УДК 517.912:517.954

МЕТОДЫ НЕПОЛНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

М. Е. Эксаревская

Воронежский государственный университет

Получены оценки элементов LU-разложений матриц, возникающих при дискретизации модельной параболической краевой задачи. Рассматриваются методы неполной блочной факторизации для модельной параболической краевой задачи. Получены оценки, позволяющие судить о точности аппроксимации исходной матрицы матрицей-предобуславливателем.

Методы неполной факторизации, представляя собой важный класс методов решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами, являются одними из наиболее эффективных. Одним из первых систематических изложений современных результатов в данной области является монография [1]. Данная тематика также освещается в [2]-[6]. Эти методы хорошо зарекомендовали себя на практике и легли в основу ряда пакетов прикладных программ [3]. В [1], [2], [4]-[6],[9] проводится теоретический анализ для модельной эллиптической краевой задачи. Методы неполной факторизации для параболических задач рассматриваются в [1], однако, там не анализируется зависимость качества предобуславливателей от структуры допустимого заполнения. Настоящая статья посвящена данному вопросу.

В ней рассматривается разностная аппроксимация модельной параболической краевой задачи. В разделе 1 приводится постановка данной задачи. В разделе 2 для матриц, соответствующих систем линейных алгебраических уравнений получены оценки точных и блочных LU-разложений. Эти оценки являются существенно более точными по сравнению с ранее известными (см. [6] и цитируемую там литературу), в которых явно или неявно присутствует число обусловленности и порядок факторизуемой или обращаемой матрицы, в результате чего именно для LU-разложений они оказываются весьма грубыми. В случае блочных факторизаций полученные в настоящей статье оценки являются двусторонними и асимптотически неулучшаемыми.

В разделах 3 и 4 рассматриваются методы неполной блочной факторизации без диагональной компенсации. Для них получены оценки блоков неполной факторизации, на основе которых в дальнейшем планируется получить оценки числа обусловленности предобусловленной матрицы в зависимости от структуры допустимого заполнения.

1 Постановка задачи

Рассмотрим параболическую краевую задачу

$$Mu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,y),$$
$$t_0 < t \le T < \infty, u|_\Gamma = 0, \qquad (1.1)$$

где $(x,y) \in \Pi : [0,1] \times [0,1]$, Γ - граница Π, $\Delta u \equiv \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ - оператор Лапласа, $f(x,y)$ - непрерывная функция. Введем дискретизацию единичного квадрата Π по пространственным переменным $0 = x_0 < ... < x_{n+1} = 1, 0 = y_0 < ... < y_{n+1} = 1, x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i = h = 1/(n+1)$, где $n \ge 4$ - натуральное число. Дискретизируя третью переменную $t_{k+1} = t_k + \tau,\ \ k = 1, 2, \ldots$ (τ - временной шаг), введем обозначения $u^k_{i,j} = u(x_i, y_j, t_k)$. Аппроксимируя производную по времени разностью первого порядка, возьмем аппроксимацию оператора Лапласа на k-м и $k+1$-м временных шагах с соответствующими весовыми коэффициентами:

$$\frac{u^k_{i,j} - u^{k-1}_{i,j}}{\tau} =$$
$$= \theta\left(\frac{-u^{k+1}_{i-1,j} - u^{k+1}_{i,j-1} + 4u^{k+1}_{i,j} - u^{k+1}_{i+1,j} - u^{k+1}_{i,j+1}}{h^2}\right) +$$
$$+ (1-\theta)\left(\frac{-u^k_{i-1,j} - u^k_{i,j-1} + 4u^k_{i,j} - u^k_{i+1,j} - u^n_{i,j+1}}{h^2}\right) +$$
$$+ f_{i,j},\ 0 \le \theta \le 1.$$

Линейно перенумеровав внутренние узлы сеточной функции:

$$u_{11} = u_1, \cdots, u_{n1} = u_n, u_{12} = \tag{1.2}$$

$$= u_{n+1}, \cdots, u_{1n} = u_{n(n-1)} \cdots, u_{nn} = u_{n^2}$$

и умножив каждое разностное уравнение на τ, получим дискретный аналог исходной дифференциальной задачи

$$u^{k+1} - u^k = -\frac{\tau}{h^2}\times \tag{1.3}$$

$$\times\left\{A\left[\theta u^{k+1} + (1-\theta)u^k\right] + f^k\right\}.$$

Здесь $u^k = \left\{u^k_{i,j}\right\}$ - вектор решения на k-м временном шаге, матрица A имеет вид

