УДК 517.988.6

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СЮРЬЕКТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

© 2001 г. Б. Д. Гельман[1]

Воронежский государственный университет

Первой работой, посвященной вычислению топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений, была статья [12]. Некоторые другие результаты в этом направлении были доказаны в [4, 5, 7-10, 13, 14].

В настоящей работе доказываются некоторые теоремы о топологической размерности множества решений операторного включения $a(x) \in F(x)$, в которых a является линейным непрерывным сюрьективным оператором. Полученные результаты обобщают некоторые результаты работ [4, 9, 10, 12, 14].

1. Основные факты теории многозначных отображений

Пусть Y — подмножество банахова пространства E, обозначим:

$C(Y)$ — множество всех непустых замкнутых подмножеств в Y;

$K(Y)$ — множество всех непустых компактных подмножеств в Y;

$Kv(Y)$ — множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Многозначное отображение (м-отображение) метрического пространства X в метрическое пространство Y — это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое образом точки x.

В дальнейшем, если образы м-отображения F является компактами, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to K(Y)$. Аналогично, обозначение $F : X \to Kv(Y)$ ($F : X \to Cv(Y)$) означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми компактными (замкнутыми) множествами.

[1] Это исследование поддержано РФФИ грант № 99-01-00333.

Всюду в дальнейшем м-отображения обозначаются прописными, а однозначные - строчными буквами.

1.1. Определение. *М-отображение $F : X \to Y$ называется полунепрерывным сверху в точке $x_\circ \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y, V \supset F(x_\circ)$, существует открытая окрестность U точки $x_\circ$ такая, что $F(U) \subset V$.*

Если F — полунепрерывно сверху в каждой точке $x_\circ \in X$, то оно называется полунепрерывным сверху.

1.2. Определение. *М-отображение $F : X \to Y$ называется полунепрерывным снизу в точке $x_\circ \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x_\circ) \cap V \neq \phi$ найдется открытая окрестность U точки $x_\circ$, такая, что $F(x) \cap V \neq \phi$ для любого $x \subset U$.*

Если F — полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным снизу.

1.3. Определение. *М-отображение $F : X \to Y$ называется непрерывным, если оно одновременно полунепрерывно сверху и снизу.*

1.4. Определение. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным сечением м-отображения F, если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $f(x) \in F(x)$*

1.5. Определение. *М-отображение $F : X \to K(Y)$ называется вполне непрерывным, если:*

1) F — полунепрерывно сверху;

2) множество $\overline{F(B)}$ является компактным в Y для любого ограниченного множества $B \subset X$.

1.6. Определение. *М-отображение* $F : X \to K(Y)$ *называется усиленно вполне непрерывным, если:*

1) F — непрерывное м-отображение;

2) множество $\overline{F(B)}$ *является компактным в Y для любого ограниченного множества* $B \subset X$ *.*

Пусть E — банахово пространство, $X \subset E$, $F : X \to K(E)$ — некоторое м-отображение.

Точку $x_\circ$ будем называть неподвижной точкой м-отображения F, если $x_\circ \in F(x_\circ)$.

Пусть U — ограниченное открытое множество в E, $F : \overline{U} \to Kv(E)$ — вполне непрерывное м-отображение. Вполне непрерывным многозначным векторным полем (мв-полем) порожденным F, назовем м-отображение $\Phi = i - F : \overline{U} \to Kv(E)$, определенное условием: $\Phi(x) = x - F(x)$.

Будем говорить, что мв-поле Φ невырождено на ∂U, если $0 \notin \Phi(x)$ для любого $x \in \partial U$.

Множество всех вполне непрерывных невырожденных на ∂U мв-полей обозначим $\Re(\overline{U}, \partial U)$.

1.7. Определение. *Мв-поля* $\Phi_0, \Phi_1 \in \Re(\overline{U}, \partial U)$ *называются гомотопными* $(\Phi_0 \sim \Phi_1)$, *если существует вполне непрерывное отображение* $\Psi : \overline{U} \times [0,1] \to Kv(E)$ *такое, что:*

а) $\Phi_0(x) = x - \Psi(x,0), \Phi_1(x) = x - \Psi(x,1)$ *для любого* $x \in \overline{U}$;

б) $x \notin \Psi(x, \lambda)$ *для любых* $x \in \partial U, \lambda \in [0,1]$.

