УДК 517.925.52

К УСЛОВИЮ СХОДИМОСТИ МЕТОДА А. М. САМОЙЛЕНКО

© 2001 г. А. И. Перов, Л. Ю. Дикарева, С. А. Олейникова, М. М. Портнов

Воронежский государственный университет

В 1965-66 г.г. А. М. Самойленко разработал численно-аналитический метод исследования периодических решений вполне определенного класса систем дифференциальных уравнений (Т-систем) [1,2]. Этот метод он предложил называть методом последовательных периодических приближений. Подробное изложение этого метода можно найти в [3].

В настоящей работе рассматривается три подхода к уточнению оценки погрешности метода последовательных периодических приближений. При детальном анализе результатов А. М. Самойленко были выявлены некоторые неточности и внесен ряд изменений. В частности, удалось уточнить неравенства вспомогательной леммы, используемые при доказательстве сходимости метода. На этом и основан первый подход уточнения оценки погрешности метода. Второй подход основан на систематическом использовании, наряду с равномерной нормой, нормы в пространстве функций, суммируемых с квадратом, и неравенства В.А.Стеклова [4,5]. Третий подход основан на использовании наряду с равномерной нормой, нормы порожденной собственной функцией интегрального оператора, соответствующей его максимальному собственному значению.

Условимся, что через $|\mathbf{x}|$, где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, будем обозначать вектор с компонентами $|\mathbf{x}| = col(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, через $L^2[\tau, \tau + \omega]$ – пространство измеримых, числовых, суммируемых с квадратом функций на отрезке $[\tau, \tau + \omega]$, через $\|x(\cdot)\|$ – норму в пространстве $L^2[\tau, \tau + \omega]$, вычисляемую по формуле

$$\|x(\cdot)\| = \left(\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2},$$

через $\|\mathbf{x}(\cdot)\|_1$ – норму в пространстве векторных измеримых функций на отрезке $[\tau, \tau+\omega]$, вычисляемую по формуле

$$\|\mathbf{x}(\cdot)\|_1 = \int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} h(t)|\mathbf{x}(t)| \, dt,$$

где $h(t)$ – собственная функция интегрального оператора, соответствующая его максимальному собственному значению.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Т-СИСТЕМЫ

Совокупность условий, обеспечивающих применение метода к обыкновенным дифференциальным уравнениям, выделяет класс вполне определенных систем, довольно условно названных Т-системами [1,2].

Будем рассматривать систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$– точка n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, а $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ – вектор с компонентами $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определена и непрерывна в области

$$(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}^1 \times D \subset \mathbf{R}^{n+1}, \tag{2}$$

где D – ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, периодична по переменной t

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t + \omega, \mathbf{x}), \tag{3}$$

где период ω– некоторое положительное число. Будем предполагать, что функция $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| = col(|f_1(t, \mathbf{x})|, \ldots, |f_n(t, \mathbf{x})|)$ ограничена вектором $\mathbf{M}$

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \le \mathbf{M} \tag{4}$$

и удовлетворяет условию Липшица с неотрицательной квадратной $n \times n$-матрицей $\mathbf{L}$

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \le \mathbf{L}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \tag{5}$$

для всех $t \in \mathbf{R}^1$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$.

Обозначим через $\mathrm{U}(\mathbf{a}, \mathbf{d})$, где $\mathbf{a}$ – точка пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{d}$ – вектор с положительными компонентами, окрестность точки $\mathbf{a}$

$$\mathrm{U}(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{\mathrm{n}} : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \le \mathbf{d}\}.$$

Введем в рассмотрение множество

$$D_f = \{\mathbf{x} \in D : \mathrm{U}(\mathbf{x}, \frac{\omega}{2}\mathbf{M}) \subseteq \mathrm{D}\}.$$

Определение. *Систему дифференциальных уравнений (1), правая часть которой непрерывна на множестве (2) и удовлетворяет условиям (3)-(5), назовем* Т*-системой, если:*

1. *множество D_f не пусто*
$$D_f \ne \emptyset; \tag{6}$$
2. *наибольшее собственное значение матрицы $\mathbf{Q} = \dfrac{\omega}{\pi}\mathbf{L}$ меньше единицы или*
$$spr\mathbf{Q} < \mathbf{1}, \tag{7}$$
где $spr\mathbf{Q}$ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{Q}$.

Систему (1) логично бы было определить как ω-систему, но мы сохраним за системой (1) название предложенное А.М.Самойленко Т-система ($T = \omega$).

