УДК 517.957

О ВНУТРЕННЕЙ $C^{2,\alpha}$-РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2001 г. В. Т. Дмитриенко*

Воронежский государственный университет

Введение

В данной работе исследуется внутренняя $C^{2,\alpha}$ регулярность классического решения $u \in C^2(\Omega)$ нелинейного равномерно эллиптического уравнения

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0$$

Эта задача хорошо известна и неоднократно привлекала внимание исследователей. При условии, что F имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным с помощью метода Hopf E. [4] показано, что $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ для любого $\alpha \in (0,1)$ (см.[1], [2], [3]). Аналогичное утверждение для нелинейного эллиптического уравнения порядка 2m представлено в [10].

Многие результаты о регулярности решений установлены при получении теорем существования и не выделяются. Поэтому отметим лишь работы, посвященные исследованию $C^{2,\alpha}$ -регулярности решений [5], [6], [7], [8], [11], [12]. При этом изменялись требования на функцию F и решение u, например, $u \in C^{1,1}(\Omega)$ или $u \in W^{2,n}(\Omega)$, или же u – вязкое решение.

В данной работе устанавливается, что $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, при условии, что функция $F(x,u,v,w)$ имеет непрерывные производные $\frac{\partial F}{\partial w_{i,j}}$ и непрерывна по Гельдеру по переменным x,u,v с показателем α. Доказательство основывается на технике [9], рассматривающей непрерывность по Гельдеру как дробное дифференцирование, стандартных L^p - оценках для линейных эллиптических уравнений и новой формулировке интегрального критерия $C^{0,\alpha}$ - регулярности функции, или принадлежности классу функций Гельдера.

§1. Производная Гельдера. Интегральный критерий ограниченности производной Гельдера

Пусть Ω – ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega$ и $\overline{\Omega} = \Omega \bigcap \partial\Omega$ – ее замыкание. Для функции $u : \overline{\Omega} \to R$ введем понятие производной Гельдера с показателем α.

Определение 1.1 *Производной Гельдера с показателем α для функции $u(x)$ назовем функцию*

$$D_\alpha u(x,\tilde{x}) = \frac{u(x)-u(\tilde{x})}{|x-\tilde{x}|^\alpha}, \quad x,\tilde{x} \in \overline{\Omega}, \quad x \neq \tilde{x}.$$

Введение термина «производная» объясняется свойствами оператора D_α (см. [9]). Этот подход реализует предложение [13] рассматривать непрерывность по Гельдеру как дробное дифференцирование.

Лемма 1.1 *Пусть $u, v : \overline{\Omega} \to R$ - произвольные функции. Тогда*

1) $D_\alpha(u+v) = D_\alpha u + D_\alpha v$;

2) $D_\alpha(\lambda u) = \lambda D_\alpha u$ *для любого числа* λ;

3)
$$D_\alpha(u\cdot v)(x,\tilde{x}) =$$
$$= u(x)\cdot D_\alpha v(x,\tilde{x}) + v(\tilde{x})\cdot D_\alpha u(x,\tilde{x}) =$$
$$= u(\tilde{x})\cdot D_\alpha v(x,\tilde{x}) + v(x)\cdot D_\alpha u(x,\tilde{x})$$

или

$$D_\alpha(u\cdot v)(x,\tilde{x}) = \frac{u(x)+u(\tilde{x})}{2}\cdot D_\alpha v(x,\tilde{x}) +$$
$$+ \frac{v(x)+v(\tilde{x})}{2}\cdot D_\alpha u(x,\tilde{x});$$

* Работа поддержана грантом РФФИ № 01-01-00425

4) $$D_\alpha\left(\frac{u}{v}\right)(x,\tilde{x}) = \\ = \frac{v(x)\cdot D_\alpha u(x,\tilde{x}) - u(x)\cdot D_\alpha v(x,\tilde{x})}{v(x)v(\tilde{x})}.$$

Приведенные свойства легко следуют из определения. Производная Гельдера $D_\alpha u(x,\tilde{x})$ определена на множестве $(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})\setminus d$, где $d=\{(x,x): x\in\overline{\Omega}\}$. Обозначим через $D^*_\alpha u(x,\tilde{x})$ ее продолжение по непрерывности (возможно, многозначное) на множество $(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})$ и определим его с помощью равенств:

$D^*_\alpha u(x,\tilde{x}) = D_\alpha u(x,\tilde{x})$ для $x,\tilde{x}\in\overline{\Omega}$, $\quad x\neq\tilde{x}$;

$D^*_\alpha u(x,x) = \{z : z=\lim_{j\to\infty} D_\alpha u(x_j,\tilde{x}_j)$ для некоторой последовательности $(x_j,\tilde{x}_j)\in(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega})\setminus d$, сходящейся к $(x,x)\}$.

