УДК 517.955

ОБ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА И СПЕКТРЕ ЛАПЛАСИАНА НА ГРАФЕ С СОИЗМЕРИМЫМИ РЕБРАМИ[1]

© 2001 г. А. В. Копытин, В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет

Гиперболические уравнения на сетях и соответствующие спектральные задачи интенсивно изучаются в течение последних примерно 20 лет. Продвижения в этой области получены по нескольким направлениям. Установлены осцилляционные свойства спектра краевой задачи на сети (см. [1, 2, 3]), получены оценки на собственные значения (см. [4, 5]), найдены условия существования и единственности решения задачи Коши (см. [6]).

В последнее время разными авторами исследуется возможность представления решения в форме Даламбера (см. [6]). Настоящая работа, с одной стороны, лежит в русле последнего направления, но в то же время приводимый здесь результат позволяет пролить свет и на структуру спектра.

Рассмотрим связный геометрический граф (сеть) Γ из $\mathbb{R}^n$. Множество вершин Γ обозначается через $V(\Gamma)$, а $E(\Gamma)$ обозначает множество ребер Γ. Пусть длины ребер Γ соизмеримы. Примем общую меру длин ребер за 1. Тогда без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что длины всех ребер равны 1. Через E_v обозначим множество ребер, примыкающих к вершине v, а через d_v – степень вершины v (заметим, что множество E_v содержит d_v элементов). Присвоим каждому ребру e некоторый положительный вес $p(e)$.

В этой статье через x мы будем обозначать точки принадлежащие графу Γ. Параметризуем каждое ребро e натуральным параметром, фиксируя тем самым ориентацию на Γ и устанавливая взаимно-однозначное соответствие между ребром e и отрезком $[0, 1]$. Через x_e мы обозначим число в $[0, 1]$, соответствующее $x \in e$.

Функцию u, заданную на Γ, мы будем отождествлять с семейством функций $(u_e)_{e\in E}$, каждая из которых задана на единственном ребре e и, следовательно, на отрезке $[0, 1]$ таким образом, что $u(x) = u_e(x_e)$. Мы будем использовать одно и то же обозначение u_e для функции, определенной на ребре e и отрезке $[0, 1]$, отождествляемом с e.

Для любой вершины v и любого ребра e из E_v определим функцию $u_{e,v}$ на отрезке $[0, 1]$

$$u_{e,v}(s) = \begin{cases} u_e(s), & \text{если } v \text{ – начальная вершина } e \\ u_e(1-s), & \text{если } v \text{ – конечная вершина } e \end{cases} \tag{1}$$

Введем пространство $L^2(\Gamma, p)$ как пространство всех функций $u = (u_e)_{e\in E}$, заданных на Γ таких, что $u_e \in L^2(0, 1)$ для любого ребра e. Аналогично, для любого натурального k определим пространство $H^k(\Gamma, p)$ непрерывных на Γ функций таких, что $u_e \in H^k(0, 1)$ для всех e. Эти пространства являются гильбертовыми пространствами со скалярными произведениями

$$(u, \tilde{u})_{L^2(\Gamma,p)} = \sum_{e\in E} p(e)(u_e, \tilde{u}_e)_{L^2(0,1)}$$

и

$$(u, \tilde{u})_{H^k(\Gamma,p)} = \sum_{e\in E} p(e)(u_e, \tilde{u}_e)_{H^k(0,1)}$$

На графе Γ рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \qquad t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где функции $u(t, x)$ при каждом фиксированном $t \geq 0$ и f принадлежат $D(\Delta)$ – подмножеству $H^2(\Gamma, p)$, состоящему из функций удовлетворяющих условиям:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минвуза: Грант Минвуза (КЦ СПбГУ) № 97-0-1.8-100, Грант Минвуза (КЦ Новосибирского госун-та) № 11

$$u\Big|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{3}$$

где $\partial\Gamma \subset V(\Gamma)$, причем для любой вершины $v \in \partial\Gamma$ $d_v = 1$, и

$$\sum_{e\in E(v)} p(e)u'_{e,v}(0+) = 0, \quad v \in V(\Gamma)\setminus\partial\Gamma. \tag{4}$$