Отметим, что при высказанных выше предположениях, правые части системы (1) непрерывны на множестве (2). Поэтому из непрерывности правых частей и компактности множества D вытекает существование постоянного вектора $\mathbf{M}$, для которого имеет место оценка (4).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ А.М. САМОЙЛЕНКО

Для наглядности приведем теорему и вспомогательные леммы [3]:

Лемма 1. *Пусть $f(t)$ есть непрерывная на отрезке*

$$\tau \le t \le \tau + \omega \tag{8}$$

функция. Тогда

$$\left| \int_\tau^t \left(f(s) - \frac{1}{\omega} \int_\tau^{\tau+\omega} f(t)\, dt \right) ds \right| \le$$

$$\le 2(t-\tau)\left(1 - \frac{t-\tau}{\omega}\right) \max_{t \in [\tau, \tau+\omega]} |f(t)| =$$

$$= \alpha_1(t) \max_{t \in [\tau, \tau+\omega]} |f(t)| \tag{9}$$

для всех t из отрезка (8).

Лемма 2. *Пусть последовательность функций $\alpha_0 = 1, \alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_m(t), \ldots$ определяется реккурентным соотношением*

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t-\tau}{\omega}\right) \int_\tau^t \alpha_m(s)\, ds +$$

$$+ \frac{t-\tau}{\omega} \int_t^{\tau+\omega} \alpha_m(s)\, ds, \ m = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Тогда существуют положительные постоянные

$$\begin{gathered} q_0 = 1, q_1 = \tfrac{1}{3}, q_2 = \tfrac{1}{10}, \ldots; \\ \tfrac{1}{5^m} \le q_m \le \frac{1}{10^{\left[\frac{m}{2}\right]} 3^{2\left(\frac{m}{2}\right)}}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\left[\frac{m}{2}\right], \left(\frac{m}{2}\right)$ – соответственно целая и дробная часть числа $\frac{m}{2}$, такие, что

$$\alpha_{m+1}(t) \le \omega^m q_m 2(t-\tau)\left(1 - \frac{t-\tau}{\omega}\right) = \omega^m q_m \alpha_1(t) \tag{12}$$

для всех t из отрезка (8).

Теорема 1. *Пусть функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ определена в области (2), непрерывна по $t, \mathbf{x}$, периодична по t с периодом ω (3) и удовлетворяет неравенствам (4)-(7). Тогда последовательность периодических по t периода ω функций*

$$\mathbf{x}_0(t, \tau, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0,$$

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \int_\tau^t \{\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_{m-1}(s, \tau, \mathbf{x}_0)) - \\ - \triangle_{m-1}(\tau, \mathbf{x}_0)\}\, ds, \end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\triangle_{m-1}(\tau, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{\omega} \int_\tau^{\tau+\omega} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_{m-1}(t, \tau, \mathbf{x}_0))\, dt, \tag{14}$$

сходится при $m \to \infty$ равномерно относительно

$$(t, \tau, \mathbf{x}_0) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \times D_f \tag{15}$$

к функции $\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0)$, *определенной в области (15), периодической по* t,τ *с периодом* ω *и удовлетворяющей системе уравнений*

$$\mathbf{x}(t,\tau,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0+\int\limits_{\tau}^{t}\{\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s,\tau,\mathbf{x}_0))-\triangle(\tau,\mathbf{x}_0)\}\,ds, \tag{16}$$

где

$$\triangle(\tau,\mathbf{x}_0)=\frac{1}{\omega}\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega}\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t,\tau,\mathbf{x}_0))\,dt. \tag{17}$$

При этом

$$|\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)|\leq$$
$$\leq\alpha_1(t)\mathbf{Q}^m\left((\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}+\sum_{j=1}^{3}\delta_{jm}\mathbf{B}_j\right)\mathbf{M}, \tag{18}$$

для всех $m\geq 1$ *и* $t\in\mathbf{R}^1$, *где* δ_{jm} – символ Кронекера,

$$\mathbf{B}_1=\frac{1}{30\pi^2}\left((10\pi^3-30\pi^2)\mathbf{I}+(3\pi^3-30\pi)\omega\mathbf{L}+\right.$$
$$\left.+(\pi^3-30)\omega^2\mathbf{L}^2\right);$$
$$\mathbf{B}_2=\frac{1}{30\pi}\left((3\pi^3-30\pi)\omega\mathbf{I}+(\pi^3-30)\omega\mathbf{L}\right); \tag{19}$$
$$\mathbf{B}_3=\frac{(\pi^3-30)}{30}\mathbf{I}.$$

При этом одним из ключевых неравенств в получении оценки погрешности (18)-(19) является оценка

$$\frac{1}{10^{\left[\frac{m}{2}\right]}3^{2\left(\frac{m}{2}\right)}}\leq\frac{1}{\pi^m},\quad \text{при } m\geq 4. \tag{20}$$

Заметим, что неравенство (20) приводится без доказательства и его появление ничем не мотивируется.

