ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 1

УДК 517.9

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА HELTON'A*

© 2001 г. Л. И. Сухочева

Воронежский государственный университет

1. Основные понятия. Пусть $\mathfrak{H}$ — линейное пространство с заданной на нем полуторалинейной формой $[\cdot,\cdot]$, называемой индефинитной метрикой. Такое пространство $\mathfrak{H}$ называют индефинитным. Основные положения теории индефинитных пространств см., например, в монографиях [1], [3], [5] и обзоре [2]. Здесь же мы приведем кратко только некоторые необходимые определения.

Естественным образом вводится знак вектора и линеала. Например, вектор x называется положительным, отрицательным или нейтральным, если $[x,x]>0$, $[x,x]<0$ или $[x,x]=0$, соответственно; линеал $\mathfrak{L}$ называется положительным, если каждый его ненулевой вектор положителен. Аналогично вводятся понятия неотрицательного, неположительного, отрицательного и нейтрального линеалов. Неотрицательные, неположительные и нейтральные линеалы назывют семидефинитными, а положительные и отрицательные — дефинитными, остальные — индефинитными.

Векторы x, y ортогональны, если $[x,y]=0$. Обычным образом вводится и ортогональность линеалов, ортогональное дополнение

$$\mathfrak{L}^{[\perp]}=\{x\in\mathfrak{H}\mid [x,y]=0,\ y\in\mathfrak{L}\}.$$

В отличии от гильбертова пространства, не исключено, что линеал $\mathfrak{L}^{\circ}=\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}^{[\perp]}$ ненулевой. В этом случае, $\mathfrak{L}$ называют вырожденным, а $\mathfrak{L}^{\circ}$ — его изотропной частью. Отметим, что семидефинитный линеал вырожден тогда и только тогда, когда он содержит ненулевые нейтральные векторы. Множество таких векторов в объединении с нулем образует изотропный линеал. Заметим справедливость и обратного утверждения: если в некотором линеале $\mathfrak{L}$ множество нейтральных векторов в объединении с нулем образует изотропный линеал, то $\mathfrak{L}$ семидефинитен.

Линеал $\mathfrak{L}_+$ ($\mathfrak{L}_-$) называют равномерно положительным (равномерно отрицательным) подпространством, если он является гильбертовым подпространством по отношению к полуторалинейной форме $[\cdot,\cdot]|_{\mathfrak{L}}$ $(-[\cdot,\cdot]|_{\mathfrak{L}})$.

Естественным образом вводится понятие максимальности семидефинитных линеалов. Символами $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ обозначим множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных линеалов, соответственно.

Говорят, что линеал $\mathfrak{L}_+$ ($\mathfrak{L}_-$) принадлежит классу h^+ (h^-), если он представим в виде суммы двух линеалов: равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространства и конечномерного нейтрального.

Ниже будем предполагать, что $\mathfrak{H}$ — пространство Крейна, т.е. существует разложение

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^+[\dot{+}]\mathfrak{H}^- \tag{1}$$

пространства $\mathfrak{H}$ в прямую ортогональную сумму, причем $\mathfrak{H}^+$ — равномерно положительное подпространство, а $\mathfrak{H}^-$ — равномерно отрицательное подпространство. Пусть $P^{\pm}$ — взаимно дополнительные проекторы на $\mathfrak{H}^{\pm}$, соответственно, и $J=P^+-P^-$. Тогда соотношение

$$(x,y)=[Jx,y],\quad x,y\in\mathfrak{H}$$

определяет на $\mathfrak{H}$ скалярное произведение, по отношению к которому $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Разложение (1) и оператор J называются каноническим разложением и канонической симметрией, соответственно, и одно определяет однозначно другое. Заметим, что топология пространства Крейна не зависит от выбора канонического разложения.

Каждое неотрицательное ($\mathfrak{L}_+$) и неположительное ($\mathfrak{L}_-$) подпространство допускает представление в виде:

$$\mathfrak{L}_+=\{x=x^++Kx^+\mid x^+\in P^+\mathfrak{L}_+,\ KP^+\mathfrak{L}_+\subset\mathfrak{H}^-,\ \|K\|\le 1\},$$

$$\mathfrak{L}_-=\{x=x^-+Qx^-\mid x^-\in P^-\mathfrak{L}_-,\ QP^-\mathfrak{L}_-\subset\mathfrak{H}^+,\ \|Q\|\le 1\}.$$

* Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00391 и NWO-RFBR 047-008-008

Линейные операторы K и Q взаимнооднозначно определяются подпространствами $\mathfrak{L}_+$ и $\mathfrak{L}_-$, соответственно, и называются угловыми операторами этих подпространств. В терминах угловых операторов можно определить равномерно положительные ($\|K\| < 1$) и равномерно отрицательные ($\|Q\| < 1$) подпространства. В этих терминах $\mathfrak{L}_+ \in h^+$ ($\mathfrak{L}_- \in h^-$) тогда и только тогда, когда его угловой оператор есть продолжение равномерного сжатия на не более, чем конечное число измерений.

