

УДК 537.86:519.2

СРАВНЕНИЕ АНАЛОГОВОГО И ДИСКРЕТНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ ПО ЭНЕРГИИ

© 2001 г. В. И. Костылев*

Воронежский государственный университет

Предложена структура дискретного энергетического приемника. Для класса детерминированных узкополосных обнаруживаемых сигналов определено распределение решающей статистики дискретного энергетического обнаружителя. Проведено сравнение эффективности дискретного и аналогового энергетических обнаружителей.

ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение радиосигналов в шуме является одной из основных задач статистической радиофизики. Практически алгоритмы обнаружения могут быть реализованы с использованием как аналоговой, так и дискретной элементной базы. Дискретная техника обработки сигналов более развита в настоящее время; однако дискретизация сигнала влечет потери в эффективности обнаружения [1,2]. Последнее утверждение, безусловно верное для оптимальных алгоритмов, иногда необоснованно переносится на неоптимальные алгоритмы.

Цель настоящей работы — сравнить по эффективности аналоговую и дискретную схемы реализации широко известного [3] энергетического алгоритма обнаружения детерминированных сигналов в белом шуме.

ОБНАРУЖЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ УЗКОПОЛОСНЫХ РАДИОСИГНАЛОВ В БЕЛОМ ШУМЕ

Широчайшее применение в теории радиофизики находит модель узкополосного радиосигнала

$$s(t) = \operatorname{Re}\{S(t)\exp(j2\pi f_0 t)\}, f_0 \gg \Delta f, \quad (1)$$

где $S(t)$ — комплексная огибающая; f_0 — несущая частота; Δf — ширина спектра сигнала.

Поскольку в радиоаппаратуре всегда присутствуют, как минимум, собственные шумы теплового происхождения, входной сигнал обнаружителя

$$x_{\text{вх}}(t) = is(t) + n_{\text{вх}}(t), i = 0, 1 \quad (2)$$

представляет собой по гипотезе H_1 смесь обнаруживаемого узкополосного сигнала (1) и белого шума $n_{\text{вх}}(t)$, а по гипотезе H_0 — только белый шум $n_{\text{вх}}(t)$. Входящий в (2) априори неизвестный бинарный параметр i способен принимать значения 0 или 1, совпадающие с индексом гипотезы.

Задача обнаружения сигнала $s(t)$ на фоне шума $n_{\text{вх}}(t)$ состоит в принятии (в результате обработки колебания $x_{\text{вх}}(t)$) обоснованного решения в пользу одной из двух указанных гипотез. Задачу обнаружения можно также трактовать¹ как оценку (в результате обработки принятого колебания) значения неизвестного бинарного параметра i .

Обработка сигнала $x_{\text{вх}}(t)$ выполняется приемником. Если обнаруживаемый сигнал (1) детерминирован, то известна [2, 4, 5] оптимальная структура приемника: передаточная функция должна быть комплексно сопряжена со спектром обнаруживаемого сигнала.

Важнейшими числовыми характеристиками эффективности оптимального обнаружителя, как и любого другого обнаружителя, являются вероятность правильного обнаружения P_1 и вероятность ложной тревоги P_0 [1—

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00356).

¹ Нетрудно заметить, что индекс гипотезы, в пользу которой принято решение, есть измеренное значение \hat{i} параметра i , и наоборот.

5]. Зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги называется характеристикой обнаружения. В случае использования оптимального аналогового приемника характеристика обнаружения определяется известным [2, 4] выражением

$$P_1 = 1 - \Phi[\text{arc}\Phi(1 - P_0) - d_T], \quad (3)$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция ошибок [4]; $\text{arc}\Phi(\cdot)$ — функция, обратная к функции ошибок;

$$d_T^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{1}{N_0} \int_0^T |S(t)|^2 dt - \quad (4)$$

энергетическое отношение сигнал—шум [2, 4, 5]; T — длительность обработки сигнала $x_{\text{вх}}(t)$ оптимальным приемником; N_0 — односторонняя спектральная плотность мощности белого шума $n_{\text{вх}}(t)$.

Оптимальный приемник может быть практически реализован [5] по корреляционной схеме или в виде согласованного фильтра, однако для этого необходима полная априорная информация об обнаруживаемом сигнале (1).