Пусть Z — группа целых чисел. Существует отображение $\gamma : \Re(\overline{U}, \partial U) \to Z$, называемое вращением многозначных вполне непрерывных векторных полей, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$, *то существует точка* $x_0 \in U$ *такая, что* $\Phi_0(x) \ni 0$;

2) если $\Phi_0(x) \ni x - x_0$ *для любого* $x \in \partial U$, *то*

$$\gamma(\Phi, \overline{U}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in U, \\ 0 & \text{если } x_0 \notin \overline{U}; \end{cases}$$

3) если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, *то* $\gamma(\Phi_0, \overline{U}) = \gamma(\Phi_1, \overline{U})$;

4) если $\Phi_0(x) \subset \Phi_1(x)$ *для любого* $x \in \overline{U}$, *то* $\gamma(\Phi_0, \overline{U}) = \gamma(\Phi_1, \overline{U})$.

Доказательство существования такого отображения γ и изучение его свойств содержится, например, в [2, 3].

О других свойствах многозначных отображений смотри, например, [2, 3, 6, 11].

2. Топологическая размерность множества решений одного класса операторных включений

Пусть E — банахово пространство, U — ограниченное открытое множество в E, F: $\overline{U} \to Kv(E)$ — вполне непрерывное м-отображение, $\Phi = i - F \in \Re(\overline{U}, \partial U)$. Обозначим $N(\Phi, \overline{U})$ множество неподвижных точек F, т.е.

$$N(\Phi, \overline{U}) = \{x \in \overline{U} | x \in F(x)\} = \{x \in \overline{U} | 0 \in \Phi(x)\}.$$

Очевидно, что множество $N(\Phi, \overline{U})$ является компактом в E. Нас будет интересовать топологическая размерность dim этого множества. Основные свойства размерности dim содержатся, например, в [1].

В работе [4] доказано следующее утверждение, играющее важную роль в дальнейших конструкциях.

2.1. Теорема. *Пусть* $F : \overline{U} \to Kv(E)$ *— усиленно вполне непрерывное м-отображение,* $\Phi = i - F \in \Re(\overline{U}, \partial U)$. *Пусть:*

а) $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$,

б) $\dim(F(x)) \geq n$ для любого $x \in U$.

Тогда $\dim N(\Phi, \overline{U}) \geq n$.

2.2. Следствие. *Пусть T — ограниченное выпуклое замкнутое подмножество банахова протранства E, пусть* $F : T \to Kv(T)$ *— усиленно вполне непрерывное м-отображение. Если* $\dim(F(x)) \geq n$ *для любого* $x \in T$, *то* $\dim(N(i - F, T)) \geq n$.

Доказательство. Пусть $r : E \to T$ — непрерывная ретракция пространства E на T. Рассмотрим многозначное отображение $F_1 = F \circ r : E \to T$. Пусть U — открытый шар в E такой, что $T \subset U$, тогда сужение отображения F_1 на $\overline{U}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Так как множество $N(i - F, T) = N(i - F_1, \overline{U})$, то $\dim(N(i - F, T)) \geq n$.

Пусть E_1, E_2 — два банаховых пространства, $a : E_1 \to E_2$ — непрерывный линейный сюръективный оператор, $F : E_1 \to Kv(E_2)$ — многозначное усиленно вполне непрерывное отображение. Рассмотрим следующее включение:

$$a(x) \in F(x).$$

Обозначим множество решений этого включения $N(a,F)$, т.е.

$$N(a, F) = \{x \in E_1 | a(x) \in F(x)\}.$$

Нас будет интересовать существование решений уравнения (1) и топологическая размерность dim множества $N(a,F)$.

Нам понадобятся некоторые леммы.

2.3. Лемма. *Пусть*

$$\beta(a) = \sup_{y \in E_2}\left(\frac{\inf\{\|x\| \,|\, x \in E_1, a(x) = y\}}{\|y\|}\right)$$

тогда $0 < \beta(a) < \infty$.

Доказательство этой леммы вытекает из открытости отображения a.

2.4. Лемма. *Для любого числа k, $\beta(a) < k$, существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$, такое, что выполнены следующие условия:*

1) $a(q(y)) = y$ для любого $y \in E_2$;

2) $\|q(y)\| \le k\|y\|$.

