt{\rho}}{\sqrt{2-\rho}}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{\rho(2-\rho)}}{2\pi} u \exp\left(-\frac{u^2}{2-\rho}\right). \tag{8}$$

Условие $0 \le \rho \le 1$, при котором справедливы формулы (7),(8), означает, что длительность области определения случайного процесса не может превосходить его времени корреляции. Применительно к случайным процессам $r_i(t)$, $i = 1,2$ условие применимости формул (7),(8) запишется в виде

$$\xi_1 = d_1 m_1 \le 1/2, \quad \xi_2 = d_2 m_2 \le 1/2. \tag{9}$$

Здесь величины ξ_1 и ξ_2 имеют смысл приведенных размеров области определения Λ по переменным η и κ соответственно и определяются как отношение протяженности области Λ по соответствующей переменной к интервалу корреляции случайного поля $r(\eta,\kappa)$ по этой переменной. Воспользовавшись формулами (7),(8), для случайных процессов $r_i(t)$ с корреляционными функциями (5), получаем

$$F_i(x) = F_r(x\sqrt{2}, 2\xi_i),$$

$$W_i(x) = \sqrt{2} W_r(x\sqrt{2}, 2\xi_i). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), при выполнении (9) находим

$$\alpha(u) \approx \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - F_r\left[\sqrt{2}(u-x), 2\xi_1\right]\right\} W_r\left(\sqrt{2}x, 2\xi_2\right) dx, \tag{11}$$

где функции $F_r(x,\xi)$ и $W_r(x,\xi)$ определяются из (7),(8). При максимально допустимых значениях $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 1/2$ выражение (11) несколько упрощается

$$\alpha(u) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - \Phi^2\left[\sqrt{2}(u-x)\right] + \exp\left[-2(u-x)^2\right] \big/ 2\pi + \right.$$

$$\left. + (u-x)\exp\left[-(u-x)^2\right] \Phi\left[\sqrt{2}(u-x)\right] / \sqrt{\pi}\right\} \times$$

$$\times \left\{(1+2x^2)\exp(-x^2)\Phi(\sqrt{2}x) / \sqrt{\pi} + x\exp(-2x^2)/\pi\right\} dx. \tag{12}$$

Точность выражений (11),(12) возрастает с увеличением u. Соответсвующие (11),(12) асимптотически точные выражения для функции распределения $F(u)$ нетрудно рассчитать по формуле $F(u) = 1 - \alpha(u)$.

Отметим, что при $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ выражение (11) переходит в хорошо известное точное выражение $\alpha(u) = 1 - \Phi(u)$ для вероятности превышения порога u гауссовской случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией [19].

Точные выражения для функций распределения $F_i(x)$ при $\xi_i \ge 1/2$ найти не удается. Покажем, что для приближенного вычисления вероятности $\alpha(u)$ (6) при больших значениях u можно использовать асимптотически точные при $x \to \infty$ аппроксимации функций $F_i(x)$, $i = 1,2$. Введем в рассмотрение функции $\varphi_1(u) = \rho_1 u$, $\varphi_2(u) = \rho_2 u$, где ρ_1 и ρ_2 - не зависящие от u постоянные, удовлетворяющие условиям: $0 < \rho_1 < 1 - 1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2} < \rho_2 < 1$, причем $\rho_1 < \rho_2$ и $\varphi_1(u) < \varphi_2(u)$. Вероятность α (6) представим в виде $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_1 = J[-\infty, \varphi_1(u)]$, $\alpha_2 = J[\varphi_2(u), \infty]$, $\alpha_0 = J[\varphi_1(u), \varphi_2(u)]$, а $J(u_1,u_2) = \int_{u_1}^{u_2} [1 - F_1(u-x)] W_2(x) dx$. Покажем, что при $u \to \infty$ вклад величин α_1 и α_2 в интеграл $\alpha(u)$ (6) пренебрежимо мал.

