УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2001 г. Е. Ю. Дробченко, Р. В. Нестеренко, Б. Н. Садовский

Воронежский государственный университет

Рассматривается двумерная система дифференциальных уравнений в многограннике: $\dot{x} = \tau_{x,M} f(x)$. Здесь M — выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^2$ и $\tau_{x,M} f(x)$ — проекция точки $f(x)$ на $T_x(M)$ — касательный конус к M в точке $x \in M$. Получено достаточное условие асимптотической устойчивости положения равновесия данной системы.

1. Введение

Рассматривается выпуклый многогранник $M \subset \mathbf{R}^2$ и точка $x^* \in \partial M$. Обозначим через $T_x(M)$ касательный конус к M в точке $x \in M$ ([1], с.109) и через $\tau_{x,M}\ y$ – проекцию точки y на $T_x(M)$. Положим $K = T_{x^*}(M)$ и $\tau_x y = \tau_{x,K}\ y$. Обозначим через k_1, k_2 единичные направляющие векторы конуса K, расположенные таким образом, что угол поворота от k_1 до k_2 по часовой стрелке равен $\omega \in (0, \pi)$. Рассматривается уравнение

$$\dot{x} = \tau_{x,M} f(x). \tag{1}$$

Здесь $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in M$ — значение в момент $t \in \mathbf{R}$ неизвестной функции; функция $f : M \longrightarrow \mathbf{R}^2$ непрерывна.

2. Основной результат

Теорема. *Пусть точка x^* является положением равновесия системы (1), т.е. $\tau_{x^*} f(x^*) = 0$, и существует производная $f'(x^*) = A$. Пусть нелинейный оператор*

$$Bx = \tau_x Ax \tag{2}$$

не имеет в конусе K собственных векторов с неотрицательными собственными значениями:

$$x \in K \ \wedge \ x \neq \theta \ \wedge \ Bx = \lambda x \implies \lambda < 0. \tag{3}$$

Тогда положение равновесия x^* асимптотически устойчиво.

При доказательстве теоремы будем считать, что $x^* = 0$, что, очевидно, не ограничивает общности. Определим оператор $Cx = (-x_2, x_1)$, где $x = (x_1, x_2)$. Заметим, что $(Cx, x) = 0$ и что $(Ax, Cx) = 0$ тогда и только тогда, когда x – собственный вектор матрицы A либо нулевой вектор. Выберем окрестность $U_\delta(0)$ точки 0 радиуса $\delta > 0$ таким образом, чтобы для всех $x \in U_\delta(0)$ было $\tau_{x,M}\ y = \tau_{x,K}\ y = \tau_x y$. В ходе доказательства на выбор δ будут наложены дополнительные условия. Сформулированная теорема непосредственно вытекает из следующих трёх лемм, в которых дополнительно к условиям теоремы на оператор A накладываются те или иные ограничения.

Лемма 1. *Пусть оператор A не имеет в конусе K собственных векторов. Тогда положение равновесия системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Лемма 2. *Пусть оператор A имеет в конусе K собственный вектор и все собственные значения A отрицательны. Тогда положение равновесия системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Лемма 3. *Пусть оператор A имеет в конусе K собственный вектор и не все собственные значения A отрицательны. Тогда положение равновесия системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

3. Приложение

Приведем доказательство сформулированных лемм.

Доказательство Леммы 1. Определим функцию $W(x) = \dfrac{1}{\|x\|^2}(Ax, Cx)$. Тогда $W(x) \neq 0$ для всех $x \in K \setminus \{0\}$. Предположим для определенности, что $W(x) > 0$, тогда нетрудно проверить, что $W(x) \geq m$ при $x \in K \setminus \{0\}$, где $m = \min\limits_{\|x\|=1} W(x) > 0$.