Доказательство. $a^{-1} : E_2 \to Cv(E_1)$ — отображение обратное a. Это отображение является полунепрерывным снизу многозначным отображением (см., например, [11]). Пусть k — произвольное число большее $\beta(a)$. Рассмотрим другое многозначное отображение $\Phi : E_2 \to Cv(E_1), \Phi(y) = B_{r(y)}[0]$ — замкнутый шар радиуса $r(y) = k\|y\|$ с центром в нуле пространства E_1. Очевидно, что это отображение является непрерывным многозначным отображением. Пусть $F(y) = a^{-1}(y) \cap \Phi(y)$. Это отображение имеет непустые замкнутые выпуклые образы и полунепрерывно снизу (см., например, [3]). В силу теоремы Майкла о сечении (см. [11]), существует непрерывное отображение $q : E_2 \to E_1$ такое, что $q(y) \in F(y)$. Нетрудно видеть, что это отображение является искомым.

2.5. Теорема. *Пусть многозначное отображение $F : E_1 \to Kv(E_2)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) F — усиленно вполне непрерывно;

2) $\dim(F(x)) \ge m$ для любого $x \in E_1$;

3) существуют неотрицательные числа c и d такие, что для любого $x \in E_1$ справедливо неравенство:

$$\min_{y \in F(x)} \|y\| \le c\|x\| + d.$$

Если $c < \dfrac{1}{\beta(a)}$, то множество N(a,F) непусто и $\dim(N(a,F)) \ge \dim(Ker(a)) + m$.

Доказательство. Пусть k произвольное число удовлетворяющее неравенствам, $\beta < k < \frac{1}{c}$. Рассмотрим отображение $q : E_2 \to E_1$ построенное в лемме 2.4 по этому числу k. Пусть число n такое, что $0 \le n \le \dim(a^{-1}(0))$. Тогда в подпространстве $Ker(a) = \{x \in E_1 | a(x) = 0\}$ существуют n линейно независимых единичных векторов e_1 ,e_2 , ..., e_n.

Рассмотрим пространство $E_3 = E_2 \times R^n$, с нормой $\|(x,u)\| = \|x\| + \|u\|$, и многозначное отображение $G : E_3 \to Kv(E_3)$ определенное условием:

$$G(y,u) = \{(z,u) |\ z = F(q(y) + \sum_{i-1}^{n} \xi_i e_i), v \in R^n, \|u\| \le 1\},$$

где $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Нетрудно заметить, что это многозначное отображение является усиленно вполне непрерывным.

Легко проверить также, что точка (y,u) является неподвижной точкой отображения G, тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) $u \in R^n, \|u\| \le 1$;

2) $y = a(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i) \in F(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i)$, т.е.

точка $q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ является решением нашего включения.

Заметим, что отображение $\hat{q} = E_3 \to E_1$ $\hat{q}(y,u) = q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, является биекцией. Действительно, если $(y_1,u_1) \ne (y_2,u_2)$, то $\hat{q}(y_1,u_1) \ne \hat{q}(y_2,u_2)$. Таким образом, разным неподвижным точкам отображения G с помощью отображения $\hat{q}$ отвечают разные решения нашего первоначального включения. Это позволяет, для изучения размерности множества решений нашего включения (1), применить теоремы о размерности множества неподвижных точек многозначных отображений.

Рассмотрим ограниченное выпуклое замкнутое множество

$$T = B_R[0] \times B_2[0] \subset E_3$$

где $B_R[0]$ — замкнутый шар радиуса R с центром в нуле пространства E_2, а B_2 [0] — замкнутый шар радиуса 2 с центром в нуле пространства R_n.

Покажем, что для достаточно большого R множество

$$G(x,u) \cap T \neq 0$$

любых $(x,u) \in T$.

Пусть $(z,u) \in G(x,u)$, тогда $v \in B_1[0] \subset R^n$. В силу условий теоремы, существует $z \in F(q(x) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i)$ такой, что

$$\|z\| \leq c(\|q(x) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\|) + d \leq$$

$$\leq c\|q(x)\| + 2c + d \leq ck\|x\| + 2c + d \leq$$

$$ckR + 2c + d.$$

Если число $R \geq \frac{2c+d}{1-ck}$, то $\|z\| < R$.

Это и доказывает непустоту этого пересечения, более того, это пересечение содержит внутреннюю точку множества $G(x,u)$.