Обычным образом вводятся понятия диссипативного, самосопряженного, унитарного и сжимающего операторов в пространстве Крейна и устанавливается между операторами соответствующих классов связь с помощью преобразования Кэли-Неймана.

2. Инвариантные подпространства. Одной из центральных проблем теории операторов в пространствах Крейна и ее приложений является проблема существования у упомянутых выше операторов максимальных семидефинитных инвариантных подпространств. Проблема существования максимального неотрицательного инвариантного подпространства имеет положительное решение для оператора T одного из этих классов, если, например, существует такое каноническое разложение (1), что "уголок" P^+TP^- компактен. Однако, это условие только достаточное. Приведем пример диссипативного оператора в пространстве Крейна, имеющего максимальное равномерно положительное инвариантное подпространство, но не существует такого канонического разложения, чтобы "уголок" был компактным.

Пример **1** Пусть $\mathfrak{H} = L_2(-1,1)$ с индефинитной метрикой

$$[f,g] = -\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\operatorname{sign} t dt.$$

В качестве компонент канонического разложения (1) возьмем следующие: $\mathfrak{H}^+ = L_2(-1,0)$ и $\mathfrak{H}^- = L_2(0,1)$. Рассмотрим оператор T, заданный в матричном виде относительно (1):

$$T = \begin{bmatrix} -iT_1 & 2iT_1S \\ 0 & -iT_2 \end{bmatrix},$$

где T_1 и T_2 — операторы умножения на независимую переменную в $L_2(-1,0)$ и $L_2(0,1)$, соответственно, а S — оператор изменения знака аргумента. Непосредственно проверяется, что такой оператор является диссипативным в $\mathfrak{H}$, подпространство $\mathfrak{H}^+$ инвариантно относительно T. Докажем, что не существует такого канонического разложения, что в нем оператор T имеет компактный "уголок".

Действительно, согласно [1, с. 205], существование такого канонического разложения эквивалентно существованию равномерного сжатия $Q:\mathfrak{H}^- \to \mathfrak{H}^+$ такого, что $R = -iQT_2 - 2iT_1S + iT_1Q$ — компактный оператор. Пусть такое Q существует. Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_1Q - QT_2)S^{-1} + \frac{1}{2}iRS^{-1}.$$

Поскольку $\|T_1\| = \|T_2\| = \|S^{-1}\| = 1$, оператор T_1 является возмущением равномерного сжатия $\frac{1}{2}(T_1Q - QT_2)S^{-1}$ компактным оператором $\frac{1}{2}iRS^{-1}$. Отсюда следует, что оператор $T_1 - I$ должен быть фредгольмов, в то время как он имеет нулевое ядро и обратный неограничен — противоречие.

В работе J.W. Helton'a [4] рассматриваются унитарные операторы U в пространстве Крейна, имеющие относительно (1) представление:

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} + V,$$

где операторы U_1 и U_2 такие, что их спектры не пересекаются, а V — компактный оператор. Отсюда следует, что оператор U имеет компактный "уголок", а из соответствующего уравнения

$$KU_{11} + KU_{12}K - U_{21} - U_{22}K = 0 \qquad (2)$$

для углового оператора K максимального неотрицательного инвариантного относительно U подпространства $\mathfrak{L}_+$ следует, что K — компактный оператор, а потому $\mathfrak{L}_+ \in h^+$.

Аналогично проверяется, что у оператора U существует максимальное неположительное инвариантное подпространство и каждое такое подпространство имеет компактный угловой оператор и потому оно принадлежит классу h^-.

Говорят, что оператор T принадлежит классу Helton'a, $T \in (H)$, если он имеет хотя бы одну пару максимальных семидефинитных инвариантных подпространство разного знака и каждое такое подпространство принадлежит классу h^+ или h^-, в зависимости от знака.

Пусть оператор $T \in (H)$ и зафиксировано каноническое разложение (1). Тогда угловые операторы инвариантных подпространств T не обязательно компактны. Приведем соответствующий пример.