В часто цитируемой работе [3] проанализирована возможность обнаружения сигнала $s(t)$ с **неизвестной** детерминированной комплексной огибающей $S(t)$, т. е. в случае, когда отсутствует возможность практически реализовать оптимальный обнаружитель. Считалась известной только полоса частот $[f_0 - \Delta f/2, f_0 + \Delta f/2]$ обнаруживаемого сигнала и для такого случая была предложена структура обнаружителя, приведенная на рис. 1.

Поскольку предполагается, что полосовой фильтр имеет идеальную амплитудно-частотную характеристику

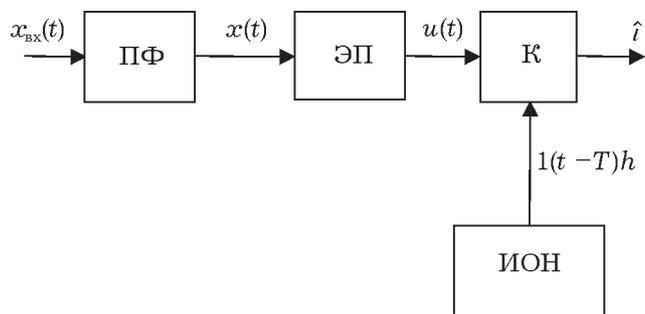


Рис. 1. Структурная схема энергетического обнаружителя. ПФ — полосовой фильтр; ЭП — энергетический приемник; К — компаратор; ИОН — источник опорного напряжения

$$K(f) = \begin{cases} K_0, & |f + f_0| \leq \frac{\Delta f}{2} \text{ или } |f - f_0| \leq \frac{\Delta f}{2}, \\ 0, & |f + f_0| > \frac{\Delta f}{2} \text{ и } |f - f_0| > \frac{\Delta f}{2}, \end{cases} \quad (5)$$

сигнал $x(t)$ на выходе фильтра может быть представлен в виде

$$x(t) = iK_0 s(t) + n(t) = \text{Re}\{X(t) \exp(j2\pi f_0 t)\}. \quad (6)$$

Здесь K_0 — коэффициент передачи фильтра; $n(t)$ — узкополосный гауссовский шум на выходе фильтра;

$$X(t) = iK_0 S(t) + N(t) - \quad (7)$$

комплексная огибающая случайного сигнала $x(t)$; $N(t)$ — комплексная огибающая шума $n(t)$. Нетрудно убедиться, что $\langle N(t) \rangle = 0$ и

$$\langle N(t)N^*(t - \tau) \rangle = K_0^2 N_0 \frac{\sin(\pi \Delta f \tau)}{\pi \tau}, \quad (8)$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение по ансамблю реализаций.

Сигнал (6) является входным сигналом энергетического приемника. Назначение энергетического приемника следует из его названия — сформировать на своем выходе напряжение, равное или пропорциональное энергии

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt \quad (9)$$

обрабатываемой реализации сигнала (6). Понятно, что соответствующий (9) идеальный энергетический приемник практически не осуществим, поскольку сигнал $x(t)$ как сигнал с ограниченной полосой частот спектра имеет бесконечную длительность, а реализовать бесконечно продолжительную обработку невозможно. Поэтому описанный в [3] энергетический приемник формирует сигнал

$$u(t) = 1(t - T) \mathcal{E}, \quad (10)$$

где $1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ — единичная ступенчатая

функция; T — длительность интервала времени обработки сигнала $x(t)$ в энергетическом приемнике;

$$\mathcal{E} = \text{const } \mathcal{E}_T - \quad (11)$$

статистика обнаружения (решающая статистика);

$$\mathcal{E}_T = \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T |X(t)|^2 dt - \quad (12)$$

Таблица

аппроксимация энергии \mathcal{E} сигнала $x(t)$; $const$ — нормировочная константа².

Сигнал (10) подается на один из входов компаратора, на другом входе которого при $t > T$ присутствует постоянное опорное напряжение h , формируемое специальным источником. При $\Xi \geq h$ выходной сигнал компаратора есть логическая единица, а в противном случае $\Xi < h$ — логический ноль. Выходной сигнал компаратора принимается за оценку \hat{t} значения неизвестного бинарного параметра t , фигурирующего в (2). По этой оценке принимается решение о наличии (если $\hat{t} = 1$) или отсутствии (если $\hat{t} = 0$) обнаруживаемого сигнала.