$$A = tridiag\{-D_i, E_i, -F_i\}, \tag{1.4}$$

где через $tridiag\{-D_p, E_p, -F_p\}, 1 \le p \le n$ обозначена блочно-трехдиагональная матрица (блоки D_1 и F_n отсутствуют), E_i, D_i, F_i -квадратные матрицы порядка $n, F_i = D_i = I, I$ - единичная матрица. A является симметричной M-матрицей. Параметр $0 \le \theta \le 1$ характеризует тип аппроксимации уравнения (1.1) по времени. Мы будем рассматривать $\theta = 1$, что соответствует чисто неявной схеме со свойством повышенной устойчисвости. Тогда на каждом k-м шаге по времени необходимо решать с.л.а.у. $BU = F$, где

$$B = \theta A + \frac{h^2}{\tau}I = tridiag\left\{-\theta D, \frac{h^2}{\tau}I + \theta E, -\theta F\right\} =$$

$$= H - D - F,\ H = \frac{h^2}{\tau}I + E, \tag{1.5}$$

$$U = u^{k+1},\ F = f^k + \frac{h^2}{\tau}(1-\theta)Au^k = f^k.$$

Матрица B является симметричной M-матрицей со строгим диагональным преобладанием, усиливающемся с ростом отношения $\frac{h^2}{\tau}$.

Обозначим через $C_1, C_2, \ldots$ положительные константы, не зависящие от номера n. Если для γ имеют место оценки $|\gamma| \le C|\beta|$, то будем писать $\gamma = O(\beta)$, а если $0 < C_1|\beta| \le |\gamma| \le C_2|\beta|$ - то $\gamma = O^*(\beta)$.

Рассмотрим две факторизации матрицы B: обычную факторизаицию Холецкого $B = LL^T$, где $L = \{l_{ij}\}, l_{ij} = 0, j > i$, и блочную факторизацию (см. [1],[10])

$$B = (D+G)G^{-1}(G+F), \tag{1.6}$$

$$G = diag\{G_1, \ldots, G_n\}, D = tridiag\{-D_i, 0, 0\}, \tag{1.7}$$

$$F = tridiag\{0, 0, -F_i\}$$

где $(n\times n)$ -матрицы G_i определяются с помощью метода матричной прогонки (см. [7])

$$G_1 = H_1, G_{s+1} = H_{s+1} - D_{s+1}G_s^{-1}F_s, \tag{1.8}$$

$$s = 1, 2, ..., n-1$$

Пусть

$$L = tridiag\{L_{pp-1}, L_{pp}, 0\}, 1 \le p \le n \tag{1.9}$$

где $L_{ps} = \{l^{ps}_{ij}\}$ - квадратные $(n \times n)$ матрицы, L_{ss-1} - верхнетреугольные, L_{ss} - нижнетреугольные матрицы.

2 Оценки элементов LU-факторизаций

Теорема 1. В разложении $A = LL^T$ для элементов матриц L_{ps} справедливы оценки

$$|l^{ps}_{ij}| \le C\frac{(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}})^{|i-j|}}{(1+|i-j|)^2}, \tag{2.1}$$

причем C не зависит от i, j, p, s.

Теорема 2. В разложении (1.6)-(1.7) для элементов матриц $G_s = \{g_{ij,s}\}$ и $G_s^{-1} = \{g^{(-1)}_{ij,s}\}$ справедливы следующие оценки

$$\begin{aligned} |g_{ij,s}| &\le C\frac{(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}})^{|i-j|}}{(1+|i-j|)^2}, \\ |g^{(-1)}_{ij,s}| &\le C\frac{(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}})^{|i-j|}}{(1+|i-j|)^2}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

а также более точные формулы

$$g_{ij,s}^{(-1)} = \begin{cases} O^*(1)\left[\gamma^{|i-j|}\dfrac{\left(1-\frac{r_s}{s+1}\right)^{|i-j|}}{(1+|i-j|)^2}+\right. \\ \left.+\gamma^{i+j}\dfrac{\left(1-\frac{r_s}{s+1}\right)^{i+j}}{(1+i+j)^2}\right], \\ 1\le i,j\le 3n/4 \\ O^*(1)\left[\gamma^{|i-j|}\dfrac{\left(1-\frac{r_s}{s+1}\right)^{|i-j|}}{(1+|i-j|)^2}+\right. \\ +\gamma^{2(n+1)-i-j}\times \\ \left.\times\dfrac{\left(1-\frac{r_s}{s+1}\right)^{2(n+1)-i-j}}{(1+2(n+1)-i-j)^2}\right], \\ n/4\le i,j\le n, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\gamma = \left(1-\dfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)$, $r_s = r_s(i,j) = O^*(1)$.