Рассмотрим функцию $V(x)$ – минимальный угол поворота от вектора k_1 до вектора x; $V(x) > 0$, если поворот происходит по часовой стрелке и $V(x) < 0$ в противном случае. Данная функция определена на множестве $\mathbf{R}^2 \backslash \mathrm{con}\{-k_1\}$. Градиент данной функции равен

$$\mathrm{grad}\, V(x) = -\frac{1}{\|x\|^2} Cx. \qquad (4)$$

Рассмотрим множество точек $S = U_\delta(0) \cap K \setminus \mathrm{con}\,\{k_1\}$. Очевидно, на нем $\tau_x f(x) = f(x)$. Оценим производную $\dfrac{dV(x(t))}{dt}$ в силу системы (1) на множестве S. Нетрудно проверить, что

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -W(x(t)) + \frac{\|r(x(t))\|}{\|x(t)\|}.$$

Наложим дополнительное условие на δ:

$$\frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \le m/2 \quad \text{при } x \in U_\delta(0).$$

Тогда при таких x имеем

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\frac{m}{2}. \qquad (5)$$

Далее, воспользовавшись леммой Гронуолла, нетрудно показать, что для любого $T > 0$ при достаточно малом начальном значении $x(0)$ решение $x(t)$ лежит в окрестности $U_\delta(0)$ для всех $t \in [0, T]$. Положив $T = 2\pi/m$ и воспользовавшись оценкой (5), нетрудно показать, что для любого решения $x(t)$ системы (1) с достаточно малым начальным значением $x(0)$, существует момент $t_0 \in [0, T]$, для которого $x(t_0) = c_0 k_1$, $x(t) = c(t) k_1$ и $c(t) \le c_0 e^{-q(t - t_0)}$ для некоторого $q > 0$ при всех $t \ge t_0$. Лемма доказана.

Доказательство Леммы 2. Обозначим через q_1 собственный вектор оператора A, лежащий в конусе K, а через $-\lambda_1$ — его собственное значение.

Рассмотрим функцию $V(x) = (Px, Px)$, где $PAP^{-1} = J$ есть Жорданова форма матрицы A. Заметим, что $\mathrm{grad}\, V(x) = 2P'Px$. Согласно ([2], § 42) матрицу P можно подобрать таким образом, что $J = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \alpha \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$ и

$$0 \le \alpha < \min\{\lambda_1, \lambda_2\}. \qquad (6)$$

Рассмотрим функцию $V(x)$ на решении $x(t)$ системы (1) в окрестности $U_\delta(0)$ с начальным значением $x(0) = x_0$. С помощью несложных вычислений можно показать, что найдутся такие $\delta > 0$ и $\gamma_1 > 0$, что при $x(t) \in U_\delta(0)$

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma_1 \|P\|^2 \|x(t)\|^2.$$

То есть

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma_1 V(x(t)), \qquad (7)$$

откуда получаем оценку

$$V(x(t)) \le e^{-\gamma_1 t} \|x_0\|. \qquad (8)$$

Утверждение Леммы вытекает из оценок (7) и (8).

Доказательство Леммы 3. Пусть собственный вектор $q_1 \in K$ имеет отрицательное собственное значение $-\lambda_1$ и собственный вектор $q_2 \notin K$ — неотрицательное собственное значение λ_2. Возьмем вектор $n \in K$ такой, что $(n, q_2) = 0$ и $(n, q_1) > 0$. Заметим, что любой вектор из конуса K можно разложить следующим образом

$$x = c_1(x) q_1 + c_2(x) q_2.$$

Нетрудно показать, что

$$\exists(\alpha_1 > 0) \forall (x \in K) [c_1(x) > \alpha_1 \|x\|]. \qquad (9)$$

Введем в рассмотрение функцию $V(x) = (n, x)$ на решении $x(t)$ системы (1) в окрестности $U_\delta(0)$ с начальным значением $x(0) = x_0$. Ее производная может быть оценена следующим образом

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma_1 \|x(t)\|$$

при $x(t) \in U_\delta(0)$ для некоторых $\delta > 0$ и $\gamma_1 > 0$.

Так как $V(x) \le \|x\|$, то

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \le -\gamma_1 V(x(t)). \qquad (10)$$

Значит,

$$V(x(t)) \le e^{-\gamma_1 t} \|x_0\|. \qquad (11)$$

Утверждение Леммы вытекает из оценок (10) и (11).

Литература

1. М. А. Красносельский, А. В. Покровский: Системы с гистерезисом, М.: Наука, 1983.

2. И. Г. Петровский: Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.} М., 1970.