В [3] утверждается, что

$$\Xi|H_0 = \chi_{2(B+1)}^2, \quad \Xi|H_1 = \chi_{2(B+1), d_T^2}^2, \quad (13)$$

где χ_v^2 — случайная величина, имеющая хи-квадрат распределение с v степенями свободы;

$$B = T\Delta f \quad (14)$$

база обработки сигнала³; $\chi_{v,\lambda}^2$ — случайная величина, имеющая нецентральное хи-квадрат распределение с v степенями свободы и параметром нецентральности λ . Поэтому вероятность ложной тревоги $P_0 = \Pr\{\Xi \geq h|H_0\} = 1 - F_{\chi_{2(B+1)}^2}(h)$ энергетического обнаружителя можно представить в виде

$$P_0 = \Gamma(B+1, h/2) / \Gamma(B+1) = 1 - P(B+1, h/2), \quad (15)$$

где $F_{\chi_{2|\nu}^2}(\cdot)$ — функция распределения хи-квадрат с ν степенями свободы; $\Gamma(a, b) = \Gamma(a) - \gamma(a, b)$ — дополнительная неполная гамма-функция [6]; $\Gamma(a)$ — гамма-функция [6]; $\gamma(a, b)$ — неполная гамма-функция [6]; $P(a, b) = \gamma(a, b) / \Gamma(a)$ — нормированная неполная гамма-функция [6]. Формула (15) с точностью до обозначений совпадает с формулой, приведенной в [7]. Для некоторых значений базы обработки B в таблице приведены рассчитанные по формуле

$$h = \text{arc} F_{\chi_{2(B+1)}^2}(1 - P_0) \quad (16)$$

значения опорного порогового уровня h , необходимые для обеспечения требуемой веро-

² Для удобства теоретического анализа в [3] предполагалось выполнение условия нормировки: $const K_0^2 N_0 = 2$.

³ Параметр T всегда можно выбрать таким, чтобы произведение $T\Delta f$ было целым.

	$B = 3 (N = 4)$	$B = 7 (N = 8)$	$B = 15 (N = 16)$
$P_0 = 10^{-1}$	13,3615661365	23,5418289231	42,5847450830
$P_0 = 10^{-2}$	20,0902350297	31,9999269088	53,4857718362
$P_0 = 10^{-3}$	26,1244815584	39,2523547908	62,4872190571
$P_0 = 10^{-4}$	31,8276280013	45,9248990511	70,5712475753
$P_0 = 10^{-5}$	37,3315936444	52,2449768871	78,0942003595
$P_0 = 10^{-6}$	42,7009139265	58,3243900144	85,2315507171
$P_0 = 10^{-7}$	47,9724649414	64,2274125158	92,0844682035
$P_0 = 10^{-8}$	53,1694782045	69,9947959040	98,7173177204
$P_0 = 10^{-9}$	58,3076131275	75,6541845086	105,1739233472
$P_0 = 10^{-10}$	63,3979644111	81,2252860885	111,4856460128
$P_0 = 10^{-11}$	68,4486999626	86,7226962805	117,6758002469
$P_0 = 10^{-12}$	73,4660190662	92,1575563327	123,7622499127

ятности ложной тревоги энергетического обнаружителя. Здесь $\text{arc} F_{\chi_{2|\nu}^2}(\cdot)$ — функция, обратная к $F_{\chi_{2|\nu}^2}(\cdot)$.

Вероятность $P_1 = \Pr\{\Xi \geq h|H_1\} = 1 - F_{\chi_{2(B+1), d_T^2}^2}(h)$ правильного обнаружения энергетического обнаружителя удалось представить в виде ряда

$$P_1 = \exp\left(-\frac{d_T^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_T^{2m} \Gamma(m+B+1, h/2)}{2^m m! \Gamma(m+B+1)}, \quad (17)$$

где $F_{\chi_{2|\nu, \lambda}^2}(\cdot)$ — функция распределения нецентрального хи-квадрат с ν степенями свободы и параметром нецентральности λ .

ДИСКРЕТНЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИЕМНИК

Ограниченность полосы частот спектра сигнала $x(t)$ позволяет применить к нему теорему Котельникова, а значит преобразовать (9) в

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\Delta f} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |X(m/\Delta f)|^2. \quad (18)$$

Из (18) можно получить дискретную аппроксимацию энергии \mathcal{E} , отличную от непрерывной аппроксимации (12):

$$\mathcal{E}_N = \frac{1}{2\Delta f} \sum_{m=0}^B |X(m/\Delta f)|^2. \quad (19)$$

где

$$N = B + 1 - \quad (20)$$

количество слагаемых в сумме в правой части (19). Подчеркнем, что для рассматриваемого

случая узкополосных сигналов дискретная аппроксимация энергии \mathcal{E} в форме (19) имеет самостоятельное значение, поскольку получена из точной формулы (18), а не как аппроксимация континуальной аппроксимации (12). Отсюда следует, что наряду с аналоговым энергетическим приемником Урковица имеет право на существование дискретный энергетический приемник, формирующий статистику обнаружения Ξ , пропорциональную не \mathcal{E}_T , как в (11), а \mathcal{E}_N :

$$\Xi = \text{const } \mathcal{E}_N \quad (21)$$

Структурная схема дискретного энергетического приемника приведена на рис. 2.

Квадратичный детектор огибающей формирует из узкополосного сигнала (6) низкочастотный сигнал

$$z(t) = \aleph |X(t)|^2 = \aleph |iK_0 S(t) + N(t)|^2, \quad (22)$$

где \aleph — параметр детектора. Сигнал (22) преобразуется устройством выборки и хранения [8] в ступенчатый сигнал

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ z(0), & t \in [0, \Delta t), \\ z(\Delta t), & t \in [\Delta t, 2\Delta t), \\ \dots & \dots \\ z(i\Delta t), & t \in [i\Delta t, (i+1)\Delta t), \\ \dots & \dots \\ z(T), & t \geq T, \end{cases} \quad (23)$$

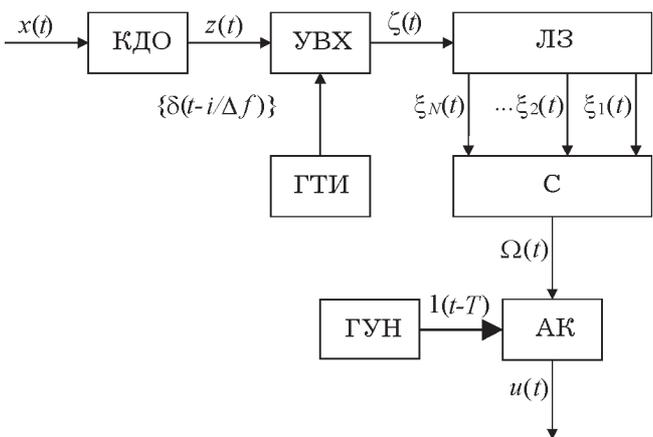


Рис. 2. Структурная схема дискретного энергетического приемника. КДО — квадратичный детектор огибающей; УВХ — устройство выборки и хранения; ГТИ — генератор тактовых импульсов; ЛЗ — многоотводная линия задержки; С — сумматор; АК — аналоговый ключ; ГУН — генератор управляющего напряжения

где $\Delta t = 1/\Delta f$ — интервал дискретизации (длительность хранения отсчета сигнала в УВХ). Линия задержки имеет N отводов, с которых снимаются сигналы

$$\xi_i(t) = \begin{cases} \lambda_i(t), & t < T, \\ z((i-1)\Delta t), & t \geq T, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (24)$$

где $\{\lambda_i(t)\}$ — некоторые не представляющие интереса переходные колебания. На выходе сумматора формируется сигнал

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \lambda_i(t), & t < T, \\ 2\aleph \Delta f \mathcal{E}_N, & t \geq T. \end{cases} \quad (25)$$

Сигнал (25) подается на основной вход аналогового ключа [8], на другой вход которого поступает управляющее напряжение $U_{\text{упр}}(t) = 1(t - T)$. При этом ключ закрыт до момента времени $t = T$ и открыт в дальнейшем. Напряжение на выходе ключа (оно же выходное напряжение дискретного энергетического приемника) имеет вид (21).