Доказательство теоремы 2. В начале мы докажем оценки (2.3). Пусть $B_{(p)} = \{b_{ij}\}, 1 \le i,j \le p$. Пусть $p = qn, 1 \le q \le n$. Тогда из (1.6) мы имеем $B_{(p)} = (D+G)_{(p)}G^{-1}_{(p)}(G+F)_{(p)} = (DG^{-1}+I)_{(p)}(G+F)_{(p)}$, и $B^{-1}_{(p)} = (G+F)^{-1}_{(p)}(DG^{-1}+I)^{-1}_{(p)}$. Разобьем все матрицы в последнем равенстве на блоки размера $n\times n$ аналогично (1.4),(1.5),(1.7),(1.9). Тогда для блок - строки с номером q имеем

$$G_q^{-1} = (B^{-1}_{(p)})_{qq}, \tag{2.4}$$

где $(B^{-1}_{(p)})_{qq}$ - q-й блок размера $n\times n$ на главной блок- диагонали матрицы $B^{-1}_{(p)}$. Нам необходимо оценить этот блок. В соотношении $B_{(p)})B^{-1}_{(p)} = I$ обозначим $B^{-1}_{(p)})$ за X и для нахождения его блочных элементов воспользуемся методом Гаусса. В результате получим, что $(B^{-1}_{(p)})_{qq} = (B^{-1}_{(p)})_{11}$. Поэтому достаточно изучить блок $(B^{-1}_{(p)})_{11}$. Имеем

$$B_{(p)} = U^T\Lambda U, B^{-1}_{(p)} = U^T\Lambda^{-1}U, \tag{2.5}$$

где U - матрица ортонормированных собственных векторов, Λ - диагональная матрица собственных значений. Из (1.5) и спектральных свойств матриц видно, что собственные значения λ_q матрицы B связаны с собственными значениями $\lambda_q^{(A)}$ оператора Δ_h на прямоугольнике $[0,1]\times[0,(q+1)/(n+1)]$ с квадратным разбиением простым соотношением

$$\lambda_q = \frac{h^2}{\tau} + \theta\lambda_q^{(A)} \tag{2.6}$$

а собственные векторы у матрицы B те же. Для оператора Δ_h собственные значения и собственные векторы известны [7]. Собственные векторы имеют вид

$$\begin{gathered} e_{(ij)} = e_{ij} = [2/\sqrt{(n+1)(q+1)}]\times \\ \times\left\{\sin\tfrac{i\pi}{q+1}f_j, \sin\tfrac{2i\pi}{q+1}f_j,\dots,\sin\tfrac{qi\pi}{q+1}f_j\right\}^T, \\ f_j = (\sin\tfrac{\pi j}{n+1}, \sin\tfrac{2\pi j}{n+1},\dots,\sin\tfrac{n\pi j}{n+1}), \\ 1\le i\le q,\ 1\le j\le n. \end{gathered} \tag{2.7}$$

С учетом (2.6) и выражения для собственных значений опреатора Δ_h [7] собственные значения матрицы $B^{(p)}$ будут иметь вид

$$\begin{gathered} \lambda_{lm} = \frac{h^2}{\tau} + \lambda_l^{(1)} + \lambda_m^{(2)}, \\ \lambda_l^{(1)} = 4\sin^2(\pi l/(2(n+1))), \\ \lambda_m^{(2)} = 4\sin^2(\pi m/(2(q+1))), \\ 1\le m\le q,\ 1\le l\le n. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Разобьем матрицы в (2.5) на блоки размера $n\times n$. Нас интересует лишь первая блок-строка. Изучим в ней ν-е слагаемое:

$$\begin{gathered} U^T_{1\nu}\Lambda^{-1}_\nu U_{1\nu} = \frac{2}{q+1}\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}\widetilde{U}^T diag\{ \\ (\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\nu^{(2)}+\lambda_1^{(1)})^{-1}, (\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\nu^{(2)}+\lambda_2^{(1)})^{-1},\dots \\ \dots,(\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\nu^{(2)}+\lambda_n^{(1)})^{-1}\}\widetilde{U} = \\ = \frac{2}{q+1}\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}[\widetilde{U}diag\{(\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\nu^{(2)}+\lambda_1^{(1)}), \\ (\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\nu^{(2)}+\lambda_2^{(1)}),\dots,(\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\nu^{(2)}+\lambda_n^{(1)})\}\widetilde{U}]^{-1} = \\ = \frac{2}{q+1}\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}[tridiag\{-1, 2+\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\mu^{(2)}, -1\}]^{-1}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Пусть $(tridiag\{-1,\ 2+\frac{h^2}{\tau}+\lambda_\mu^{(2)},\ -1\})^{-1} = N_\nu = \{n_{ij,\nu}\}$. Вычисляя N_ν как функцию Грина разностного оператора получаем, что

$$n_{ij,\nu} = \beta\begin{cases} (1-\mu_\nu^{2i})(1-\mu_\nu^{2(n+1-j)})\mu_\nu^{j-i},\ j\ge i, \\ (1-\mu_\nu^{2(n+1-i)})(1-\mu_\nu^{2j})\mu_\nu^{i-j},\ j<i, \end{cases} \tag{2.10}$$