Ясно, что такое продолжение возможно лишь в случае $u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$. В пространстве $L^p(\Omega)$ определение продолжения должно быть иным.

Лемма 1.2 *Пусть* $u:\overline{\Omega}\to R^s$, $\quad v: u(\overline{\Omega})\to R$, $\quad s\geq 1$, *тогда для* $0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$,

$$D_{\alpha\beta}(v\circ u)(x,\tilde{x}) = \\ = D^*_\beta v(u(x),u(\tilde{x}))\cdot \mid D_\alpha u(x,\tilde{x})\mid^\beta . \qquad (1.1)$$

Введение понятия производной Гельдера позволяет определить пространство функций Гельдера с показателем α, $0<\alpha<1$, как множество непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций, имеющих ограниченную производную Гельдера с показателем α. Обозначим

$$\|u\|_0 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \mid u(x)\mid,$$

$$\ll u\gg_{0,\alpha} = \sup_{x,\tilde{x}\in\overline{\Omega},\, x\neq\tilde{x}} \mid D_\alpha u(x,\tilde{x})\mid .$$

Тогда норма функции $u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_0 + \ll u\gg_{0,\alpha} .$$

Пусть $D_{i,j}u$ обозначает частную производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$. Пространство $C^{2,\alpha}(\Omega)$ можно рассматривать как множество функций из $C^2(\Omega)$, имеющих ограниченные производные Гельдера с показателем α от частных производных второго порядка, т.е. $D_\alpha(D_{i,j}u)(x,\tilde{x})$. Норма функции $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|u\|_{2,\alpha} = \|u\|_2 + \ll u\gg_{2,\alpha} .$$

где

$$\|u\|_2 = \|u\|_0 + \sum_{i=1}^n \|D_i u\|_0 + \sum_{i,j=1}^n \|D_{i,j}u\|_0,$$

$$\ll u\gg_{2,\alpha} = \sum_{i,j=1}^n \ll D_{i,j}u\gg_{0,\alpha} .$$

При определении пространств Гельдера для производных Гельдера вводилась sup-полунорма. Использование L^p-полунорм приводит к другим пространствам.

Приведем простейший критерий принадлежности пространству функций Гельдера функций из пространства L^p, полученный Campanato S. [14]:

если для функции $u\in C(\overline{\Omega})$

$$\sup_{x\in\overline{\Omega},\,0<r\leq r_0} r^{-\alpha-\frac{n}{p}} \inf_{c\in R}\|u-c\|_{L^p(\Omega\cap B_r(x))}<\infty, \quad (1.2)$$

то $u\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Обозначим через $E_{x_0,r} = (\Omega\cap B_r(x_0))^2\setminus d$. Будем предполагать, что область Ω удовлетворяет условию $mes(\Omega\cap B_r(x_0)) \geq c_0\cdot mesB_r(x_0)$ для любых $r>0$, $x_0\in\overline{\Omega}$ и некоторого $c_0>0$.

Теорема 1.1 *Если для функции* $u\in C(\overline{\Omega})$ *и* $1\leq p<\infty$

$$\sup_{x_0\in\overline{\Omega},\,0<r\leq r_0} r^{-\frac{2n}{p}}\|D_\alpha u(x,\tilde{x})\|_{L^p(E_{x_0,r})}<\infty, \quad (1.3)$$

то $u\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Доказательство.