Через $p(v)$ обозначим сумму весов всех ребер, примыкающих к v, т.е.

$$p(v) = \sum_{e\in E(v)} p(e)$$

Для любой вершины v графа Γ и любого ребра e из E_v положим

$$\kappa(e,v) = \begin{cases} \dfrac{p(e)}{p(v)}, & v \in V(\Gamma)\setminus\partial\Gamma \\ \quad 0, & v \in \partial\Gamma. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\sum\limits_{e\in E_v} \kappa(e,v) = 1$ для $v \in V(\Gamma)\setminus\partial\Gamma$.

Пусть $e = (v, v')$ – произвольное ребро Γ, и v – его начальная вершина. Построим продолжение F_e функции f_e на отрезок $[-1,2]$:

$$F_e(s) = \begin{cases} 2\sum\limits_{\tilde e\in E_v} \kappa(\tilde e,v)f_{\tilde e,v}(-s) - f_{e,v}(-s) & s\in[-1,0) \\ f_e(s) & s\in[0,1] \\ 2\sum\limits_{\tilde e\in E_{v'}} \kappa(\tilde e,v')f_{\tilde e,v'}(s-1) - f_{e,v'}(s-1) & s\in(1,2] \end{cases} \tag{5}$$

Лемма 1 *Функция F_e принадлежит пространству $C^1[-1,2]$.*

Доказательство. Покажем, сначала, что функция $F_e(s)$ непрерывна в точках 0 и 1.

$$\lim_{x\to 0-} F_e(s) = 2\sum_{\tilde e\in E_v} \kappa(\tilde e,v)f_{\tilde e,v}(0) - f_e(0) =$$

$$2f_e(0)\sum_{\tilde e\in E_v} \kappa(\tilde e,v) - f_e(0) = f_e(0)$$

$$\lim_{x\to 1+} F_e(s) = 2\sum_{\tilde e\in E_{v'}} \kappa(\tilde e,v')f_{\tilde e,v'}(0) - f_e(1) =$$

$$2f_e(1)\sum_{\tilde e\in E_{v'}} \kappa(\tilde e,v') - f_e(1) = f_e(1)$$

Следовадельно, функция F_e непрерывна на всем отрезке $[-1,2]$. Докажем теперь, что функция $F'_e(x)$ непрерывна в точках 0 и 1.

$$F'_e(0-) = -2\sum_{\tilde e\in E_v} \kappa(\tilde e,v)f'_{\tilde e,v}(0+) + f'_e(0+) =$$

$$f'_e(0+) = F'_e(0+)$$

$$F'_e(1+) = 2\sum_{\tilde e\in E_{v'}} \kappa(\tilde e,v')f'_{\tilde e,v'}(0+) - f'_{e,v'}(0+) =$$

$$f'_e(1-) = F'_e(1-)$$

Таким образом $F_e \in C^1[-1,2]$. Лемма доказана.

Теорема 1 *Решение $u = (u_e)_{e\in E}$ задачи (2) представимо в виде*

$$u_e(t,x_e) = \frac{1}{2}(F_e(x_e+t) + F_e(x_e-t)) \;\; t\in[0,1] \tag{6}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что u удовлетворяет уравнению $\partial^2 u/\partial t^2 = \Delta u$. Легко видеть, что функция u удовлетворяет начальным условиям и условию (3) на $\partial\Gamma$.