где

$$\beta = \frac{\mu_\nu}{(1-\mu_\nu^2)(1-\mu_\nu^{2(n+1)})}\,, \qquad (2.11)$$

$$\mu_\nu = 1 + \frac{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}}{2} - \sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)} + \left(\frac{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}}{2}\right)^2},$$

$$\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)} = \lambda_\nu^{(2)} + \frac{h^2}{\tau}. \qquad (2.12)$$

Замечание 1. Имеют место оценки

$$1 - \tilde{C}_1\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}} \le \mu_\nu \le 1 - \tilde{C}_2\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}}, \qquad (2.13)$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{2}{\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}} + \sqrt{\frac{h^2}{\tau}}},\ \tilde{C}_2 = \frac{2}{\sqrt{8+\frac{h^2}{\tau}} + \sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}},$$

где $\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}$ определяется согласно (2.12). Действительно, пусть $g(\lambda) = [\sqrt{\widetilde{\lambda} + (\widetilde{\lambda}/2)^2} - \widetilde{\lambda}/2]/\sqrt{\widetilde{\lambda}}$. Тогда $g(\lambda)$ убывает монотонно для $\lambda \in [\frac{h^2}{\tau}, 4 + \frac{h^2}{\tau}]$, $g(\frac{h^2}{\tau}) = \frac{\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}} - \sqrt{\frac{h^2}{\tau}}}{2}$, $g(4+\frac{h^2}{\tau}) = \frac{\sqrt{8+\frac{h^2}{\tau}} - \sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}}{2}$. Это доказывает (2.13).

Пусть $1 \le i, j \le 3n/4$. Преобразуем (2.10):

$$n_{ij,\nu} = \beta\left\{\begin{array}{l}(\mu_\nu^{j-i} - \mu_\nu^{j+i})O^*(1),\ j \ge i\\ (\mu_\nu^{i-j} - \mu_\nu^{i+j})O^*(1),\ j < i\end{array}\right. =$$

$$= O^*(\beta(\mu_\nu^{|i-j|} - \mu_\nu^{i+j})). \qquad (2.14)$$

Далее из (2.11)

$$\beta = \frac{\mu_\nu}{(1-\mu_\nu^2)O^*(1)} = O^*\left(\frac{\mu_\nu}{1-\mu_\nu^2}\right), \qquad (2.15)$$

и учитывая (2.12) имеем

$$\frac{\mu_\nu}{1-\mu_\nu^2} = \frac{\mu_\nu}{(1-\mu_\nu)O^*(1)} =$$

$$= \frac{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}}{(\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)} + (\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}/2)^2} + (\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}/2)^2)O^*(1)}, \qquad (2.16)$$

где $\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)} \in (0, 4]$. Оценим знаменатель в правой части (2.16):

$$\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)} + (\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}/2)^2} + (\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}/2)^2 \le \sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)} + \widehat{C_1}\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}} +$$

$$+ \widehat{C_2}\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}} = \widehat{C}\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}}. \qquad (2.17)$$

С учетом (2.14)-(2.17) получим:

$$n_{ij,\nu} = O^*((1/\sqrt{\widetilde{\lambda}_\nu^{(2)}})(\mu_\nu^{|i-j|} - \mu_\nu^{i+j})),$$

$$1 \le i, j \le 3n/4.$$

Из этой формулы и (2.4), (2.8), (2.9), (2.13) следует, что

$$g_{ij,q}^{-1} = O^*\Bigg(\frac{2}{q+1}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi\nu}{2(q+1)} + \frac{h^2}{\tau}}} \times$$
$$\times\Big[(1 - C(\sqrt{4\sin^2\tfrac{\pi\nu}{2(q+1)} + \tfrac{h^2}{\tau}}))^{|i-j|} -$$
$$- (1 - C(\sqrt{4\sin^2\tfrac{\pi\nu}{2(q+1)} + \tfrac{h^2}{\tau}}))^{|i+j|}\Big]\Bigg), \qquad (2.18)$$

где $C \in \left[\frac{2}{\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}} + \sqrt{\frac{h^2}{\tau}}}, \frac{2}{\sqrt{8+\frac{h^2}{\tau}} + \sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}}\right]$. Далее заметим, что сумма

$$\frac{1}{q+1}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi\nu}{2(q+1)} + \frac{h^2}{\tau}}} \times$$

$$\times\left(1 - 2C\sqrt{\sin^2\frac{\pi\nu}{2(q+1)} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m$$