3. ПЕРВЫЙ ПОДХОД

При попытке доказательства неравенства (20) оказалось, что оно имеет место лишь при $m\geq 8$. Заметим однако, что неравенство (20) имеет место для всех четных m.

Утверждение. *Для любого четного числа* $m=2k, k\in N$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{10^{\left[\frac{m}{2}\right]}3^{2\left(\frac{m}{2}\right)}}<\frac{1}{\pi^m}.$$

Внесем изменения в лемму 2.

Лемма 3. *Пусть последовательность функций* $\alpha_0=1,\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots,\ \alpha_m(t),\ldots$ *определяется соотношением (10). Тогда существуют положительные постоянные*

$$q_0=1, q_1=\tfrac{1}{3}, q_2=\tfrac{1}{10}, q_3=\tfrac{37}{1260},$$
$$\tfrac{1}{5^m}\leq q_m\leq\tfrac{1}{\pi^m},\ m=2,3,\ldots, \tag{21}$$

такие что

$$\alpha_{m+1}(t)\leq\omega^m q_m\alpha_1(t)$$

для всех t *из отрезка* $t\in[\tau,\tau+\omega]$.

Доказательство. Из оценки (11) леммы 2 и утверждения следует,что

$$q_m\leq\frac{1}{\pi^m}\quad\text{для всех четных } m.$$

Таким образом, для всех четных m лемма доказана.

Покажем, что $q_m\leq\dfrac{1}{\pi^m}$ для всех нечетных $m\geq 3$. Непосредственные подсчеты показывают, что

$$\alpha_1(t)=2(t-\tau)\left(1-\tfrac{t-\tau}{\omega}\right)\leq\tfrac{\omega}{2};$$
$$\alpha_2(t)=\alpha_1(t)\left(\tfrac{\omega}{6}+\tfrac{1}{3}\alpha_1(t)\right)\leq\tfrac{\omega}{3}\alpha_1(t);$$
$$\alpha_3(t)=\alpha_1(t)\left(\tfrac{\omega^2}{20}+\tfrac{\omega}{15}\alpha_1(t)+\tfrac{1}{15}\alpha_1^2(t)\right)\leq\tfrac{\omega^2}{10}\alpha_1(t);$$
$$\alpha_4(t)=\alpha_1(t)\left(\tfrac{37}{2520}\omega^3+\tfrac{25}{1260}\omega^2\alpha_1(t)+\tfrac{\omega}{70}\alpha_1^2(t)+\tfrac{1}{105}\alpha_1^3(t)\right)\leq$$
$$\leq\tfrac{37}{1260}\omega^3\alpha_1(t) \tag{22}$$

для всех $t\in[\tau,\tau+\omega]$.

Заметим, что константа $q_3=\frac{37}{1260}$ удовлетворяет неравенству

$$q_3<\frac{1}{\pi^3}. \tag{23}$$

Из соотношений (10) и (22) следует, что при $t\in[\tau,\tau+\omega]$

$$\alpha_4(t)\leq\tfrac{\omega^2}{10}\alpha_2(t);$$
$$\alpha_m(t)\leq\tfrac{\omega^2}{10}\alpha_{m-2}(t),\quad m\geq 3. \tag{24}$$

Методом математической индукции легко показать, что неравенства (24) влекут за собой оценку

$$\alpha_m(t) \le \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{m-4} \alpha_4(t), \quad m = 2k,\ k = 2, 3, \dots. \tag{25}$$

Из неравенства (25) с учетом (22) и (23) следует, что для любого четного числа $m \ge 4$

$$\alpha_m(t) \le \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{m-1} \alpha_1(t), \quad t \in [\tau, \tau + \omega].$$

Последнее неравенство может быть переписано как

$$\alpha_m(t) \le \omega^{m-1} q_{m-1} \alpha_1(t),\ m = 2k,\ k = 2, 3, \dots,$$

лишь только

$$q_{m-1} \le \frac{1}{\pi^{m-1}}, \quad m - 1 = 3, 5, \dots.$$

А это и доказывает справедливость оценки (20) для всех нечетных $m \ge 3$.

Доказательство оценки снизу в неравенстве (21) можно найти в [3], но не является для нас существенным и здесь приводиться не будет.

Учитывая результаты леммы 3, мы можем вновь сформулировать теорему с новыми оценками погрешности.