В качестве оценки снизу для вероятности $\alpha(u)$ используем величину $\alpha_m = 1 - \Phi(u)$, которая является вероятностью превышения порога u значением $r(\eta^*,\kappa^*)$ гауссовского случайного поля в произвольной точке $\eta = \eta^*$, $\kappa = \kappa^*$

области определения. Здесь учтено, что значение случайного поля в некоторой точке не может быть больше, чем величина абсолютного максимума поля в пределах области определения, включающей данную точку. Используя асимптотическое разложение интеграла вероятности $\Phi(u)$ при больших значениях u, получаем, что $\alpha_m \to \exp(-u^2/2)\,/u\sqrt{2\pi}$ при $u \to \infty$.

Учтем, что $0 \le F_1(x) \le 1$, $0 \le W_2(x) \le C_m$, где $C_m = W_2(x_m)$ - не зависящая от u постоянная, а x_m - мода распределения $W_2(x)$. Тогда оценками сверху для интегралов α_2 и α_1 являются величины $\alpha_{20} = \int\limits_{\varphi_2(u)}^{\infty} W_2(x)\,dx = 1 - F_2[\varphi_2(u)]$ и $\alpha_{10} = C_m \int\limits_{-\infty}^{\varphi_1(u)} [1 - F_1(u-x)]\,dx = C_m \int\limits_{u-\varphi_1(u)}^{\infty} [1 - F_1(x)]dx$ соответственно. Здесь $\varphi_2(u) \to \infty$ и $u - \varphi_1(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, поэтому для исследования асимптотического (при $u \to \infty$) поведения оценок α_{10} и α_{20} можно использовать аппроксимации функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, асимптотически точные при $x \to \infty$. Будем считать, что размеры области определения Λ случайного поля $r(\eta,\kappa)$ велики, т.е.

$$\xi_1 = d_1 m_1 \gg 1, \quad \xi_2 = d_2 m_2 \gg 1. \tag{13}$$

Тогда, воспользовавшись результатами [32-34], находим асимптотические выражения

$$F_i(x) \approx \begin{cases} \exp\left[-2\xi_i x \exp(-x^2)\,/\sqrt{\pi}\right], \text{при } x \ge 1/\sqrt{2}; \\ 0, \quad \text{при } x < 1/\sqrt{2}; \qquad i = 1,2, \end{cases} \tag{14}$$

точность которых возрастает с увеличением ξ_i и x. При весьма больших x и ограниченных ξ_i, аналогично [32,34] получаем более простые, чем (14), но менее точные выражения

$$F_i(x) \approx 1 - 2\xi_i x \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}, \quad i = 1,2. \tag{15}$$

Используя (15), находим, что $\alpha_{20} \to 2\xi_2\varphi_2(u)\exp\left[-\varphi_2^2(u)\right]/\sqrt{\pi}$, $\alpha_{10} \to \xi_1 C_m \exp\left\{-\left[u - \varphi_1(u)\right]^2\right\}/\sqrt{\pi}$ при $u \to \infty$. Так как $\varphi_2^2(u) > u^2/2$, $\left[u - \varphi_1(u)\right]^2 > u^2/2$, то $\alpha_{10} = o(\alpha_m)$, $\alpha_{20} = o(\alpha_m)$ при $u \to \infty$.

Следовательно, $\alpha_1 = o(\alpha)$, $\alpha_2 = o(\alpha)$ и $\alpha \to \alpha_0$ при $u \to \infty$. Для нахождения интеграла $\alpha_0 = J\left[\varphi_1(u), \varphi_2(u)\right]$ необходимо вычислить функции $F_1(y)$ и $W_2(x)$ при $y \in [u - \varphi_2(u); u - \varphi_1(u)]$, $x \in [\varphi_1(u); \varphi_2(u)]$. Так как $\varphi_1(u) \to \infty$ и $u - \varphi_2(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, то для приближенного вычисления α_0 при больших значениях u достаточно использовать аппроксимации (14) функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, асимптотически точные при $x \to \infty$. Поскольку вклад величин α_1 и α_2 в интеграл α (6) с ростом порога u становится пренебрежимо мал, то пределы интегрирования $[\varphi_1(u); \varphi_2(u)]$ при вычислении α_0 можно заменить на бесконечные.