есть частичная сумма для интеграла

$$J_m = \int\limits_{1/(q+1)}^{1}\left(\frac{\sin^2\pi x}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{h^2}{\tau}}}\right) \times$$

$$\times\left(1 - 2C\sqrt{\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m dx \qquad (2.19)$$

Разобъем этот интеграл на два интеграла $J_m = J_{m,1} + J_{m,2}$. Оценим первый интеграл, учитывая что $\sin\pi x \le \pi x$:

$$J_{m,1} = \int\limits_{1/(q+1)}^{h/\sqrt{\tau}}\left(\frac{\sin^2\pi x}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{h^2}{\tau}}}\right) \times$$

$$\times\left(1 - 2C\sqrt{\sin^2\frac{\pi x}{2} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m dx =$$

$$= O^*\left(\frac{\sqrt{\tau}}{h}\left(1 - C\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m \int\limits_{1/(q+1)}^{h/\sqrt{\tau}}\sin^2\pi x\,dx\right) =$$

$$= O^*\left(\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^2\left(1 - C\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m\right), \qquad (2.20)$$

причем $\frac{h}{\sqrt{\tau}} \ge \frac{2}{q+1}$.

Рассмотрим второй интеграл

$$J_{m,2} = \int\limits_{h/\sqrt{\tau}}^{1} \frac{\sin^2 \pi x}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\pi x}{2} + \frac{h^2}{\tau}}} \times$$

$$\times \left(1 - 2C\sqrt{\sin^2 \frac{\pi x}{2} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m dx =$$

$$= O^* \left(\int\limits_{h/\sqrt{\tau}}^{1} \frac{\sin^2 \pi x}{2\sin \frac{\pi x}{2}} \left(1 - 2C \sin \frac{\pi x}{2}\right)^m dx \right).$$

Пусть $\sin(\pi x/2) = y$. Тогда, интегрируя последний интеграл по частям и учитывая, что $\cos^2 \frac{\pi x}{2} = O^*(1)$, имеем

$$J_{m,2} = O^* \left(\int\limits_{h/\sqrt{\tau}}^{1} \frac{4\sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2}}{2\sin \frac{\pi x}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - 2C \sin \frac{\pi x}{2}\right)^m dx \right) =$$

$$= O^* \left(\frac{4}{\pi} \int\limits_{\sin \frac{\pi h/\sqrt{\tau}}{2}}^{1} y(1 - 2Cy)^m dy \right) =$$

$$= O^* \left(\frac{4}{\pi C(m+1)} \frac{h}{\sqrt{\tau}} \left[\left(1 - C\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{m+1} - \right.\right.$$

$$\left. - (1 - C)^{m+1} \right] + \frac{4}{\pi C^2(m+1)(m+2)} \times$$

$$\left. \times \left[\left(1 - C\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{m+2} - (1 - C)^{m+2} \right] \right)$$

Поскольку $J_{m,2} = J_{m,2}(C)$ убывает монотонно для $C \in \left[\frac{2}{\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}+\sqrt{\frac{h^2}{\tau}}}, \frac{2}{\sqrt{8+\frac{h^2}{\tau}}+\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}} \right]$, то окончательно получаем:

$$J_{m,2} = O^* \left(\frac{1}{m^2} \left(1 - \widetilde{C}\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{m+2} \right). \qquad (2.21)$$

Из формул (2.20) и (2.21) следует, что

$$J_m = O^* \left(\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^2 \left(1 - C\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m \right) +$$

$$+ O^* \left(\frac{1}{m^2} \left(1 - \widetilde{C}\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{m+2} \right). \qquad (2.22)$$

С помощью мажорантных оценок типа признака Коши-Маклорена получаем, что

$$\frac{1}{q+1} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\sin^2 \frac{\pi\nu}{q+1}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\pi\nu}{2(q+1)} + \frac{h^2}{\tau}}} \times$$

$$\times \left(1 - 2C\sqrt{\sin^2 \frac{\pi\nu}{2(q+1)} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m =$$

$$= \begin{cases} O^*(J_m), \ m \le q \\ \frac{1}{q+1} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{q+1}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\pi}{2(q+1)} + \frac{h^2}{\tau}}} \times \\ \times \left(1 - 2C\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2(q+1)} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m + \\ + |O(J_m)|, \ m > q \end{cases} \qquad (2.23)$$

Оценим в случае $m > q$ первое слагаемое:

$$\frac{1}{q+1} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{q+1}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\pi}{2(q+1)} + \frac{h^2}{\tau}}} \times$$

$$\times \left(1 - 2C\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2(q+1)} + \frac{h^2}{4\tau}}\right)^m =$$

$$= O^* \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{q+1}}{(q+1)h/\sqrt{\tau}} \left(1 - C_0\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m \right) \qquad (2.24)$$

