ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2001, № 1

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА У ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

© 2001 г. О. А. Лобанова, Б. Н. Садовский

Воронежский государственный университет

Рассматривается двумерная линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в ограниченном выпуклом замкнутом множестве. Предполагается, что при выходе фазовой траектории на границу данного множества её скорость проектируется на касательный конус. Получены достаточные условия существования и единственности орбитально устойчивого предельного цикла.

1. Постановка задачи. Исследуется система дифференциальных уравнений в ограниченном выпуклом замкнутом множестве $Q \subset \mathbf{R^2}$:

$$\dot{x} = \tau_x Ax, \tag{1}$$

где $\tau_x Ax$ – проекция вектора Ax на касательный конус к множеству Q в точке x ([1], с.109); A – (2×2)-матрица.

Изучается вопрос о существовании и устойчивости предельного цикла ([2], с. 178-180). Результат формулируется и доказывается в п. 10. Предварительно устанавливаются восемь лемм. На матрицу A и множество Q накладываются следующие условия.

(а) Собственные значения матрицы A невещественны и их вещественная часть положительна.

(б) $0 \in \operatorname{int} Q$.

(в) $Ax \notin N_x$ при $x \in \partial Q$ (N_x – нормальный конус к множеству Q в точке x, см. [1], с. 109).

Для любого $x = (x_1, x_2)$ положим $Cx = (-x_2, x_1)$. Заметим, что $(Cx, Ax) \neq 0$ при $x \neq 0$ в силу условия (а). Для определенности будем считать, что

$$(Cx, Ax) > 0 \text{ при } x \neq 0. \tag{2}$$

2. Лемма о выходе на границу. *В условиях* (а) – (в) *любая ненулевая траектория системы* (1), *определенная при* $t \in [0, +\infty)$, *содержит хотя бы одну точку границы множества* Q.

Доказательство. По поводу существования и единственности см., например, [3]. Доказательство леммы проведем от противного. Пусть некоторая ненулевая траектория системы (1) целиком лежит внутри Q. Тогда она является также траекторией системы

$$\dot{x} = Ax. \tag{3}$$

Это приводит к противоречию, поскольку при выполнении условия (а) ненулевая траектория последней системы не может быть ограниченной. Лемма доказана.

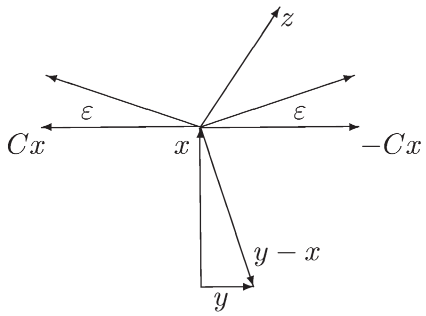
3. Лемма об оценке снизу нормы вектора $\tau_x Ax$. *В условиях* (а) – (в) *если* $x \in \partial Q$, *то справедлива оценка* $||\tau_x Ax|| \geq \alpha_0 > 0$.

Доказательство. Предположим противное, тогда существует последовательность (x_n), такая, что $||\tau_{x_n} Ax_n|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \in \partial Q$, тогда $Ax_n \underset{n\to\infty}{\to} Ax_0$.

Заметим, что разность $Ax - \tau_x Ax$ есть проекция Ax на нормальный конус N_x к множеству Q в точке x. Тогда $Ax_n - \tau_{x_n} Ax_n \in N_{x_n}$. Так как N_x – максимальный монотонный оператор, то по свойству замкнутости графика максимального монотонного оператора ([4], с. 360, 369-371) имеем: $Ax_0 \in N_{x_0}$. Получили противоречие с условием (в). Следовательно, $||\tau_x Ax|| \geq \alpha_0 > 0$. Лемма доказана.

4. Лемма о расположении нормального конуса. Замечание. В дальнейшем, говоря *вектор 2 находится между векторами 1 и 3*, будем иметь в виду следующее положение: если двигаться против часовой стрелки от первого из них – 1 к третьему – 3, то необходимо при этом пройти через второй – 2.

Лемма утверждает, что угол между любым вектором $z \in N_x$ и вектором x не больше $\pi/2 - \varepsilon$.



Доказательство. Рассмотрим точку x границы множества Q и нормальный конус N_x в этой точке. Он, очевидно, будет находиться между векторами $(-Cx)$ и Cx, так как угол между любым его вектором и $(-x)$ должен быть не меньше прямого. Найдем вектор $y \neq 0$, ортогональный вектору x, такой, что $y \in Q$ и $-y \in Q$. Пусть ε - угол между векторами $y - x$ и $(-x)$. Тогда любой вектор $z \in N_x$ должен образовывать с векторами $y - x$ и $-y - x$ угол не меньше прямого, следовательно, угол между векторами z и x не больше $\pi/2 - \varepsilon$. Лемма доказана.