Пример **2** Пусть задано каноническое разложение (1) и пусть $K : \mathfrak{H}^+ \to \mathfrak{H}^-$ — равномерное сжатие, не являющееся компактным оператором. Тогда, согласно [1, с. 166] имеем, что операторная матрица:

$$U = \begin{bmatrix} (I - K^*K)^{-1/2} & -K^*(I - KK^*)^{-1/2} \\ K(I - K^*K)^{-1/2} & -(I - KK^*)^{-1/2} \end{bmatrix},$$

где "*" означает гильбертово сопряжение, задает унитарный оператор в пространстве Крейна, причем $U^{-1} = U$. Рассмотрим оператор $V = UJU$, где J — каноническая симметрия. Так как J — унитарный оператор в пространстве Крейна и имеет единственную пару максимальных семидефинитных инвариантных подпространств, а именно, $\mathfrak{H}^+$ и $\mathfrak{H}^-$, которые равномерно дефинитны, то и оператор V является унитарным в пространстве Крейна и имеет единственную пару максимальных семидефинитных инвариантных подпространств, а именно, $U\mathfrak{H}^+$ и $U\mathfrak{H}^-$, которые также равномерно дефинитны. Следовательно, $V \in (H)$. Угловыми операторами для $U\mathfrak{H}^+$ и $U\mathfrak{H}^-$ являются K и K^*, соответственно, которые по определению не являются компактными.

Однако имеет место следующий результат, который справедлив для операторов всех упомянутых выше классов, но для простоты изложения мы его приводим только для случая унитарного оператора.

Теорема **1** *Пусть U — унитарный оператор в пространстве Крейна $\mathfrak{H}$ и $U \in (H)$. Тогда существует такое каноническое разложение* (1) *пространства $\mathfrak{H}$, что все угловые операторы максимальных семидефинитных инвариантных подпространств оператора U конечномерны.*

Доказательство. Сперва предположим, что у оператора U есть максимальное равномерно положительное инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_+$ и оно единственно. Тогда, взяв в качестве компонент канонического разложения $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{L}_+$, $\mathfrak{H}^- = \mathfrak{L}_+^{[\perp]}$, получим, что угловой оператор подпространства $\mathfrak{L}_+$ есть $K = 0$, а потому он конечномерен.

Если оператор U имеет максимальное равномерно положительное инвариантное подпространство и оно не единственное инвариантное подпространство для U в классе $\mathfrak{M}^+$, то U имеет непременно вырожденное инвариантное подпространство $\mathfrak{N}_+ \in \mathfrak{M}^+$. В самом деле, для этого достаточно проверить, что существует такое $\mathfrak{N}_+$, что его угловой оператор имеет норму равную 1 и воспользоваться тем, что $\mathfrak{N}_+ \in h^+$. Как мы видели выше, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{H}^+$ из (1) инвариантно относительно U. Тогда по отношению к разложению (1) оператор U представим диагональной операторно блочной матрицей. Поэтому, если K — угловой оператор любого другого инвариантного подпространства $\mathfrak{N}_+ \in \mathfrak{M}^+$, то и все подпространства с угловыми операторами αK, $|\alpha| \leq \|K\|^{-1}$ будут инвариантными для U (см. (2)). В частности — подпространство с угловым оператором $\|K\|^{-1}K$, которое и будет вырожденным.

Так как по определению оператора класса (H) изотропные подпространства его максимальных семидефинитных инвариантных подпространств лишь конечномерны, то существует такое инвариантное подпространство оператора U, что его изотропная часть имеет максимальную размерность: в противном случае из леммы Цорна следовало бы существование у оператора U инвариантного максимального неотрицательного подпространства с бесконечномерной изотропной частью, что противоречило бы включению $U \in (H)$. Обозначим это подпространство $\mathfrak{L}_+$, а через $\mathfrak{L}^\circ$ — его изотропную часть. Подпространство $\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_+^{[\perp]} \in \mathfrak{M}^- \cap h^-$ также инвариантно относительно U. По определению подпространств класса $h^\pm$ подпространства $\mathfrak{L}_\pm$ можно представить в виде суммы $\mathfrak{L}_\pm = \mathfrak{L}^\circ \dot{+} \mathfrak{L}_{\pm,1}$, где $\mathfrak{L}_{\pm,1}$ — взаимно ортогональные равномерно дефинитные подпространства соответствующего знака. По теореме Филлипса [6] (см. также [1, с. 94]) существуют взаимно ортогональные равномерно дефинитные подпространства $\widetilde{\mathfrak{L}}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$, являющиеся расширениями $\mathfrak{L}_\pm$, соответственно. Положим в (1): $\mathfrak{H}^\pm = \widetilde{\mathfrak{L}}_\pm$. При таком выборе $\mathfrak{L}_{\pm,1} \subset \mathfrak{H}^\pm$, коразмерность $\mathfrak{L}_{\pm,1}$ в