Таким образом, при $m > q$ из формул (2.22) и (2.24) мы имеем для некоторого $\widehat{C} \in \left[\frac{2}{\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}+\sqrt{\frac{h^2}{\tau}}}, \frac{2}{\sqrt{8+\frac{h^2}{\tau}}+\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}} \right]$

$$J_m = O^* \left(\frac{\sin^2 \frac{\pi}{q+1}}{(q+1)h/\sqrt{\tau}} \left(1 - C_0\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m \right) =$$

$$= \left(1 - \widehat{C}\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m \times$$

$$\times O^* \left(\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^2 + \frac{1}{(q+1)^3 h/\sqrt{\tau}} + \frac{1}{m^2} \right) \qquad (2.25)$$

Воспользуемся неравенством, вытекающим при получении формулы (2.20) $\frac{h}{\sqrt{\tau}} \ge \frac{2}{q+1}$, тогда

$$\frac{1}{(q+1)^3 h/\sqrt{\tau}} \le \frac{h^2}{\tau}\left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^3 \qquad (2.26)$$

Замечание 2. Для интегралов (2.20) и (2.21) имеет место следующее неравенство

$$J_{m,1} \le CJ_{m,2} \qquad (2.27)$$

Действительно, пусть $f(x) = x^2\left(1-\widetilde{C}x\right)^{m/2}$, где $x>0$. Тогда наша задача сводится к доказательству неравенства

$$x^2\left(1-\widetilde{C}x\right)^{m/2} \le \frac{\widehat{C}}{m^2}$$

Для этого найдем максимум функции $f(x)$. Он существует и равен $x^* = \dfrac{1}{\widehat{C}\,(1+m/2)}$. Это доказывает (2.27).

С учетом формул (2.26) и (2.27) интеграл J_m принимает вид

$$J_m = O^*\left(\left(1-\widehat{C}\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^m / m^2\right), \qquad (2.28)$$

где $\widehat{C} \in \left[\frac{2}{\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}+\sqrt{\frac{h^2}{\tau}}}, \frac{2}{\sqrt{8+\frac{h^2}{\tau}}+\sqrt{4+\frac{h^2}{\tau}}}\right]$. Если мы положим здесь $m=|i-j|$ или $m=|i+j|$, то из (2.18) получим формулы (2.3) для $1\le i,j\le 3n/4$. Доказательство для остальных i,j аналогично. Также отметим, что ограничения на i,j в (2.3) были необходимы только для точных двусторонних оценок. Оценки сверху доказываются одинаково для всех i,j, и мы получаем формулу (2.2). Теорема 2 доказана.

Следствие. Из формулы (2.3) видно, что для параболической краевой задачи при $|i-j| \ge O\left(\dfrac{\sqrt{\tau}}{h}\right)$ метод неполной факторизации будет характеризоваться лучшей скоростью сходимости, чем для модельной эллиптической краевой задачи [9].

Замечание 3. Для элементов матриц G_q^{-1} имеют место неравенства

$$\begin{cases} 0 < g_{ij}^{-1} \le g_{i+1j+1}^{-1}, & i+j < n+1 \\ g_{ij}^{-1} \ge g_{i+1j+1}^{-1} > 0, & i+j \ge n+1 \end{cases}$$

А для строчных сумм σ_{iq} элементов i-й строки матрицы G_q имеем:

$$\begin{cases} \sigma_{iq} \le \sigma_{i+1q}, & 1 \le i \le [n/2] \\ \sigma_{iq} \ge \sigma_{i+1q}, & [n/2]+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Действительно, элементы и строчные суммы матриц N_ν удовлетворяют подобным оценкам (см. (2.13)), а матрицы G_q^{-1} есть линейные комбинации матриц N_ν с положительными коэффициентами.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим формулу (1.9). Из (1.6) и (1.7) мы получаем $L=(G+D)(diag\left\{L_{11}^T,\ldots,L_{nn}^T\right\})^{-1}$. Перемножая $(G+D)$ и $(diag\left\{L_{11}^T,\ldots,L_{nn}^T\right\})^{-1}$, и учитывая, что $G_s = L_{ss}^T, |g_{ij,s}| \le C(1-h/\sqrt{\tau})^{|i-j|}/(1+|i-j|)^2, ||G_s^{-1}||_p \le C,\ 1\le p\le\infty$, из формулы (2.2) получаем для элементов L_{ss}^{-1} оценки типа (2.1). Теорема 1 доказана.