Остается проверить выполнение условия

$$\sum_{e\in E(v)} p(e)\frac{\partial u_{e,v}}{\partial s}(t,0+) = 0$$

для любой $v \in V(\Gamma)\setminus\partial\Gamma$ при каждом $t\in[0,1]$. Если v – начальная вершина ребра e, то, в силу (5) и (6), имеем

$$\frac{\partial u_{e,v}}{\partial s}(t,0+) = F'_e(t) - F'_e(-t) =$$

$$f'_e(t) - 2\sum_{\tilde e\in E(v)} \kappa(\tilde e,v)f'_{\tilde e,v}(t)\Big) +$$

$$+f'_{e,v}(t) = 2\Big(f'_{e,v}(t) - \sum_{\tilde e\in E(v)} \kappa(\tilde e,v)f'_{\tilde e,v}(t)\Big)\Big)$$

В противном случае, если v – конечная вершина ребра e, имеем

$$\frac{\partial u_{e,v}}{\partial s}(t,0+) = -F'_e(1+t) - F'_e(1-t) =$$

$$-2\sum_{\tilde e\in E(v)} \kappa(\tilde e,v)f'_{\tilde e,v}(t) + f'_{e,v}(t) - f'_e(1-t) =$$

$$2\Big(f'_{e,v}(t) - \sum_{\tilde e\in E(v)} \kappa(\tilde e,v)f'_{\tilde e,v}(t)\Big)\Big)$$

Таким образом, в обоих случаях имеем одинаковый результат. Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in E_v} p(e)\frac{\partial u_{e,v}}{\partial s}(t,0+) =$$

$$= \sum_{e\in E_v} p(e)f'_{e,v}(t) - \sum_{e\in E_v} p(e)\sum_{\tilde{e}\in E_v}\kappa(\tilde{e},v)f'_{\tilde{e},v}(t) =$$

$$= \sum_{e\in E_v} p(e)f'_{e,v}(t) - p(v)\sum_{\tilde{e}\in E_v}\frac{p(\tilde{e})}{p(v)}f'_{\tilde{e},v}(t) =$$

$$\sum_{e\in E_v} p(e)f'_{e,v}(t) - \sum_{\tilde{e}\in E_v} p(\tilde{e})f'_{\tilde{e},v}(t) = 0$$

Теорема доказана.

Определим оператор $\mathcal{W}:\ D(\Delta)\to D(\Delta)$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{W}f = u(1,x),$$

где $u(t,x)$ – решение задачи (2). В силу единственности решения задачи (2) (см. [6]) имеем

$$(\mathcal{W}f)_e(x_e) = \frac{1}{2}(F_e(x_e+1)+F_e(x_e-1)) \qquad (7)$$

Из формул (5) и (7) следует, что

$$(\mathcal{W}f)_{e,v}(s) = \sum_{\tilde{e}\in E_v}\kappa(\tilde{e},v)f_{\tilde{e},\tilde{v}}(s) +$$

$$+\sum_{\tilde{e}\ni v'}\kappa(\tilde{e},v')f_{\tilde{e},v'}(s) - f_{e,v'}(s) \quad s\in(0,\tfrac{1}{2}) \qquad (8)$$

Через e_v обозначим половину ребра e, примыкающую к вершине v. Используя формулу (8), построим матрицу $W = (w(e_v,e'_{v'}))$

$$w(e_v,e'_{v'}) = \begin{cases} \kappa(e,v)+\kappa(e,v')-1 & \text{если } e=e' \text{ и } v\neq v' \\ \kappa(e',e\cap e') & \text{если } e\bigcap e'\neq\emptyset \text{ и } v\neq v' \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Размерность матрицы W равна $2[E]\times 2[E]$. Рассмотрим матрицу $\hat{W} = (\hat{w}(e_v,e'_{v'}))$, элементы которой $\hat{w}(e_v,e'_{v'})$ определим следующим образом:

$$\hat{w}(e_v,e'_{v'}) = w(e_v,e'_{v'})\sqrt{\frac{p(e)}{p(e')}}.$$

Лемма 2 *Матрицы W и $\hat{W}$ имеют одни и те же собственные значения, и если U (соответсвенно $\hat{U}$) есть собственный вектор матрицы P (соответственно $\hat{P}$) отвечающий собственному значению λ, то*