$$r^{-\frac{2n}{p}}\|D_\alpha u(x,\tilde{x})\|_{L^p(E_{x_0,r})} =$$

$$= r^{-\frac{2n}{p}}\left(\int\int_{E_{x_0,r}}\left(\frac{\mid u(x)-u(\tilde{x})\mid}{\mid x-\tilde{x}\mid^\alpha}\right)^p dx\,d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq r^{-\frac{2n}{p}}\cdot(2r)^{-\alpha}\left(\int\int_{E_{x_0,r}}\mid u(x)-u(\tilde{x})\mid^p\, dx\,d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{-\alpha}r^{-\alpha-\frac{2n}{p}}\left(\int_{\Omega\cap B_r(x_0)}\|u(\cdot)-u(\tilde{x})\|^p_{L^p(\Omega\cap B_r(x_0))}d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq 2^{-\alpha}r^{-\alpha-\frac{2n}{p}}\left(\int_{\Omega\cap B_r(x_0)}(\inf_{c\in R}\|u-c\|_{L^p(\Omega\cap B_r(x_0))})^p\,d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq 2^{-\alpha}r^{-\alpha-\frac{2n}{p}}\,(mes(\Omega\cap B_r(x_0)))^{\frac{1}{p}}\inf_{c\in R}\|u-c\|_{L^p(\Omega\cap B_r(x_0))} \geq$$

$$\geq 2^{-\alpha}r^{-\alpha-\frac{2n}{p}}\,(c_0\cdot mesB_r(x_0))^{\frac{1}{p}}\inf_{c\in R}\|u-c\|_{L^p(\Omega\cap B_r(x_0))} \geq$$

$$\geq c_1 r^{-\alpha-\frac{n}{p}} \inf_{c\in R} \|u-c\|_{L^p(\Omega\cap B_r(x_0))}$$

Если ограничен супремум от левой части неравенства, то ограничен и супремум от правой части неравенства. Следовательно, функция u удовлетворяет условиям критерия Campanato и $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Теорема доказана.

Следствие 1.1 *Если для любых* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $0 < r \leq r_0$

$$\|D_\alpha u(x,\tilde{x})\|_{L^p(E_{x_0,r})} < M r^{\frac{2n}{p}} \tag{1.4}$$

с константой M, не зависящей от выбора x_0, r, то $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Следствие 1.2 *Если для любых* $x_0 \in \overline{\Omega}$, $0 < r \leq r_0$

$$\frac{1}{(mes(\Omega\cap B_r(x_0)))^2} \int\int_{E_{x_0,r}} |\, D_\alpha u(x,\tilde{x})\,|^p \,dx\,d\tilde{x} < M \tag{1.5}$$

с константой M, не зависящей от выбора x_0, r, то $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Отличие данного критерия от критерия Morrey C. в том, что нет необходимости вычислять производную функции. Это особенно важно при оценке полунормы Гельдера старших производных функции u, так как наличие производных большего порядка не предполагается.

Важно также, что константа p может быть произвольной $1 \leq p < \infty$, ее величина и выбор остаются в нашем распоряжении.

§ 2. Модельная задача регулярности для дифференциально-разностных эллиптических операторов

В этом разделе мы рассмотрим дифференциально-разностные равномерно эллиптические операторы, введенные в [9]:

$$Lu(x,\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tilde{x}) D_\alpha D_{i,j} u(x,\tilde{x}),$$

$$x,\tilde{x} \in \overline{\Omega}, \quad x \neq \tilde{x}.$$

Оператор L назовем равномерно эллиптическим на $\overline{\Omega}$, если равномерно эллиптическим является оператор

$$\bar{L}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,x) D_{i,j} u(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Основным результатом данного раздела является следующее утверждение:

Теорема 2.1 *Пусть коэффициенты $a_{i,j}$ непрерывны на $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ и оператор L удовлетворяет условию равномерной эллиптичности на $\overline{\Omega}$. Если для функции $u \in C^2(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство*

$$|\, Lu(x,\tilde{x})\,| < M \quad \text{для} \quad x,\tilde{x} \in \overline{\Omega}, \quad x \neq \tilde{x}, \tag{2.1}$$

то $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}')$ для любой подобласти Ω', $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Доказательство. Покажем, что условие (1.5) выполняется. Заметим, что точки $x, \tilde{x}$, участвующие в оценке, расположены в некоторой малой окрестности d. Так как коэффициенты $a_{i,j}$ непрерывны на d, то, не уменьшая общности рассуждений, будем предполагать, что условие эллиптичности выполняется для всех точек $(x,\tilde{x})$ из некоторой окрестности d. (Можно считать, переопределив $a_{i,j}$ вне этой окрестности, что условие эллиптичности выполняется на всем множестве $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$.)