3 Метод неполной блочной факторизации без диагональной компенсации

Рассмотрим неполную блочную факторизацию матрицы A. Пусть $k\in[1,[n/4]+1]$. Тогда неполная блочная факторизация

$$\widehat{A} = (D+\widehat{G})\widehat{G}^{-1}(\widehat{G}+F), \qquad (3.1)$$

где $\widehat{G} = diag\{\widehat{G}_1,\ldots,\widehat{G}_n\}$, D и F - матрицы (1.7), а $\widehat{G}_i$ определяются формулами

$$\widehat{G}_1 = E_1, \widehat{G}_{i+1} = E_{i+1} - D_{i+1}(\widehat{G}_i^{-1})^{(k)}F_i, \quad i=1,2,\ldots,n-1, \qquad (3.2)$$

где символ (k) означает взятие $(2k+1)$-диагональной части матрицы, т.е. если $B=\{b_{ij}\}$, то $B^{(k)} = \{b_{ij,k}\}$, где $b_{ij,k} = b_{ij}$ для $|i-j|\le k$, $b_{ij,k}=0$ для $|i-j|>k$.

4 Оценки матриц $\widehat{G}_\nu$ в методе неполной блочной факторизации

Теорема 3. Пусть $\Delta G_i = \widehat{G}_i^{-1} - (\widehat{G}_i^{-1})^{(k)}$, где $\widehat{G}_i$ - матрица (3.2). Тогда справедливы оценки

$$||\Delta G_i||_p \le \frac{C}{k^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1}\ln\frac{\sqrt{\tau}}{h},\ 1\le p\le\infty. \qquad (4.1)$$

Доказательство теоремы 3. Имеем $\Delta G_i = \widehat{G}_i^{-1}(I-\widehat{G}_i(\widehat{G}_i^{-1})^{(k)})$. Пусть q_{sj} - элементы матрицы $\widehat{G}_i(\widehat{G}_i^{-1})^{(k)}$. Тогда $q_{ss}=1;\ q_{sj}=0$ для $|s-j|>2k$.

Далее из теоремы 1 и замечания получим оценки для q_sj. Рассмотрим два случая.

Пусть $1\le|s-j|\le k$. Для определенности возьмем $s<j$. Тогда

$$|q_{sj}| \le \sum_{\nu=s-k}^{j-k}|g_{s\nu}||g_{\nu j}| \le C\sum_{\nu=s-k}^{j-k}\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{s-\nu}\times$$

$$\times\frac{1}{(s-\nu+1)^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{j-\nu}\frac{1}{(j-\nu+1)^2}\le$$

$$\le\frac{C}{k^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{s-j+2k}\sum_{\nu=s-k}^{j-k}\tfrac{1}{(s-\nu+1)^2}\le$$

$$\le\frac{C}{k^2}\,\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{|s-j|+2k}}{k+1-|s-j|}. \qquad (4.2)$$

Пусть $k+1\le|s-j|\le 2k$. Тогда в случае $s<j$ имеем

$$|q_{sj}|\le\sum_{\nu=s+k+1}^{j+k+1}|g_{s\nu}||g_{\nu j}|\le C\sum_{\nu=s+k+1}^{j+k+1}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{\nu-s}\times$$

$$\times\frac{1}{(\nu-s+1)^2}\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{\nu-j}\frac{1}{(\nu-j+1)^2}\le$$

$$\le\tfrac{C}{k^2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{j-s+2k+2}\tfrac{1}{|s-j|+k+2}\le$$

$$\le\frac{C}{k^2}\,\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{|s-j|+2k+2}}{|s-j|+k+2}. \qquad (4.3)$$

Окончательно из (4.2) и (4.3) имеем

$$|q_{sj}|\le C\begin{cases}\frac{C}{k^2}\,\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{|s-j|+2k}}{k+1-|s-j|}, & 1\le|s-j|\le k\\[2mm] \frac{C}{k^2}\,\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{|s-j|+2k+2}}{|s-j|+k+2}, & k+1\le|s-j|\le 2k\end{cases} \qquad (4.4)$$

Поэтому

$$||I-\widehat{G}_i(\widehat{G}_i^{-1})^{(k)}||_p\le$$

$$\le\tfrac{C}{k^2}\sum_{j:1\le|s-j|\le k}\tfrac{1}{k+1-|s-j|}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{|s-j|+2k}+$$

$$+\tfrac{C}{k^2}\sum_{j:k+1\le|s-j|\le 2k}\tfrac{1}{|s-j|+k+2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{|s-j|+2k+2}. \qquad (4.5)$$

Обозначим первое слагаемое через $\widehat{\Sigma}_1$, а второе - через $\widehat{\Sigma}_2$. Пусть $l=|s-j|$. Тогда

$$\widehat{\Sigma}_1=\tfrac{C}{k^2}\sum_{l=1}^{k}\tfrac{1}{k+1-l}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{l+2k}\le$$

$$\le\tfrac{C}{k^2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{3k+1}\sum_{l=1}^{k}\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{-(l-k-1)}}{k+1-l}.$$