Теорема 2. *Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда последовательность периодических по t с периодом ω функций (13) равномерно сходится к функции $\mathbf{x}^0(t, \tau, \mathbf{x}_0)$, определенной в области (15), периодической по t, τ с периодом ω и удовлетворяющей уравнению (16). При этом справедлива оценка погрешности*

$$|\mathbf{x}^0(t, \tau, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0)| \le$$
$$\le \alpha_1(t) \mathbf{Q}^m \left((\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} + \delta_{1m} \mathbf{B}_1 \right) \mathbf{M}, \tag{26}$$

где

$$\mathbf{B}_1 = \left(\frac{\pi}{3} - 1\right) \mathbf{I}, \tag{27}$$

для всех $m \ge 1$ и $t \in \mathbf{R}^1$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $\mathbf{x}_1(t, \tau, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_2(t, \tau, \mathbf{x}_0), \dots$, $\mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0), \dots$, определяемую реккурентным соотношением (13). Каждая из функций этой последовательности периодическая по t с периодом ω. Более того, при $\mathbf{x}_0 \in D_f$ в силу леммы 1

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \le 2(t - \tau) \left(1 - \frac{t - \tau}{\omega}\right) \mathbf{M} \le \frac{\omega}{2} \mathbf{M}.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{x}_1(t, \tau, \mathbf{x}_0) \in D$ при $\mathbf{x}_0 \in D_f$. Если же $\mathbf{x}_{m-1}(t, \tau, \mathbf{x}_0) \in D$, то из (13) в силу леммы 1 следует

$$|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0| \le \frac{\omega}{2} \mathbf{M},$$

т.е. $\mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0) \in D$ при $\mathbf{x}_0 \in D_f$. По индукции заключаем, что для всех $m \ge 0$, любых $(t, \tau) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ и каждого $\mathbf{x}_0 \in D_f$ функции $\mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0)$ принадлежит множеству D.

Из (13) находим теперь, что

$$|\mathbf{x}_{m+1}(t, \tau, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0)| \le$$
$$\le \left(1 - \frac{t - \tau}{\omega}\right) \int_\tau^t \mathbf{L} |\mathbf{x}_m(s, \tau, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_{m-1}(s, \tau, \mathbf{x}_0)|\, ds +$$
$$+ \frac{t - \tau}{\omega} \int_t^{\tau+\omega} \mathbf{L} |\mathbf{x}_m(s, \tau, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_{m-1}(s, \tau, \mathbf{x}_0)|\, ds \tag{28}$$

для всех $m \ge 1$ и для всех t из отрезка $\tau < t < \tau + \omega$.

Обозначим

$$|\mathbf{x}_{m+1}(t, \tau, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0)| = \mathbf{r}_{m+1}(t)$$

и перепишем неравенство (28) в виде

$$\mathbf{r}_{m+1}(t) \le$$
$$\le \mathbf{L} \left(\left(1 - \frac{t - \tau}{\omega}\right) \int_\tau^t \mathbf{r}_m(s)\, ds + \frac{t - \tau}{\omega} \int_t^{\tau+\omega} \mathbf{r}_m(s)\, ds \right). \tag{29}$$

Так как $\mathbf{r}_1(t) \le \mathbf{M} \alpha_1(t)$, $t \in [\tau, \tau + \omega]$, то из соотношения (29) получаем

$$\mathbf{r}_{m+1}(t) \le \mathbf{L}^m \mathbf{M} \alpha_{m+1}(t),$$
$$t \in [\tau, \tau + \omega],\ m = 0, 1, 2, \dots. \tag{30}$$

Так как на основании леммы 3 верно $\alpha_{m+1}(t) \le \omega^m q_m \alpha_1(t)$, то из оценки (30) находим, что

$$\mathbf{r}_{m+1}(t) \le \omega^m q_m \mathbf{L}^m \mathbf{M} \alpha_1(t),$$
$$m \ge 0, \quad t \in [\tau, \tau + \omega]. \tag{31}$$

Из (31) заключаем, что для любых $k \ge 1$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{x}_{m+k}(t, \tau, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t, \tau, \mathbf{x}_0)| \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} (\omega \mathbf{L})^{m+i} q_{m+i} \mathbf{M} \alpha_1(t), \ t \in [\tau, \tau+\omega], \quad (32)$$

Оценим соотношение (32) с учетом леммы 3, рассмотрев отдельно случаи $m = 1$ и $m > 1$. Если $m = 1$, то

$$|\mathbf{x}_{1+k}(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} (\omega \mathbf{L})^{1+i} q_{1+i} \mathbf{M} \alpha_1(t) = \omega \mathbf{L} q_1 \mathbf{M} \alpha_1(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} (\omega \mathbf{L})^{1+i} q_{1+i} \mathbf{M} \alpha_1(t) \leq$$

$$\leq \left(\omega \mathbf{L} q_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\omega \mathbf{L}}{\pi} \right)^{i+1} \right) \mathbf{M} \alpha_1(t).$$

Т.е.