Рассмотрим многозначное отображение $G_1(x,u) = G(x,u) \cap T$. Нетрудно видеть, что это отображение усиленно вполне непрерывно, имеет выпуклые образы, переводит множество T в себя и

$$\dim(G_1(x,u)) = \dim(G(x,u)) =$$

$$= \dim(F(q(x) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i)) + n \geq m + n.$$

Так как n — произвольное число меньшее или равное $\dim(a^{-1}(0))$, то

$$\dim(G_1(x,u)) \geq m + \dim(a^{-1}(0)).$$

Следовательно, в силу следствия 2.2 множество неподвижных точек $N(i - G_1, T)$ отображения G_1, а следовательно, и множество $N(i - G,\ T)$ удовлетворяют неравенству

$$\dim(N(i - G, T)) \geq m + \dim(a^{-1}(0)).$$

Очевидно, что множество $N(i{-}G,\ T)$ является компактом, а так как отображение $\hat{q} : N(i - G, T) \to E_1$ является биекцией, то $\hat{q}$ — гомеоморфизм на область значений. В силу сделанных построений, $\hat{q}(N(i - G, T)) \subset N(\alpha, F)$. Это включение и доказывает теорему.

2.6. Следствие. *Пусть отображения a и F удовлетворяют условиям теоремы 2.5, тогда отображение $G = a{+}F$ является сюрьективным и для любой точки $y \in E_2$ выполнено неравенство* $\dim(N_y(\alpha, F)) \geq m + \dim(\alpha^{-1}(0))$ *где* $N_y(\alpha, F) = \{x \in E_1 \,|\, y \in G(x)\}$.

3. Локальная размерность множества решений операторных включений.

Рассмотрим локальные свойства размерности множества $N(\Phi, \overline{U})$ в окрестности фиксированного решения. Пусть U — ограниченная открытая область в E, $\Phi = i - F \in \Re(\overline{U}, \partial U)$.

3.1. Теорема. *Пусть $F : \overline{U} \to Kv(E)$ — усиленно вполне непрерывное м-отображение, $x_0 \in U$ — неподвижная точка м-отображения F. Если существует открытая окрестность $W \subset U$ точки x_0 и непрерывное сечение $f : W \to E$ м-отображения F такие, что:*

1) точка x_0 является единственной особой точкой поля $\varphi = i - f$;

2) $ind(\varphi, x_0) \neq 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ размерность

$$\dim(N_{x_0\varepsilon}(i - F, \overline{U}) \geq \dim(F(x_0)),$$

где $N_{x_0\varepsilon}(i - F, \overline{U}) = \{x \in N(i - F, \overline{U}) \,|\, \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$.

Доказательство этой теоремы содержится в [4].

Рассмотрим опять включение (1). Нас будет интересовать локальная размерность множества $N(a,F)$в окрестности некоторого фиксированного решения данного уравнения.

Пусть $x_0 \in N(a, F)$ — некоторое фиксированное решение нашего включения. Пусть $y_0 = a(x_0) \in F(x_0) \subset E_2$. Рассмотрим многозначное отображение $a^{-1} : E_2 \to E_1$. Имеет место следующая теорема.

3.2. Теорема. *Пусть м-отображение a^{-1} имеет непрерывное сечение q, а м-отображение F имеет непрерывное сечение r удовлетворяющее условиям:*

1) $q(y_0) = x_0$, $r(x_0) = y_0$;

2) вполне непрерывное отображение $f = r \circ q : E_2 \to E_2$ имеет точку y_0 изолированной неподвижной точкой;

3) индекс $ind(i - f; y_0) \neq 0$.

Тогда

$$\dim(N_{x_0\varepsilon}(a, F)) \geq \dim(a^{-1}(0)) + \dim(F(x_0)),$$

где $N_{x_0\varepsilon}(a, F) = \{x \in N(a, F) \,|\, \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$.

Доказательство. Пусть число n такое, что $0 \leq n \leq \dim(a^{-1}(0))$. Тогда в подпространстве $Ker(a) = \{x \in E_1 \,|\, a(x) = 0\}$ существуют n линейно независимых единичных векторов e_1, e_2, ..., e_n. Рассмотрим пространство $E_3 = E_2 \times R^n$ и многозначное отображение $G : E_3 \to Kv(E_3)$ определенное условием:

$$G(y,u) = \{(z,v) | z \in F(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i),$$
$$v \in R^n, \|v\| \le \eta\},$$

где $u = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Нетрудно заметить, что это многозначное отображение является усиленно вполне непрерывным, и точка (y,u) является неподвижной точкой отображения G, тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1) $u \in R^n, \|u\| \le \eta$;

2) $y = a(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i) \in F(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i)$.