Таким образом, для приближенного вычисления вероятности $\alpha(u)$ (6) при больших значениях u можно использовать аппроксимации (14) функций $F_i(x)$, $i = 1,2$. В результате при выполнении (13) получаем

$$\alpha(u) \approx 1 - \exp\left\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\xi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\right) + \xi_1\left(u\sqrt{2} - 1\right) \times \right.\right. \tag{16}$$

$$\left.\left. \times \exp\left\{-\left(u\sqrt{2}-1\right)^2/2\right\}\right]\right\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi_2 \int\limits_1^{u\sqrt{2}-1} (x^2-1)\exp\left\{-\frac{x^2}{2} - \right.$$

$$\left. -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\xi_2 x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \xi_1\left(u\sqrt{2}-x\right)\exp\left\{-\left(u\sqrt{2}-x\right)^2/\,2\right\}\right]\right\} dx$$

при $u \ge \sqrt{2}$ и $\alpha(u) = 1$, при $u < \sqrt{2}$. Точность выражения (16) возрастает с увеличением u и ξ_i. Соответствующее (16) асимптотическое выражение для функции $F(u)$ нетрудно рассчитать по формуле $F(u) = 1 - \alpha(u)$.

Отметим, что асимптотически точные (с ростом u) выражения для распределений $\alpha(u)$ и $F(u)$ нетрудно записать в случаях, когда $\xi_i \gg 1$, $\xi_j < 1/2$, где $i,j = 1,2$, $i \ne j$. Для этого следует в выражении (6) использовать аппроксимацию (14) для функции $F_i(x)$ и выражение (10) для функции $F_j(x)$.

В [16, 23, 24] найдено асимптотически точное (с ростом u) выражение для вероятности превышения порога u реализацией однородного центрированного гауссовского случайного поля, откуда в случае разрывного поля находим

$$\alpha(u) = \xi_1\xi_2 u^3 H_a \exp(-u^2/2)\Big/\sqrt{2\pi}, \tag{17}$$

где $H_a = \lim\limits_{v\to\infty}\left[H_a^*(v)\,/v^2\right]$,

$H_a^*(v) = 1 + \int\limits_0^{\infty} P\left[\sup\limits_{(\eta,\kappa)\in\Theta} X(\eta,\kappa) > y\right]\exp(y)\,dy$,

$X(\eta,\kappa)$ - гауссовское случайное поле с математическим ожиданием $M(\eta,\kappa) = -|\eta| - |\kappa|$ и корреляционной функцией $K(\eta_1,\kappa_1,\eta_2,\kappa_2) = \langle[X(\eta_1,\kappa_1) - \langle X(\eta_1,\kappa_1)\rangle][X(\eta_2,\kappa_2) - \langle X(\eta_2,\kappa_2)\rangle]\rangle = |\eta_1| + |\eta_2| + |\kappa_1| + |\kappa_2| - |\eta_1 - \eta_2| - |\kappa_1 - \kappa_2|$, а Θ - область значений параметров η и κ, задаваемая условиями $\eta \in [0;v]$, $\kappa \in [0;v]$. Обозначим $X_j(t)$, $j = 1,2$ - статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $M_x(t) = -|t|$ и корреляционными функциями $K_x(t_1,t_2) = |t_1| + |t_2| - |t_1 - t_2|$. Так как $M(\eta,\kappa) = M_x(\eta) + M_x(\kappa)$ и $K(\eta_1,\kappa_1,\eta_2,\kappa_2) = K_x(\eta_1,\eta_2) + K_x(\kappa_1,\kappa_2)$, то статистические характеристики случайных полей $X(\eta,\kappa)$ и $X_1(\eta) + X_2(\kappa)$ совпадают. Поскольку $H_a^*(v) = \langle \exp\left[\sup\limits_{(\eta,\kappa)\in\Theta} X(\eta,\kappa)\right]\rangle$ [16], то в силу статистической независимости случайных процессов $X_1(\eta)$ и $X_2(\kappa)$ находим

$$H_a^*(v) = \langle \exp\left[\sup_{\eta\in[0;v]} X_1(\eta) + \sup_{\kappa\in[0;v]} X_2(\kappa)\right]\rangle =$$