$\mathfrak{H}^{\pm}$ конечна и, более того, равна $\dim \mathfrak{L}^{\circ}$. В сделанных предположениях

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^{\circ} + \mathfrak{L}_{+,1} + \mathfrak{L}_{-,1} + J\mathfrak{L}^{\circ}, \qquad (3)$$

где J — каноническая симметрия, соответствующая выбранному каноническому разложению. Отметим, что

$$(\mathfrak{L}^{\circ})^{[\perp]} = \mathfrak{L}^{\circ} + \mathfrak{L}_{+,1} + \mathfrak{L}_{-,1}.$$

Относительно (3) оператор U представляется треугольной блок-матрицей вида

$$U = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & U_{+} & 0 & * \\ 0 & 0 & U_{-} & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix},$$

где символом * обозначены несущественные в нашем рассмотрении операторы. Подматрица

$$\begin{bmatrix} U_{+} & 0 \\ 0 & U_{-} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

является унитарным оператором в пространстве Крейна

$$\mathfrak{L}_{+,1}[\dot{+}]\mathfrak{L}_{-,1}, \qquad (5)$$

причем $\mathfrak{L}_{\pm,1}$ — его единственная пара максимальных семидефинитных инвариантных подпространств. Последнее следует из того, что $\mathfrak{L}^{\circ}$ — нейтральное инвариантное подпространство оператора U максимальной размерности.

Пусть $\mathfrak{S} \in \mathfrak{M}^{+}$ — инвариантное подпространство оператора U. Тогда $\mathfrak{S}_1 = (\mathfrak{L}^{\circ})^{[\perp]} \cap \mathfrak{S}$ — инвариантное подпространство оператора $U_1 = U|_{(\mathfrak{L}^{\circ})^{[\perp]}}$, причем $\dim \mathfrak{S}/\mathfrak{S}_1 \leq \dim \mathfrak{L}^{\circ}$. Следовательно, для того, чтобы угловой оператор подпространства $\mathfrak{S}$ был конечномерным, достаточно проверить, что конечномерным является угловой оператор подпространства $\mathfrak{S}_1$. Для этого рассмотрим подпространство

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_1 = \text{л.о.}\ \{\mathfrak{L}^{\circ}, \mathfrak{S}_1\}.$$

Это подпространство неотрицательно, инвариантно относительно U_1, а его проекция $\mathfrak{S}_2$ на подпространство (5) неотрицательна и инвариантна относительно оператора (4). Поскольку оператор (4) имеет единственное максимальное в (5) инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_{+,1}$, то упомянутая проекция $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{L}_{+,1}$. Поскольку

$$\mathfrak{S}_1 \subset \widetilde{\mathfrak{S}}_1 = \text{л.о.}\ \{\mathfrak{L}^{\circ}, \mathfrak{S}_2\},$$

то угловой оператор подпространства $\mathfrak{S}_1$, а с ним и произвольного максимального неотрицательного инвариантного подпространства оператора U, конечномерен.

Из метода доказательства теоремы 1 прямо вытекает приводимое ниже следствие, которое мы тоже формулируем только для унитарного оператора.

Следствие **1** *В условиях теоремы* 1 *существует такое каноническое разложение пространство Крейна, что "уголок" оператора U конечномерен.*

Список литературы

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: "Наука", 1986. 352 с.

2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения// Математический анализ, т. 17 (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ, 1979, с. 113—205.

3. Bognar J. Indefinite inner product spaces, Berlin: Springer-Verlag, 1974. 224 p.

4. Helton J. W. Unitary operators on a space with an indefinite inner product// J. Funct. Anal., 1970, v. 6, № 3, pp. 412—440.

5. Iokhvidov I. S., Krein M. G. and Langer H. Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. Berlin: Akademie-Verlag, 1982. 120 p.

6. Phillips R. S. The extension of dual subspaces invariant under an algebra// Proc. Intern. Sympos. Linea Spaces, Jerusalem, 1960, Jerusalem Acad. Press, Oxford, etc.: Pergamon Press, 1961, pp. 366—398.