$$|\mathbf{x}_{1+k}(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \leq$$

$$\leq \left(\omega \mathbf{L} q_1 + \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{Q}^{i+1} \right) \mathbf{M} \alpha_1(t). \quad (33)$$

Согласно (7) собственные числа матрицы $\mathbf{Q}$ лежат внутри единичного круга, следовательно, имеет место формула Неймана и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{Q} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{Q} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Q}^{i} - \mathbf{I} \right) =$$

$$= \mathbf{Q} \left((\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \mathbf{I} \right).$$

Учитывая последнее равенство и совершая предельный переход в (33) при $k \to \infty$, получаем

$$|\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_1(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \leq$$

$$\leq \mathbf{Q} \frac{\pi}{3} \mathbf{M} \alpha_1(t) + \mathbf{Q} \left((\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} - \mathbf{I} \right) \mathbf{M} \alpha_1(t) =$$

$$= \alpha_1(t) \mathbf{Q} \left(\left(\frac{\pi}{3} - 1 \right) \mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \right) \mathbf{M}. \quad (34)$$

Если $m > 1$, то

$$|\mathbf{x}_{m+k}(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} (\omega \mathbf{L})^{m+i} q_{m+i} \mathbf{M} \alpha_1(t) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\omega \mathbf{L}}{\pi} \right)^{m+i} \mathbf{M} \alpha_1(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{Q}^{m+i} \mathbf{M} \alpha_1(t) \leq \mathbf{Q}^m \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{Q}^{i} \mathbf{M} \alpha_1(t).$$

Совершая предельный переход в последней оценке при $k \to \infty$, получаем

$$|\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \leq$$

$$\leq \alpha_1(t) \mathbf{Q}^m (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{M}. \quad (35)$$

Формулы (34) и (35) и доказывают оценку погрешности (26).

4. ВТОРОЙ ПОДХОД

Перейдем теперь к изложению второго подхода уточнения оценки погрешности метода последовательных периодических приближений [6, 7, 8].

Сформулируем неравенства [4,9], используемые в дальнейшем:

Для любой функции $x(t) \in L^2[\tau, \tau+\omega]$ абсолютно непрерывной, такой что $\dot{x} \in L^2[\tau, \tau+\omega]$ и $x(0) = x(\omega) = 0$, справедливы следующий неравенства:

неравенство В.А.Стеклова

$$\|x\| \leq \frac{\omega}{\pi} \|\dot{x}\|, \quad (36)$$

и

$$\max_{0 \leq t \leq \omega} |x(t)| \leq \frac{\sqrt{\omega}}{2} \|\dot{x}\|. \quad (37)$$

Постоянные в неравенствах (36), (37) точные, причем знак равенства достигается в каждой оценке лишь на единственной с точностью до множителя функции (для каждой оценки своей).

Теорема 3. *Пусть справедливы условия теоремы 1. Тогда последовательность периодических по t с периодом ω функций (13) равномерно сходится к функции $\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0)$, определенной в области (15), периодической по t, τ с периодом ω и удовлетворяющей уравнению (16). Кроме того, справедлива следующая оценка погрешности*

$$|\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \leq \frac{\omega}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^m \mathbf{M} \quad (38)$$

для всех $m \geq 1$ и $t \in \mathbf{R}^1$

Подробное изложение доказательства теоремы 3 можно найти в работе [8].

5. ТРЕТИЙ ПОДХОД

Рассмотрим интегральный оператор

$$(\mathrm{K}\alpha)(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} \mathcal{K}(t,s)\alpha(s)\,ds, \qquad (39)$$

с ядром

$$\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t-\tau}{\omega}, & \tau \le s < t, \\ \dfrac{t-\tau}{\omega}, & t < s \le \tau+\omega. \end{cases} \qquad (40)$$

Наряду с оператором K, определенным формулой (39), рассмотрим сопряженный к нему оператор K^*, определяемый как

$$\mathrm{K}^* h(t) = \int_{\tau}^{\tau+\omega} \mathcal{K}^*(t,s)h(s)\,ds = \int_{\tau}^{\tau+\omega} \mathcal{K}(s,t)h(s)\,ds, \qquad (41)$$

где ядро $\mathcal{K}(s,t)$ имеет вид

$$\mathcal{K}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s-\tau}{\omega}, & \tau \le s < t, \\ 1 - \dfrac{s-\tau}{\omega}, & t < s \le \tau+\omega. \end{cases} \qquad (42)$$

Введем в рассмотрение пространство с нормой

$$\|\mathbf{x}(\cdot)\|_1 = \int_{\tau}^{\tau+\omega} h(t)|\mathbf{x}(t)|\,dt, \qquad (43)$$

где $h(t)$ – собственный вектор оператора (41), соответствующий его максимальному собственному значению. Для краткости пространство измеримых функций, определенных на отрезке $[\tau, \tau+\omega]$ с нормой (43) будем обозначать $\mathbf{L}^1[\tau, \tau+\omega]$.