$$\hat{U}(e_v) = U(e_v)\sqrt{p(e)}.$$

Доказательство. Заметим, что для всех полуребер e_v равенство

$$\sum_{e'_{v'}} w(e_v,e'_{v'})U(e'_{v'}) = \lambda U(e_v)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{e'_{v'}} w(e_v,e'_{v'})\sqrt{\frac{p(e)}{p(e')}}\hat{U}(e'_{v'}) = \lambda\hat{U}(e_v)$$

или

$$\sum_{e'_{v'}}\hat{w}(e_v,e'_{v'})\hat{U}(e'_{v'}) = \lambda\hat{U}(e_v).$$

Таким образом, λ является собственным значением матрицы W, а U – отвечающим ему собственным вектором тогда и только тогда, когда λ является собственным значением матрицы $\hat{W}$, а $\hat{U}$ – отвечающим ему собственным вектором. Лемма доказана.

Поскольку матрица $\hat{W}$ симметрична, все собственные значения матрицы W действительны.

Лемма 3 *Оператор $\mathcal{W}$ и матрица W имеют одни и те же собственные значения.*

Доказательство. Пусть λ – собственное значение оператора $\mathcal{W}$, а $\varphi(x)$ – отвечающая ему собственная функция. Тогда λ является собственным значением матрицы W с отвечающим ему собственным вектором U таким, что $U(e_v) = \varphi_{e,v}(\xi)$ для любого полуребра e_v, где точка ξ выбирается из интервала $(0,\frac{1}{2})$ так, чтобы хотя бы одно из значений $\varphi_{e,v}(\xi)$ отличалось от 0.

Пусть λ – собственное значение матрицы W, а U – отвечающий ему собственный вектор. Тогда λ является также собственным значением оператора $\mathcal{W}$. В качестве отвечающей ему собственной функции возьмем функцию $\varphi = (\varphi_e)_{e\in E}$ такую, что

$$\varphi_e(x_e) = U(e_v)\omega_\varepsilon(x_e-\tfrac{1}{4}) + U(e_{v'})\omega_\varepsilon(x_e-\tfrac{3}{4})$$

где v – начальная вершина e, а v' – конечная, а ω_ε – функция-шапочка с достаточно малым носителем ($\varepsilon<\frac{1}{4}$). Лемма доказана.

Теорема 2 *Спектр $\sigma(-\Delta)$ оператора $-\Delta$ на Γ представляет собой следующее множество:*

$$\sigma(-\Delta) = (\{0\}) \bigcup \{\lambda > 0 : \cos\sqrt{\lambda} \in \sigma(W)\}, \quad (9)$$

где $\sigma(W)$ обозначает спектр матрицы W, причем $\sigma(W) \subset [-1, 1]$. 0 входит в спектр $-\Delta$ в том и только в том случае, если $\partial\Gamma = \emptyset$.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$ – собственное значение оператора $-\Delta$ на Γ, а $\varphi(x)$ – соответствующая ему собственная функция. Тогда, как легко видеть, функция $u(t, x) = \varphi(x)\cos\sqrt{\lambda}t$ является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0. \end{cases}$$

В силу определения оператора $\mathcal{W}$, имеем:

$$\mathcal{W}\varphi = \cos\sqrt{\lambda}\,\varphi. \quad (10)$$

Равенство (10) означает, что $\cos\sqrt{\lambda}$ является собственным значением оператора $\mathcal{W}$, $\varphi(x)$ – отвечающей ему собственной функцией. Таким образом, каждая собственная функция оператора $-\Delta$ является собственной функцией оператора $\mathcal{W}$.

Поскольку $-\Delta$ – самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве $L^2(\Gamma, p)$, существует ортонормальный базис в пространстве $L^2(\Gamma, p)$ составленный из собственных функций $-\Delta$ (см. [7]).