В целях достижения соответствия с результатами [3] будем полагать в дальнейшем, что параметр квадратичного детектора и коэффициент передачи полосового фильтра подобраны таким образом, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\aleph K_0^2 N_0 \Delta f = 2. \quad (26)$$

Определим вероятности превышения статистикой (21) порогового уровня h . Как нетрудно убедиться, статистика обнаружения Ξ может быть представлена в виде

$$\Xi = \sum_{i=1}^N |Y_i|^2, \quad (27)$$

где $\{Y_i\}$ — случайные гауссовские комплексные величины. В отсутствие ($i = 0$) обнаруживаемого сигнала (1) они не зависимы, имеют одинаковые нулевые средние значения и одинаковые дисперсии

$$\langle |Y_i|^2 | H_0 \rangle = 2, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (28)$$

Отсюда следует, что

$$\Xi | H_0 = \chi_{2N}^2. \quad (29)$$

Таким образом, в отсутствие полезного сигнала решающие статистики дискретного и аналогового энергетических обнаружителей распределены одинаково (см. (13) и (20)).

В присутствии ($l = 1$) обнаруживаемого сигнала (1) гауссовские случайные величины $\{Y_i\}$, введенные в (27), также являются независимыми. Кроме того, как несложно убедиться,

$$\langle Y_i | H_1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{N_0 \Delta f}} S((i-1)\Delta t) \quad (30)$$

и

$$\langle |Y_i|^2 | H_1 \rangle - \langle Y_i | H_1 \rangle^2 = 2 \quad (31)$$

для всех $i=1, 2, \dots, N$. Отсюда следует, что

$$\Xi | H_1 = \chi_{2N, d_N^2}^2, \quad (32)$$

где

$$d_N^2 = \frac{1}{N_0 \Delta f} \sum_{i=0}^N |i(\Delta t)|^2 - \quad (33)$$

дискретное энергетическое отношение сигнал-шум. Сравнивая (32) и (13), нетрудно убедиться, что и в случае реализации гипотезы H_1 решающие статистики дискретного и аналогового энергетических обнаружителей распределены одинаково, однако параметры нецентральности d_T^2 и d_N^2 этих распределений различны.

СРАВНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО И АНАЛОГОВОГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБНАРУЖИТЕЛЕЙ ПО ОТНОШЕНИЮ СИГНАЛ-ШУМ

В [1] проводилось сравнение дискретного и аналогового оптимального обнаружения детерминированных сигналов. Особенность энергетического обнаружения состоит в том, что как дискретный, так и аналоговый алгоритм, не являются оптимальными. Поэтому эффективность дискретного энергетического обнаружения не только может быть близка к эффективности аналогового энергетического обнаружения, но и превосходить последнюю. Из сравнения (13) и (32) очевидно необходимое и достаточное условие превосходства по эффективности дискретного энергетического обнаружителя над аналоговым: $d_N^2 > d_T^2$.

Введем в рассмотрение параметр

$$\tau \mathcal{U}_N = \frac{d_T^2 - d_N^2}{d_T d_N} \cdot 100\%, \quad (34)$$

равный разности энергетических отношений сигнал—шум при аналоговой и дискретной обработках, нормированной на среднегеометрическое значение этих отношений и выражен-

ной в процентах. Очевидно что, при обнаружении сигналов с нулевым $\tau \mathcal{U}_N$ аналоговый и дискретный энергетические обнаружители одинаково эффективны, а при обнаружении сигналов с положительным $\tau \mathcal{U}_N$ эффективность аналогового энергетического обнаружения выше, чем эффективность дискретного энергетического обнаружения.

В качестве примера рассмотрим энергетическое обнаружение протяженного по дальности источника вторичного излучения (отражающего объекта). Известно [9], что комплексная огибающая обнаруживаемого сигнала в этом случае имеет вид

$$S(t) = \int_{R_{\min}}^{R_{\min} + \Delta R} E(R) S_{\text{знд}}(t - 2R/c) dR, \quad (35)$$

где R_{\min} — дальность самой близкой к приемной антенне точки источника вторичного излучения; ΔR — протяженность объекта по дальности; $E(R)$ — функция рассеяния по дальности [9]; $S_{\text{знд}}(t)$ — комплексная огибающая зондирующего сигнала; c — скорость света.