Найдем максимальное собственное значение оператора K^* и соответствующую ему собственную функцию. Для этого решим задачу

$$\lambda h(t) = \int_{\tau}^{t} \frac{s-\tau}{\omega} h(s)\,ds + \int_{t}^{\tau+\omega} \left(1 - \frac{s-\tau}{\omega}\right) h(s)\,ds. \qquad (44)$$

Продифференцировав (44) по t, получаем

$$\lambda \dot{h}(t) + \left(1 - 2\frac{t-\tau}{\omega}\right) h(t) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$h(t) = ce^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)t + \frac{1}{\omega\lambda}t^2}. \qquad (45)$$

Подставим (45) в (44)

$$\lambda c e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)t + \frac{1}{\omega\lambda}t^2} = c\int_{\tau}^{t} \frac{s-\tau}{\omega} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s + \frac{1}{\omega\lambda}s^2}\,ds +$$

$$+ c\int_{t}^{\tau+\omega} \left(1 - \frac{s-\tau}{\omega}\right) e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s + \frac{1}{\omega\lambda}s^2}\,ds.$$

Преобразовав последнее соотношение получаем

$$\int_{\tau}^{\tau+\omega} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s + \frac{1}{\omega\lambda}s^2}\,ds = 2\lambda \qquad (46)$$

Для нахождения аналитического представления λ необходимо аналитически вычислить интеграл вида

$$\int_0^a e^{x^2}\,dx,$$

что невозможно. Значение λ было найдено численно при $\omega = 2\pi$ и полностью совпало с максимальным собственным значением оператора (39), и равно 1,836. Что на 8% лучше чем $\dfrac{\omega}{\pi}$, которое при $\omega = 2\pi$ равно 2. Заметим, что максимальное собственное значение оператора (41) (и соответственно (39)) для периода $\omega = 2\pi$ $\lambda(2\pi)$ связано с максимальным собственным значением оператора (41) (соответсвенно (39)) для произвольного периода ω $\lambda(\omega)$ следующим соотношением

$$\lambda(\omega) = \frac{\omega}{2\pi}\lambda(2\pi).$$

Теперь мы можем переформулировать теорему:

Теорема 4. *Пусть матрица* $\mathbf{Q}$ *теперь определяется как* $\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{L}$, *где* λ *определяется формулой (46). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательность периодических по* t *с периодом* ω *функций (13) равномерно сходится к функции* $\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0)$, *определенной в области (15), периодической по* t,τ *с периодом* ω *и удовлетворяющий уравнению (16). При этом справедлива следующая оценка погрешности*

$$|\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)| \le$$

$$\leq 2\lambda \mathbf{Q}^m(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{M}e^{\frac{(\omega+2\tau)^2}{4\omega\lambda}}. \tag{47}$$

Доказательство. При заданных $\tau \in \mathbf{R}^1$ и $\mathbf{x}_0 \in D_f$ рассмотрим нелинейный интегральный оператор

$$(\Im \mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_\tau^t \{\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s)) - \triangle(\tau,\mathbf{x}_0)\}\, ds, \tag{48}$$

где

$$\triangle(\tau,\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\omega}\int\limits_\tau^{\tau+\omega} \mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t))\, dt,$$

определив его первоначально на непрерывных функциях $\mathbf{x}(t)$, заданных на $\tau \leq t \leq \tau+\omega$ и принимающих значения в D. Метод последовательных приближений (13) теперь может быть кратко записан в виде

$$\mathbf{x}_m(t) = (\Im \mathbf{x}_{m-1})(t), \quad m = 1,2,\dots, \tag{49}$$

где $\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0$.

Рассмотрим совокупность функций

$$W = \{\mathbf{x}(\cdot) \in C[\tau,\tau+\omega;\mathbf{R}^n] : |\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0| \leq \frac{\omega}{2}\mathbf{M}\}. \tag{50}$$

Легко видеть, что W есть непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество, лежащие в $C[\tau,\tau+\omega;\mathbf{R}^n]$. Согласно лемме 1, если $\mathbf{x}(\cdot) \in W$, то

$$|\Im \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| \leq 2(t-\tau)\left(1-\frac{t-\tau}{\omega}\right)\mathbf{M} \leq \frac{\omega}{2}\mathbf{M}.$$

Мы видим, что оператор $\Im$ отображает W в себя

$$\Im W \subseteq W.$$

Поэтому приближения (49) (а, значит, и (13)) реккурентным образом могут быть определены при всех $m = 1,2,\dots$.