Пусть μ – собственное значение оператора $\mathcal{W}$. Тогда в собственном подпространстве, отвечающем μ, обязательно находится функция $\varphi(x)$, которая является собственной функцией оператора $-\Delta$, отвечающая, в свою очередь, некоторому собственному значению λ. Тогда имеем

$$\cos\sqrt{\lambda}\varphi(x) = \mu\varphi(x),$$

откуда следует, что $\mu = \cos\sqrt{\lambda}$, и, следовательно, $\mu \in [-1, 1]$.

Сужение собственной функции φ на ребро e есть

$$\varphi_e(x_e) = A_e\cos\sqrt{\lambda}x_e + B_e\sin\sqrt{\lambda}x_e.$$

Возьмем $\lambda^* > 0$ таким, что $\cos\sqrt{\lambda^*} = \mu$. Покажем, что λ^* является собственным значением оператора $-\Delta$. Равенство

$$\cos\sqrt{\lambda} = \cos\sqrt{\lambda^*}$$

равносильно равенству

$$\sqrt{\lambda^*} = \pm\sqrt{\lambda} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть, для определенности, $\sqrt{\lambda^*} = \sqrt{\lambda} + 2\pi k$. Рассмотрим функцию φ^*, сужение которой на ребро e есть

$$\varphi_e^*(x) = A_e\cos\sqrt{\lambda^*}x_e + B_e\sin\sqrt{\lambda^*}x_e.$$

Заметим, что $\varphi_e^*(0) = A_e = \varphi_e(0)$, а

$$\varphi_e^*(1) = A_e\cos(\sqrt{\lambda}+2\pi k)+B_e\sin(\sqrt{\lambda}+2\pi k) = \varphi_e(1).$$

В то же время

$$\frac{d\varphi_e^*}{dx_e}(0+) = B_e\sqrt{\lambda^*} = \sqrt{\lambda^*}\,\frac{d\varphi_e}{dx_e}(0+)$$

и

$$\frac{d\varphi_e^*}{dx_e}(1-) = B_e\sqrt{\lambda^*}\cos(\sqrt{\lambda}+2\pi k)-A_e\sqrt{\lambda^*}\sin(\sqrt{\lambda}+2\pi k) =$$

$$= B_e\sqrt{\lambda^*}\cos\sqrt{\lambda} - A_e\sqrt{\lambda^*}\sin\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda^*}\,\frac{d\varphi_e}{dx_e}(1-).$$

Из приведенных выкладок следует, что если $\varphi \in D(\Delta)$, то и $\varphi^* \in D(\Delta)$.

В том случае, если $\sqrt{\lambda^*} = -\sqrt{\lambda} + 2\pi k$, мы можем взять функцию φ^*, сужение которой на ребро e есть

$$\varphi_e^*(x_e) = A_e\cos\sqrt{\lambda^*}x_e - B_e\sin\sqrt{\lambda^*}x_e.$$

Делая аналогичные выкладки, можно показать, что и в этом случае $\varphi^* \in D(\Delta)$. Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. Теоремы Штурма для уравнений на графах // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309, № 6. С. 1306—1308.

2. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц.уравнения. 1989. Т. 25, № 7. С. 1141—1150.

3. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. О распределении нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля на пространственной сети // Доклады РАН. 1999. Т. 364, № 3. С. 316—318.

4. S. Nicaise Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmition// Springer-Verlag. Lecture Notes in Math. Vol. 1171. C. 532—541.

5. S. Nicaise Approche spectrale des problemes de diffusion sur les reseaux// Spriger-Verlag. Lecture Notes in Math. Vol. 1235. C. 120—140.

6. Ali Mehmeti F. Nonelinear waves in networks// Akademi-Verlad, Berlin. 1994. 171 c.

7. K. Yosida, Fuctional Analysis// Spriger-Verlag, Berlin 1971. 476 c.