Предположим, что амплитудно-частотный спектр зондирующего сигнала равномерен в полосе частот $[f_0 - \Delta f/2, f_0 + \Delta f/2]$ и строго равен нулю за пределами этой полосы. Тогда

$$S_{\text{знд}}(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_{\text{знд}}\Delta f} \operatorname{sinc} \left[\left(t + \frac{2R_{\min}}{c} - t_0 \right) \Delta f \right], \quad (36)$$

где $\mathcal{E}_{\text{знд}}$ — энергия зондирующего сигнала; t_0 — параметр, характеризующий положение максимума огибающей зондирующего сигнала на временной оси; $\operatorname{sinc}(x) = \sin(px)/(px)$. В качестве модели функции рассеяния по дальности $E(R)$ выберем детерминированную импульсную функцию со скошенной вершиной

$$E(R) = \begin{cases} 0, & R < R_{\min} \\ E_{\max} \left(1 - G \frac{R - R_{\min}}{\delta \mathcal{R}} \right), & R_{\min} \leq R \leq R_{\min} + \Delta R, \\ 0, & R > R_{\min} + \Delta R \end{cases} \quad (37)$$

где E_{\max} — максимальное значение функции рассеяния; G — безразмерный параметр, характеризующий скос вершины модели (37); $\delta \mathcal{R} = c/\Delta f$ — величина элемента разрешения по дальности радиофизической системы. Подставляя (36) и (37) в (35) и интегрируя, можно получить

$$S(t) = \delta R E_{\max} \sqrt{2\mathcal{E}_{\text{знд}} \Delta f} \frac{A(t\Delta f; 2m_R) - A(t\Delta f; 0)}{4\pi^2}, \quad (38)$$

где $m_R = \Delta R / \delta R$ — количество элементов разрешения по дальности, занимаемых источником излучения, и используется обозначение

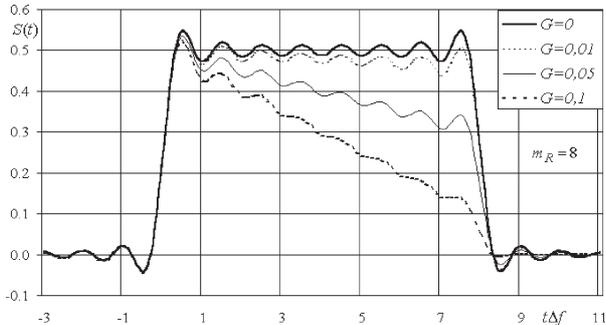
$$A(\xi; \zeta) = G \cos[\pi(\xi - \tau_0 - \zeta)] - \pi[2 - (\xi - \tau_0)G] \text{Si}[\pi(\xi - \tau_0 - \zeta)]. \quad (39)$$

Здесь $\tau_0 = t_0 \Delta f$ — безразмерный параметр;

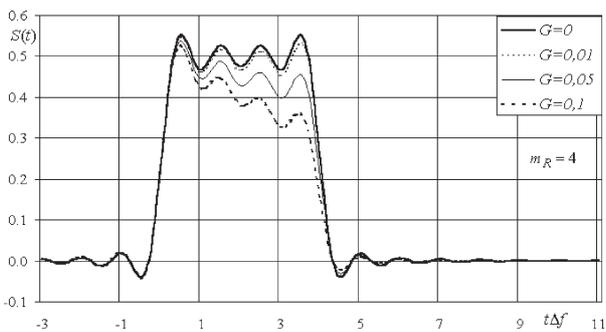
$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} d\alpha$ — интегральный синус [6].

В качестве примера на рис. 3 приведены рассчитанные по формулам (38) и (39) графики огибающей принимаемого от источника вторичного излучения сигнала для нескольких значений параметра G . Рис. 3а построен для случая $m_R = 8$, а рис. 3б — для случая $m_R = 4$. При расчетах для удобства предполагалось, что энергия зондирующего сигнала нормирована так, что $\mathcal{E}_{\text{знд}} = 2\pi / [\Delta f (E_{\max} \delta R)^2]$.