Покажем, что $\Im$ является сжимающим оператором. Предварительно договоримся о следующем: будем рассматривать $\Im$ на более широком множестве всех измеримых векторных функций $\mathbf{x}(t)$ со значениями в D_f, сохранив за $\Im$ прежнее обозначение. Аналогичное замечание относится и к W

$$W = \{\mathbf{x}(\cdot) \in \mathbf{L}^1[\tau,\tau+\omega] : |\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}_0| \leq \frac{\omega}{2}\mathbf{M}\}. \tag{51}$$

Пусть $\mathbf{x}(\cdot),\mathbf{y}(\cdot) \in W$. Положим

$$\mathbf{u}(t) = (\Im \mathbf{x})(t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_\tau^t \{\mathbf{f}(s,\mathbf{x}(s)) - \triangle(\tau,\mathbf{x}_0)\}\, ds,$$

$$\mathbf{v}(t) = (\Im \mathbf{y})(t) = \mathbf{x}_0 + \int\limits_\tau^t \{\mathbf{f}(s,\mathbf{y}(s)) - \triangle(\tau,\mathbf{x}_0)\}\, ds.$$

Введем для краткости обозначения

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t)) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t)),$$

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t).$$

Тогда для $\mathbf{w}(t)$ получаем

$$\mathbf{w}(t) = \int\limits_\tau^t \{\mathbf{f}(s) - \mathbf{f}_0\}\, ds, \quad \text{где } \mathbf{f}_0 = \frac{1}{\omega}\int\limits_\tau^{\tau+\omega} \mathbf{f}(t)\, dt.$$

Оценим норму $\mathbf{w}(\cdot)$ в рассматриваемом пространстве $\mathbf{L}^1[\tau,\tau+\omega]$

$$\|\mathbf{w}(\cdot)\|_1 = \int\limits_\tau^{\tau+\omega} h(t)|\mathbf{w}(t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_\tau^{\tau+\omega} h(t)\left|\int\limits_\tau^{\tau+\omega} \mathcal{K}(t,s)\mathbf{f}(s)\, ds\right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_\tau^{\tau+\omega}\left(\int\limits_\tau^{\tau+\omega} h(t)|\mathcal{K}(t,s)|\, dt\right)|\mathbf{f}(s)|\, ds =$$

$$= \int\limits_\tau^{\tau+\omega} \lambda h(s)|\mathbf{f}(s)|\, ds \leq \lambda \mathbf{L}\int\limits_\tau^{\tau+\omega} h(s)|\mathbf{z}(s)|\, ds =$$

$$= \lambda \mathbf{L}\|\mathbf{z}(\cdot)\|_1 = \lambda \mathbf{L}\|\mathbf{x}(\cdot) - \mathbf{y}(\cdot)\|_1.$$

Т.е.

$$\|\Im \mathbf{x}(\cdot) - \Im \mathbf{y}(\cdot)\|_1 \leq \mathbf{Q}\|\mathbf{x}(\cdot) - \mathbf{y}(\cdot)\|_1. \tag{52}$$

Т.к. $spr\mathbf{Q} < 1$, то $\Im$ – оператор сжатия. Следовательно, существует единственная неподвижная точка.

Докажем сходимость последовательных приближений в пространстве $\mathbf{L}^1[\tau,\tau+\omega]$. Из (52) заключаем, что при $n > m$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x}_n(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_m(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)\|_1 \leq$$

$$\leq (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{Q}^m - \mathbf{Q}^n)\|\mathbf{x}_1(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)\|_1.$$

Оценим последнюю норму

$$\|\mathbf{x}_1(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)\|_1 \le$$

$$\le \|\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} \mathcal{K}(t,s)\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_0)\,ds\|_1 =$$

$$= \int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} h(t)\left|\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} \mathcal{K}(t,s)\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_0)\,ds\right| dt \le$$

$$\le \int\limits_{\tau}^{\tau+\omega}\left(\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} |\mathcal{K}(t,s)|h(t)\,dt\right)|\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_0)|\,ds =$$

$$= \lambda\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} h(s)|\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_0)|\,ds = \lambda\|\mathbf{f}(\cdot,\mathbf{x}_0)\|_1.$$

Т.о. получаем

$$\|\mathbf{x}_n(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_m(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)\|_1 \le$$

$$\le (\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{Q}^m-\mathbf{Q}^n)\lambda\|\mathbf{f}(\cdot,\mathbf{x}_0)\|_1. \qquad (53)$$