5. Лемма о полунепрерывности сверху оператора N_x. *Оператор N_x является полунепрерывным сверху в любой точке $x_0 \in \partial Q$ в следующем смысле: для любого $\alpha > 0$ существует окрестность V точки x_0, такая, что угол между любым вектором из $N_{x'}$ $(x' \in V)$ и ближайшим к нему вектором из N_{x_0} меньше α.*

Доказательство. Предположим противное: для некоторого $\alpha > 0$ не найдется такой окрестности точки x_0. Тогда для любого натурального n существуют x'_n и $y'_n \in N_{x'_n}$, $||y'_n|| = 1$, такие, что $x'_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ и угол между y'_n и ближайшим к нему вектором из N_{x_0} не меньше α. При этом без ограничения общности можно считать, что (y'_n) сходится к некоторому y_0, следовательно, $y_0 \notin N_{x_0}$. Это противоречит замкнутости графика максимального монотонного оператора N_x. Лемма доказана.

6. Лемма о взаимном расположении N_x, Ax и $(-x)$. *В условиях* (а) – (в) *и при выполнении* (2) *если x лежит на границе Q, то вектор Ax расположен между N_x и $(-x)$.*

Доказательство. Заметим, что если x – ближайшая к началу координат точка ∂Q, то утверждение выполнено. Действительно, нетрудно видеть, что в этом случае N_x совпадает с лучом, натянутым на вектор x. Поэтому доказываемое утверждение вытекает из (2).

Множество всех точек границы Q, для которых вектор Ax лежит между N_x и $(-x)$, обозначим через M_1 (ввиду сделанного выше замечания $M_1 \neq \emptyset$), и положим $M_2 = \partial Q \backslash M_1$. Покажем, что эти множества открыты в индуцированной из $\mathbf{R}^2$ топологии. Пусть $x \in M_2$. Рассмотрим попарно не пересекающиеся множества: U_1 – окрестность точки $(-x)$, U_2 – окрестность Ax, U_3 – угловую α-окрестность нормального конуса N_x (то есть $y \in U_3$ в том и только в том случае, когда угол между y и ближайшим к нему вектором из N_x меньше α или $y = 0$). Очевидно, между любыми элементами этих множеств сохраняется расположение, имеющее место для $(-x)$, Ax и N_x. В силу непрерывности функций $-x$ и Ax и полунепрерывности сверху оператора N_x найдется такая окрестность U точки x, что для всех точек $x' \in U$ выполнено: $-x' \in U_1, Ax' \in U_2$ и $N_{x'} \subset U_3$. Получаем, что множество M_2 открыто. Аналогично показывается открытость множества M_1.

Множество ∂Q связно, т.е. его нельзя покрыть двумя непустыми непересекающимися открытыми множествами. Следовательно, M_2 пусто. Лемма доказана.

7. Лемма о взаимном расположении N_x, Ax и $\tau_x Ax$. *В условиях* (а) – (в) *и при выполнении* (2) *если вектор Ax не совпадает с $\tau_x Ax$, то он расположен между N_x и $\tau_x Ax$.*

Доказательство. Если предположить противное, то Ax располагается между $\tau_x Ax$ и N_x. Это означает, что Ax расположен также между $(-x)$ и N_x, поскольку угол поворота от $(-x)$ до N_x больше прямого, а от $\tau_x Ax$ до N_x против часовой стрелки равен прямому. Получаем противоречие с предыдущей леммой. Лемма доказана.

8. Лемма о пересечении с радиусом-вектором. *В условиях* (а) – (в) *любая ненулевая траектория системы* (1) *пересекает радиус-вектор любой точки, лежащей на границе множества Q.*

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ – решение системы (1) и $\tilde{x} \in \partial Q$. Требуется доказать, что $\exists (t_1)[\varphi(t_1) = \alpha\tilde{x}]$, где α - некоторое положительное число.