Сделаем замену $m=l-k-1$. Тогда

$$\widehat{\Sigma}_1\le\tfrac{C}{k^2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{3k+1}\sum_{m=1}^{k}\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{-m}}{m}. \qquad (4.6)$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\widehat{\Sigma}_2=\tfrac{C}{k^2}\sum_{l=k+1}^{2k}\tfrac{1}{l+k+2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{l+2k+2}\le$$

$$\le\tfrac{C}{k^2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k}\sum_{l=k+1}^{2k}\tfrac{1}{l+k+2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{l+k+2}$$

Обозначив через $r=l+k+2$, имеем

$$\widehat{\Sigma}_2\le\tfrac{C}{k^2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k}\sum_{r=1}^{k}\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{r}}{r}. \qquad (4.7)$$

Предположим $(1-h/\sqrt{\tau})=e^{-\alpha}$. Тогда

$$\sum_{r=1}^{k}\frac{\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{r}}{r}=\sum_{r=1}^{k}\frac{e^{-\alpha r}}{r}=\Sigma$$

Разобъем эту сумму на отрезки

$$\Sigma=\sum_{r=1}^{[1/\alpha]}+\sum_{r=[1/\alpha]+1}^{2[1/\alpha]}+\ldots+\sum_{r=p[1/\alpha]+1}^{k}=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2+\ldots+\Sigma_p,\ k>[1/\alpha]\,.$$

Оценим

$$\Sigma_1\le e^{-\alpha}\sum_{r=1}^{[1/\alpha]}\tfrac{1}{r}\sim e^{-\alpha}\ln\tfrac{1}{\alpha},\ \Sigma_2\le$$

$$\le e^{-1}\sum_{r=[1/\alpha]+1}^{[2/\alpha]}\tfrac{1}{r}\sim e^{-1}\ln 2,\ldots,$$

$$\Sigma_s\le e^{-s+1}\sum_{r=[s-1/\alpha]+1}^{[s/\alpha]}\tfrac{1}{r}\sim e^{-s+1}\ln\tfrac{s}{s-1},\ldots$$

Отсюда окончательно получим

$$\Sigma\le e^{-\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}=\left(1-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)\ln\frac{\sqrt{\tau}}{h}.$$

Тогда

$$\widehat{\Sigma}_2\le\tfrac{C}{k^2}\left(1-\tfrac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1}\ln\tfrac{\sqrt{\tau}}{h} \qquad (4.8)$$

Сумма $\widehat{\Sigma}_1$ оценивается аналогично. Таким образом, (4.7) оценивается как

$$||I - \widehat{G}_i(\widehat{G}_i^{-1})^{(k)}||_p \leq \frac{C}{k^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1} \ln\frac{\sqrt{\tau}}{h}$$

Поскольку $||\widehat{G}_i^{-1}||_p \leq C$, то получаем оценки (4.3) для $p = 1, \infty$. Для других $p \in (1, \infty)$ эти оценки следуют из интерполяционных теорем [8]. Теорема 3 доказана.

Следствие. Для матриц $B = (D + G)G^{-1}(G + F)$ и $\widehat{B} = (D + \widehat{G})\widehat{G}^{-1}(\widehat{G} + F)$ имеют место оценки

$$||B - \widehat{B}||_2 \leq \frac{C}{k^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{k+1} \ln\frac{\sqrt{\tau}}{h}. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Из определения $\widehat{G} = diag\{\widehat{G}_i\}$ имеем $\widehat{B} - B = diag\{\Delta G_i\}$, откуда с учетом (4.3) следует (4.9).

Список литературы

1. Ильин В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. — М.: Наука, 1995.

2. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.

3. Эстербю О., Златев З. Прямые методы для разреженных матриц. — М.:Мир, 1987.

4. Блатов И. А. Об оценках элементов обратных матриц и о модификациях метода матричной прогонки // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33. № 2. С. 10—21.

6. Блатов И. А. О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами // Журн.вычисл.матем. и матем.физики. 1993. Т. 33. № 7. С. 819—836.

6. Meurant G. A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices // SIAM J. Matrix. Analys. and Appl. 1992. V. 13. № 3.

7. Самарский А. А., Николаев Е. Н. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

8. Берг Дж., Лефстрем Дж. Интерполяционные пространства. — М.: Мир, 1980.

9. Блатов И. А. Об оценках *LU*-разложений разреженных матриц и их приложениях к методам неполной факторизации //Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1997. Т.37. N 3. С.259-276.

10. Ильин В. П. О скорости сходимости неявных методов неполной факторизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1993. Т. 33. № 1. С. 3—11.