Последовательные периодические приближения $\{\mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)\}$ в пространстве $\mathbf{L}^1[\tau,\tau+\omega]$ образуют фундаментальную последовательность. В силу того, что $\mathbf{L}^1[\tau,\tau+\omega]$ – полное пространство, последовательность функций $\{\mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)\}$ сходится к функции $\mathbf{x}^0(t,\tau,\mathbf{x}_0)$. Переходя в (53) к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\|\mathbf{x}^0(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_m(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)\|_1 \le$$

$$\le \lambda\mathbf{Q}^m(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}\|\mathbf{f}(\cdot,\mathbf{x}_0)\|_1.$$

Докажем теперь, что последовательность периодических приближений $\{\mathbf{x}_m(t,\tau,\mathbf{x}_0)\}$ сходится равномерно.

$$|\mathbf{x}_n(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_m(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)| \le$$

$$\le \mathbf{L}\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} |\mathcal{K}(t,s)||\mathbf{x}_{n-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_{m-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)|\,ds =$$

$$= \mathbf{L}\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} \frac{|\mathcal{K}(t,s)|}{h(s)}h(s)|\mathbf{x}_{n-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_{m-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)|\,ds, \qquad (54)$$

последнее преобразование возможно, т.к. $h(t)>0$ на всем отрезке $[\tau,\tau+\omega]$.

Рассмотрим частное $\dfrac{|\mathcal{K}(t,s)|}{h(s)}$, в силу (40) и (45) оно имеет вид

$$\frac{|\mathcal{K}(t,s)|}{h(s)} = \begin{cases} \dfrac{1-\frac{t-\tau}{\omega}}{ce^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s+\frac{1}{\omega\lambda}s^2}}, & \tau\le s<t,\\[2ex] \dfrac{t-\tau}{\omega ce^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s+\frac{1}{\omega\lambda}s^2}}, & t<s\le\tau+\omega. \end{cases}$$

Оценим это частное

$$\frac{|\mathcal{K}(t,s)|}{h(s)} \le \frac{\max|\mathcal{K}(t,s)|}{\min h(s)};$$

$$\min h(s) = \min ce^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s+\frac{1}{\omega\lambda}s^2} = ce^{-\frac{(\omega+2\tau)^2}{4\omega\lambda}};$$

$$\max|\mathcal{K}(t,s)| = 1.$$

Продолжим оценку (54)

$$\mathbf{L}\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} \frac{|\mathcal{K}(t,s)|}{h(s)}h(s)|\mathbf{x}_{n-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_{m-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)|\,ds \le$$

$$\le \frac{\mathbf{L}}{c}e^{\frac{(\omega+2\tau)^2}{4\omega\lambda}}\|\mathbf{x}_{n-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_{m-1}(s,\tau,\mathbf{x}_0)\|_1. \qquad (55)$$

Учитывая (46), замечаем что

$$\|\mathbf{f}(\cdot,\mathbf{x}_0)\|_1 = \int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} h(s)|\mathbf{f}(s,\mathbf{x}_0)|\,ds \le$$

$$\le \mathbf{M}c\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega} e^{-\left(\frac{1}{\lambda}+2\frac{\tau}{\omega\lambda}\right)s+\frac{1}{\omega\lambda}s^2}\,ds = 2c\lambda\mathbf{M}. \qquad (56)$$

Суммируя оценки (53)-(56), окончательно получаем

$$|\mathbf{x}_n(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_m(\cdot,\tau,\mathbf{x}_0)| \le$$

$$\le 2\lambda(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{Q}^m-\mathbf{Q}^n)\mathbf{M}e^{\frac{(\omega+2\tau)^2}{4\omega\lambda}}.$$

Переходя в последней оценке к пределу при $n\to\infty$ мы получаем оценку погрешности (47).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I// Укр. матем. журнал, 1965, 17, № 4.

2. Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II// Укр. матем. журнал, 1966, 18, № 2.

3. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев: Вища школа, 1976, 180 с.

4. Перов А. И. Вариационные методы в теории нелинейных колебаний. Воронеж: изд-во ВГУ, 1981, 196 с.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970, т. III, 656 с.

6. Перов А. И., Дикарева Л. Ю. Применение неравенств для периодических функций в некоторых задачах теории нелинейных колебаний //"Нелинейные колебания механических систем". Тезисы V межд. конференции. Н. Новгород, 1999, с. 178—179.

7. Дикарева Л. Ю. Применение неравенств для дифференцируемых функций в методе последовательных периодических приближений А. М. Самойленко //"Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках". Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2000, с. 85.

8. Дикарева Л. Ю. О методе последовательных периодических приближений А. М. Самойленко// Труды молодых ученых. Сб. научных трудов. Воронеж, ВГУ, 1999, вып. 1, с. 28—32.

9. Перов А. И., Тананика А. А. Об одном обобщении неравенства Виртингера //Дифференциальные уравнения, 1986, 22, № 6, с. 1074—1076.