На рис. 4 показаны зависимости коэффициента τU_N для сигнала с огибающей (38) от параметра τ_0 , характеризующего сдвиг сигнала вдоль временной оси. Значение параметра m_R на рис. 4 то же, что и на рис. 3, а база обработки $B = 32$. Как видно из хода кривых,



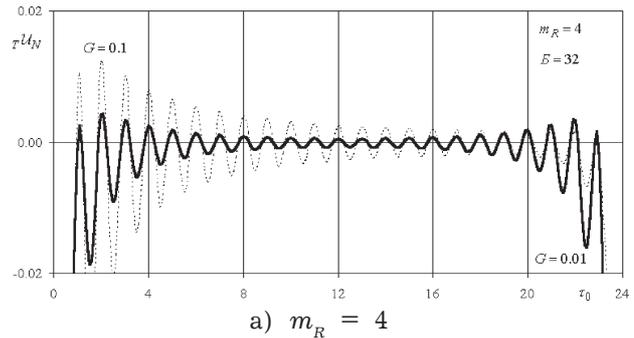
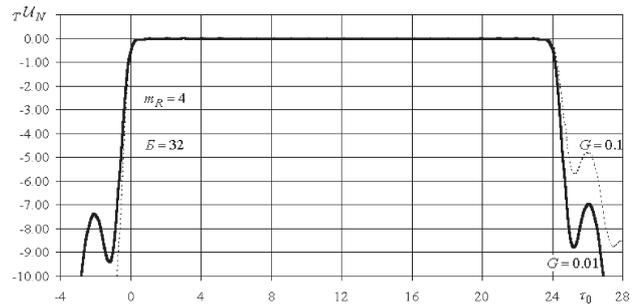
а) $m_R = 8$



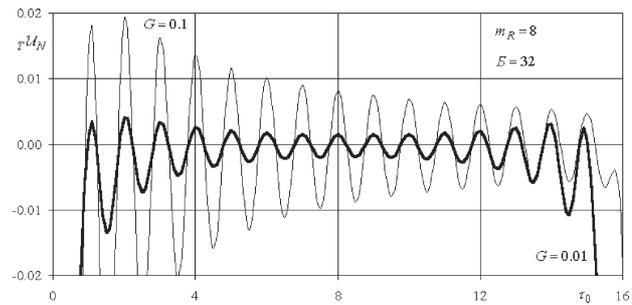
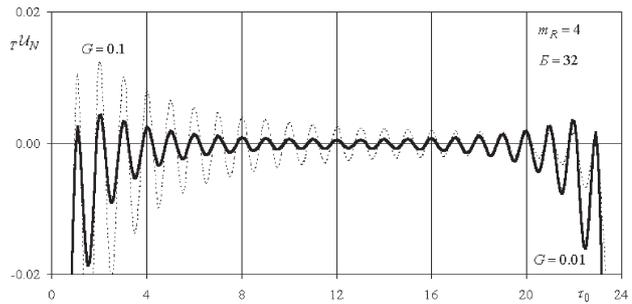
б) $m_R = 4$

Рис. 3. Графики огибающей принимаемого сигнала

если $0 \leq \tau_0 \leq B - 2m_R$, то относительная разность энергетических отношений сигнал-шум носит знакопеременный характер, однако ее величина составляет сотые доли процента. Это означает, что при дискретной и аналоговой обработке энергия сигнала от источника вторичного излучения используется практически одинаково. При других значениях параметра τ_0 , приведенных на рис. 4, $\tau U_N < 0$, т. е. при таких значениях параметра τ_0 энергия обна-



а) $m_R = 4$



б) $m_R = 8$

Рис. 4. Зависимости коэффициента τU_N от параметра τ_0

руживаемого сигнала с комплексной огибающей (38) лучше используется при дискретной обработке.

Таким образом, сравнение дискретного и аналогового обнаружения по энергии детерминированных узкополосных радиосигналов показала их практически одинаковую эффективность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов В. С., Левин Б. Р. Сравнение дискретной и аналоговой обработки сигналов // Известия ВУЗов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. 1972. Т. 15. № 4. С. 532—534.
2. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М. Радио и связь. 1983. 320 с.
3. Урковиц. Обнаружение неизвестных детерминированных сигналов по энергии // ТИИЭР. 1967. Т. 55. № 4. С. 50—59.
4. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М. Советское радио. 1966. 680 с.
5. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М. Радио и связь. 1981. 416 с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М. Наука. 1979. 832 с.
7. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М. Советское радио. 1975. Кн. 2. 392 с.
8. Келехсаев Б. Г. Нелинейные преобразователи и их применение. Справочник. М. Солон-Р. 1999. 304 с.
9. Фалькович С. Е., Пономарев В. И., Шкварко Ю. В. Оптимальный прием пространственно-временных сигналов в радиоканалах с рассеянием / Под ред. С. Е. Фальковича. М. Радио и связь, 1989. — 296 с.