Отображение $g : E_3 \to E_1$, $g(y,u) = q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, является биекцией (см. теорему 2.5).

Рассмотрим сечение многозначного отображения G определенное условием:

$$b(y,u) = (r(q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i), 0).$$

Очевидно, что $b : E_3 \to E_2 \times 0 \subset E_3$. Неподвижными точками этого отображения являются пары $(y,0)$, где точка y является неподвижной точкой отображения $f = r \circ q : E_2 \to E_2$. В силу условий теоремы, точка $(y_0, 0)$ является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля $i - b$, причем, в силу теоремы о сужении, $ind(i - b, (y_0, 0)) = ind(i - f, y_0) \ne 0$.

Пусть U произвольная ограниченная открытая окрестность y_0 в пространстве E_2. Рассмотрим открытое множество $W = U \times U_\eta(0) \subset E_3$, где $U_\eta(0)$ — открытый шар радиуса η в пространстве R^n. Очевидно, что отображение G определено на $\overline{W}$ и удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Следовательно,

$$\dim(N_{(y_0,0),\delta}(i - G, \overline{W})) \ge n + \dim(F(x_0))$$

для любого $\delta > 0$.

Зафиксируем произвольное положительное число ε и покажем, что множество $N_{x_0,\varepsilon}(a,F)$ содержит компакт размерности большей или равной $n + \dim(F(x_0))$.

Так как отображение q непрерывно в точке y_0, то существует такое $\delta > 0$, что $\|q(y_0) - q(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ как только $\|y - y_0\| < \delta$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, что множество $N_{(y_0,0),\delta}(i - G, \overline{W})$ является компактом, а так как отображение $g : N_{(y_0,0),\delta}(i - G, \overline{W})) \to E_1$ является биекцией, то g — гомеоморфизм на область значений. В силу сделанных построений, $g(N_{(y_0,0),\delta}(i - G, \overline{W})) \subset N(a,F)$, причем, если $(y,u) \in N_{(y_0,0),\delta}(i - G, \overline{W}))$, то

$$\|x_0 - g(y,u)\| = \|x_0 - q(y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\| \le$$
$$\le \|q(y_0) - g(y)\| + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le \varepsilon$$

т.е.

$$g(N_{(y_0,0),\delta}(i - G, \overline{W})) \subset N_{(x_0,0),\varepsilon}(a,F).$$

Это включение и доказывает теорему.

Литература

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М: Наука, 1973, 575 с.

2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теориии неподвижных точек многозначных отображений// Успехи математических наук, т. 35, № 1, 1980, с. 59—126.

3. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. — Воронежский госуниверситет, Воронеж, 1986, 102 с.

4. Гельман Б. Д. Топологические свойства множества неподвижных точек многозначных отображений// Математ. сборник, т. 188, № 12, 1997, с. 33—56.

5. Гельман Б. Д. Топологическая размерность множества решений задачи Коши для дифференциальных включений// Вестник ВГУ, серия физика, математика, в. 1, 2000, с. 107—115.

6. Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. Grundlehren math. Wiss. 1984. V. 264, N 14.

7. Augustynovicz A., Dzedzej Z., Gelman B. D. The solutions set to BVP for some functional differential inclusions// Set-Valued Analisis, N 6, 1998, p. 257—263.

8. Dzedzej Z., Gelman B. D. Dimension of solution set for differential inclusions// Demonstratio Math. 1993. V. 26, N 1. p. 149—158.

9. Gel'man B. D. On the structure of the set of solutions for inclusions with multivalued operators// Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, N 1334, p. 60-78.

10. Gel'man B. D. Of topological dimension of a set of solutions of functional inclusions// Differential Inclusions and Optimal Control, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, v. 2, 1998, p. 163—178.

11. Michael E. Continuous selections, I// Ann. of Math. 1956. v. 63, N 2. p. 361—382.

12. Saint Raymond J. Points fixes des multi-applications a valeurs convexes// C. R. Acad. Sci., Paris. 1984. V. 298. p. 71—74.

13. Saint Raymond J. Points fixes des contractions multivoques//Fix. Point Theory and Appl. Pitman Res. Not. In Math. V. 252. p. 359—375.

14. Ricceri B. On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations// C.R. Acad. Sci., Paris, 1997. V. 325, p. 65—70.