Сопоставим каждому вектору $x = (x_1, x_2) \neq 0$ множество $\Phi(x)$ всех углов поворота оси Ox до x (при повороте по часовой стрелке угол считается отрицательным). Очевидно, любое $\psi \in \Phi(x)$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\sin\psi = \frac{x_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}, \cos\psi = \frac{x_1}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}. \qquad (4)$$

Зафиксируем значения $\psi = \psi_0$ и $x = x_0$, удовлетворяющие (4). Тогда в некоторой их окрестности эти уравнения по теореме о неявных функциях однозначно разрешимы относительно ψ: $\psi = \psi(x)$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{grad}\psi(x) = Cx/||x||^2$. Поскольку найденный градиент не зависит от ψ_0 и x_0, будем обозначать его $\mathrm{grad}\Phi(x)$.

Пусть $\varphi(t)$ - ненулевое решение системы (1). Тогда однозначно определена производная $d\Phi[\varphi(t)]/dt = (\mathrm{grad}\Phi[\varphi(t)], \dot\varphi(t))$. Поэтому однозначно определено и приращение угла поворота решения системы (1) за время от t_0 до t:

$$\Delta\Phi(\varphi, t_0, t) = \int_{t_0}^{t} (\mathrm{grad}\Phi[\varphi(s)], \dot\varphi(s))ds.$$

Покажем, что оно стремится к бесконечности при $t \to \infty$ (и, следовательно, найдется момент времени, в который траектория пересечет радиус-вектор точки $\tilde{x}$). Для этого оценим скалярное произведение $(\mathrm{grad}\Phi[\varphi(t)], \dot\varphi(t)) = (Cx, \tau_x Ax)/||x||^2$ $(x = \varphi(t))$ снизу.

Если $Ax = \tau_x Ax$, то положим $\beta = \min\limits_{||x||=1}(Ax, Cx)$; ввиду (2) $\beta > 0$. И, очевидно,

$$\frac{(Cx, \tau_x Ax)}{||x||^2} = \frac{(Cx, Ax)}{||x||^2} = \left(C\frac{x}{||x||}, A\frac{x}{||x||}\right) \geq \beta,$$

т.е. есть искомая оценка.

Если $Ax \neq \tau_x Ax$, то, как показано выше, вектор Ax расположен между N_x и $\tau_x Ax$. С учетом возможного расположения N_x (см. лемму 4) это означает, что угол между $\tau_x Ax$ и Cx не больше $\pi/2 - \varepsilon$, поэтому

$$\frac{(Cx, \tau_x Ax)}{||x||^2} \geq \frac{\cos(\pi/2 - \varepsilon)||\tau_x Ax||}{||x||} \geq$$

$$\geq \frac{\alpha_0 \cos(\pi/2 - \varepsilon)}{\alpha_1},$$

где α_1 - оценка нормы векторов $x \in \partial Q$. Полученные оценки доказывают лемму о пересечении с радиусом-вектором.

9. Лемма о слиянии любых двух траекторий. *В условиях* (а) – (в) *любые две траектории системы* (1) *совпадают при достаточно больших* t.

Доказательство. Предположим противное, пусть траектории l_1 и l_2 не имеют общих точек. Тогда одна из них пересекает любой радиус-вектор ближе к началу координат, чем другая. Следовательно, она лежит строго внутри Q и является траекторией системы (3), что противоречит условию (а). Лемма доказана.

10. Теорема о существовании и единственности орбитально устойчивого предельного цикла. *В условиях* (а) – (в) п.1 *система* (1) *имеет единственный орбитально устойчивый предельный цикл.*

Доказательство. Пусть x – ненулевая точка множества Q, l – выпущенная из неё траектория системы (1), x^1 – следующая точка выхода этой траектории на луч $x \cdot (0, +\infty)$. Если $x^1 = x$, то это замкнутая траектория, т.е. цикл. Если $\|x^1\| < \|x\|$, то на следующем витке траектория вольётся в себя и с этого момента превратится в цикл. Действительно, в противном случае весь этот виток будет лежать строго внутри Q и, следовательно, будет траекторией линейной системы $\dot{x} = Ax$, причём следующая точка x^2 её выхода на рассматриваемый луч будет ещё ближе к нулю. Но такое поведение противоречит условию (а). Наконец, если $\|x^1\| > \|x\|$, то пусть x^2 – первая точка выхода этой траектории на ∂Q; эта точка уже лежит на цикле, так как следующее пересечение траектории с соответствующим радиусом-вектором может произойти, очевидно, только в той же точке.

Итак, предельный цикл существует и любая траектория вливается в предельный цикл. Из леммы о слиянии любых двух траекторий вытекает единственность предельного цикла и его орбитальная устойчивость.

Теорема доказана.

Литература

1. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.

2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

3. Лобанова О. А. О движении точки в ограниченном фазовом пространстве. //Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ. — Воронеж, 1999, с. 88—92

4. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.