$$= H_1(v)H_2(v) = H_1^2(v), \tag{18}$$

$$H_i(v) = \langle \exp\left[\sup_{t\in[0;v]} X_i(t)\right]\rangle =$$

$$= 1 + \int_0^\infty P\left[\sup_{t\in[0;v]} X_i(t) > y\right] \exp(y)\,dy,$$

$i = 1,2$. Из (18) следует, что $H_a = H_1^2$, где $H_1 = \lim\limits_{v\to\infty}[H_1(v)/v]$ - константа Пикандса [20,25]. В [25,33] получено, что $H_1 = 1$, тогда в (17) следует положить $H_a = 1$. Точность выражения (17) возрастает с увеличением u и ξ_i.

СРАВНЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМА ПОЛЯ РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сравним асимптотически точные выражения (16) и (17) для вероятности $\alpha(u)$. При $u\to\infty$ для выражения (16) получаем асимптотическую аппроксимацию
$\alpha(u) = \left(\xi_1\xi_2 u^3/\sqrt{2\pi}\right)\exp\left(-u^2/2\right)(1 + o(1/u))$. Следовательно, выражения (16) и (17) асимптотически (при $u\to\infty$) совпадают. Однако, при конечных значениях u выражения (16) и (17) могут давать значительно отличающиеся значения вероятности $\alpha(u)$. В частности, формула (17) при больших ξ_1, ξ_2 и малых u дает существенно завышенные значения для $\alpha(u)$, которые могут быть больше единицы. Так при $u = 2.5$, $\xi_1 = \xi_2 = 5$ по формуле (17) получаем $\alpha(u) \approx 6.85$, а при $\xi_1 = \xi_2 = 10$ – $\alpha(u) \approx 27.4$. При этом значения α, рассчитанные по формуле (16) не превосходят единицы, что в большей степени соответствует смыслу функции $\alpha(u)$ как вероятностной меры, лежащей в диапазоне значений от 0 до 1. Кроме того, зависимость $\alpha(u)$, задаваемая формулой (17), является немонотонной и имеет максимум при $u = \sqrt{3}$. Это противоречит смыслу функции $\alpha(u)$ как вероятности превышения порога случайной величиной. При этом зависимость $\alpha(u)$ (16) является монотонной.

С целью установления границ применимости асимптотически точных формул (11),(16),(17) при конечных значениях u выполнялось статистическое моделирование на ЭВМ величины абсолютного максимума однородного центрированного гауссовского случайного поля $r(\eta,\kappa)$ с корреляционной функцией $R(\Delta\eta,\Delta\kappa) = \exp(-|\Delta\eta| - |\Delta\kappa|)$. В процессе моделирования с шагом $\Delta t = 0.005$ формировались отсчеты $R_{ij} = r(i\Delta t, j\Delta t)$ случайного поля $r(\eta,\kappa)$. При этом среднеквадратическая погрешность $\varepsilon_0 = \sqrt{2\left[1 - R\left(\Delta t/2, \Delta t/2\right)\right]}$ ступенчатой аппроксимации непрерывных реализаций поля не превышает 0.1. Отсчеты R_{ij} вычислялись по рекуррентным формулам $R_{11} = n_{11}$, $R_{i1} = \sqrt{1-g^2}n_{i1} + gR_{(i-1)1}$, $R_{1j} = \sqrt{1-g^2}n_{1j} + gR_{1(j-1)}$, $R_{ij} = (1 - g^2)n_{ij} + gR_{i(j-1)} + gR_{(i-1)j} - g^2R_{(i-1)(j-1)}$, где $i,j = 2,3,\ldots$, $g = \exp(-\Delta t)$, а n_{lk} - независимые гауссовские случайные числа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Величина r_m абсолютного максимума поля $r(\eta,\kappa)$ в пределах области определения Λ находилась как наибольшее значение R_{ij} для всех $i = 1,2,\ldots,\{\xi_1/\Delta t\}$, $j = 1,2,\ldots,\{\xi_2/\Delta t\}$, где $\{x\}$ - целая часть числа. Экспериментальные значения вероятности $\alpha(u)$ для различных порогов u находились как относительные частоты превышения порогов величиной r_m.

На рис. 1 показана зависимость $\alpha(u)$, рассчитанная по формуле (16) (сплошные линии)

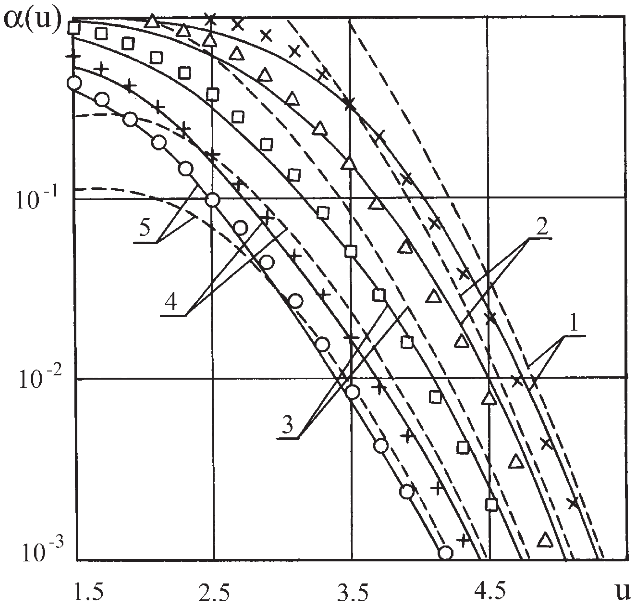

Рис. 1. Вероятность превышения порога величиной абсолютного максимума случайного поля при $\xi_1 \geq 0{,}5$, $\xi_2 \geq 0.5$

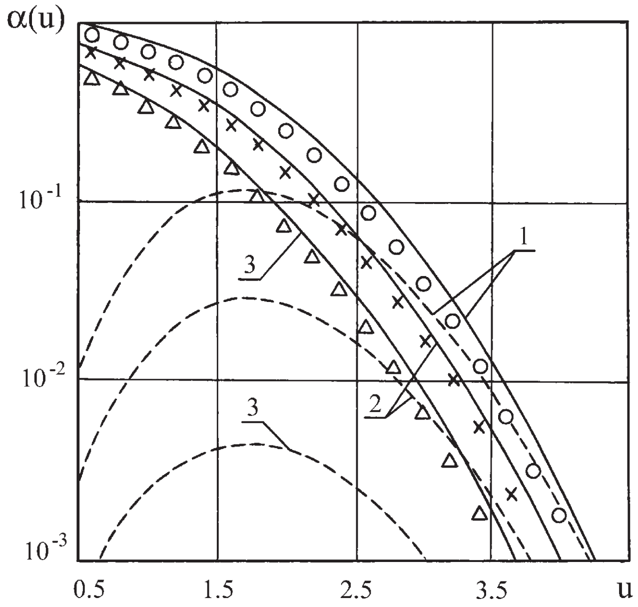

Рис. 2. Вероятность превышения порога величиной абсолютного максимума случайного поля при $\xi_1 \leq 0{,}5$, $\xi_2 \leq 0{,}5$

и по формуле (17) (штриховые линии). Там же нанесены экспериментальные значения α, полученные на основе обработки не менее 10^4 реализаций случайного поля. В результате, с вероятностью 0.95 границы доверительных интервалов отклоняются от экспериментальных значений $\alpha(u)$ не более, чем на 20 % при $\alpha \geq 0.01$, и не более, чем на 40 % при $\alpha \geq 0.003$. Кривые 1 и крестики соответствуют $\xi_1 = \xi_2 = 5$, кривые 2 и треугольники – $\xi_1 = \xi_2 = 3$, кривые 3 и квадратики – $\xi_1 = \xi_2 = 1.5$, кривые 4 и плюсы – $\xi_1 = \xi_2 = 0.8$, кривые 5 и кружочки – $\xi_1 = \xi_2 = 0.5$. Из рис. 1 видно, что полученная в работе асимптотическая формула (16) обладает более высокой точностью при конечных значениях u, чем формула (17), следующая из [16, 23-27]. При этом формула (16) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные уже при $\xi_1, \xi_2 \geq 0.5$, $u > \sqrt{2}$. Это позволяет рекомендовать формулу (16) к использованию при $\xi_1, \xi_2 > 0.5$.

На рис. 2 нанесена зависимость $\alpha(u)$, рассчитанная по формуле (11) (сплошные линии) и по формуле (17) (штриховые линии). Там же нанесены экспериментальные значения α, полученные на основе обработки не менее 10^4 реализаций случайного поля и характеризующиеся теми же доверительными интервалами, что и на рис. 1. Кривые 1 и кружочки соответствуют $\xi_1 = \xi_2 = 0.5$, кривые 2 и крестики – $\xi_1 = \xi_2 = 0.25$, кривые 3 и треугольники – $\xi_1 = \xi_2 = 0.1$. Из рис.2 и других результатов моделирования следует, что формула (11) обладает хорошей точностью и может быть рекомендована к использованию при $\xi_1, \xi_2 \leq 0.5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.

2. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 450 с.

3. Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989. 391 с.

4. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей. М.: Наука, 1975. 344 с.

5. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991.

6. Беляев Ю. К. Распределение максимума случайного поля и его приложения к задачам надежности // Изв. АН СССР. Техническая кибернентика. 1970. № 2. С. 77—84.

7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.

8. Долуханов М. П. Флуктуационные процессы при распространении радиоволн. М. Связь,1971. 183 с.

9. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.

10. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

11. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.

12. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987. 303 с.

13. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения / Под ред. Ю. К. Беляева. М.: Мир, 1978. 280 с.

14. Abrahams J. A. Survey of Recent Progress on Level-Crossing Problems for Random Process. N.Y.: Springer-Verlag, 1986.

15. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969. 400 с.

16. Питербарг В. И. Асимптотические методы в теории гауссовских процессов и полей. М.: Изд-во МГУ, 1988. 174 с.

17. Rise S. O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Techn. J. 1945. V. 24. N 1. P. 46—156.

18. Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.

19. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982, 624 с.

20. Pickands J. Upcrossing Probabilities for Stationary Gaussian Processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. Nov. P. 51—73.

21. Питербарг В. И. О работе Д. Пикандса "Вероятности пересечения для стационарного гауссовского процесса" // Вестник МГУ. Сер. мат., мех. 1972. N 5. С. 25—30.

22. Qualls C., Watanabe H. Asymptotic Properties of Gaussian Processes // Ann. of Math. Statist. 1972. V. 3. N 2. P. 580—596.

23. Беляев Ю. К., Питербарг В. И. Асимптотика среднего числа А-точек выбросов гауссовского поля за высокий уровень // ДАН СССР. 1972. Т. 203. N 1. С. 9—12.

24. Qualls C., Watanabe H. Asymptotic Properties of Gaussian Random Fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 177. March. P. 155—171.

25. Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50. № 6. С. 57—156.

26. Питербарг В. И., Махалева Т. Л. О распределении максимума гауссовского поля с постоянной дисперсией на гладком многообразии // Теория вероятностей и ее применения. 1996. Т. 41. № 2. С. 438—450.

27. Фаталов В. Р. Большие уклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p, $p \geq 2$ // Теория вероятностей и ее применения. 1996. Т. 41. № 3. С. 682—689.

28. Кловский Д. Д., Сойфер В. А. Обработка пространственно-временных сигналов. М.: Связь, 1976. 208 с.

29. Левшин В. Л. Обработка информации в оптических системах пеленгации. М.: Машиностроение, 1978. 164 с.

30. Прикладная теория случайных процессов и полей / Под ред. Васильева К. К., Омельченко В. А. Ульяновск: УлГТУ, 1995. 256 с.

31. Виттих В. А., Сергеев В. В., Сойфер В. А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. М.: Наука, 1982. 214 с.

32. Трифонов А. П., Шинаков Ю. С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.

33. Теория обнаружения сигналов / Под ред. Бакута П. А. М.: Радио и связь, 1984. 440 с.

34. Трифонов А. П., Нечаев Е. П., Парфенов В. И. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. Воронеж: ВГУ, 1991. 246 с.

35. Shepp L. A. Radon—Nicodym Derivatives of Gaussian Measures // Ann. Math. Statist. 1966. V. 37. P. 321—354.