Пусть $x_0 \in \Omega$ и $r_0 > 0$ такое, что $B_{4r_0}(x_0) \subset \Omega$. Выберем произвольное $r < r_0$. В выражении $Lu(\tilde{x},x)$ выполним замену переменных $\tilde{x} = x + h$. Пусть $\tilde{a}_{ij}(x,h) = a_{ij}(x+h,x) = a_{ij}(\tilde{x},x)$. Тогда оператор L преобразуется к виду

$$\tilde{L}u(x+h,x) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x,h) D_{i,j} D_\alpha u(x+h,x). \tag{2.2}$$

Если $x,\tilde{x} \in B_r(x_0)$, то $h = \tilde{x} - x \in B_{2r}(0)$. Считая h фиксированным значением параметра, применим к эллиптическому оператору $\tilde{L}$ внутренние оценки в L^p (см., например, теорему 9.11 [13]). Получим

$$\|D_\alpha u(\cdot+h,\cdot)\|_{2,p;B_r(x_0)} \leq$$

$$c(\|\tilde{L}u(\cdot+h,\cdot)\|_{p;B_{2r}(x_0)} + \|D_\alpha u(\cdot+h,\cdot)\|_{p;B_{2r}(x_0)}).$$

Эта оценка справедлива для функций класса $W^{2,p}_{loc}(\Omega)\cap L^p(\Omega)$ и произвольного $p \in (1,\infty)$. Учитывая, что $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и, следовательно, производные $D^2 u$ ограничены, а также условие (2.1), преобразуем полученную оценку к виду

$$\|D_\alpha u(\cdot+h,\cdot)\|_{2,p;B_r(x_0)} \leq cM_1 \cdot (2r)^{\frac{n}{p}}.$$

Отсюда

$$\int\int_{E_{x_0,r}} | D_\alpha D_{i,j} u(\tilde{x}, x) |^p \, dx \, d\tilde{x} \le$$

$$\le \int\limits_{B_{2r}(0)} \int\limits_{B_r(x_0)} | D_\alpha D_{i,j} u(x+h, x) |^p \, dx \, dh \le$$

$$\le \int_{B_{2r}(0)} \|D_\alpha u(\cdot + h, \cdot)\|^p_{2,p;B_r(x_0)} \, dh \le$$

$$\le \int_{B_{2r}(x_0)} c^p M_1^p (2r)^n dh \le c_0 (2r)^{2n},$$

что обеспечивает выполнение оценки (1.5).

Для произвольной подобласти Ω' выберем r_0 в четыре раза меньше расстояния от Ω' до $\partial\Omega$. Тогда утверждение теоремы следует из следствия 1.2.

§ 3. О $C^{2,\alpha}$-регулярности классического решения нелинейного эллиптического уравнения

Теорема 3.1 *Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$ решение уравнения*

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \qquad (3.1)$$

и в некоторой окрестности множества

$$\Gamma_u = \{(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \in \Omega \times R \times R^n \times R^{n^2}\}$$

функция $F(x, u, v, w)$ удовлетворяет условиям

1) *непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial w_{i,j}}$;*
2) *непрерывна по Гельдеру с показателем α по переменным x, u, v;*
3) *удовлетворяет условию равномерной эллиптичности на $\overline{\Omega}$.*

Тогда для любой внутренней подобласти Ω', $\overline{\Omega}' \subset \Omega$,

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}').$$

Доказательство. Применим оператор D_α к уравнению (3.1). Получим равенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}[u](x, \tilde{x}) D_\alpha D_{i,j} u(x, \tilde{x}) + H[u](x, \tilde{x}) = 0,$$

$$x, \tilde{x} \in \overline{\Omega}, \quad x \ne \tilde{x}.$$

где

$$a_{ij}[u](x, \tilde{x}) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial w_{i,j}}(\tilde{x}, u(\tilde{x}), Du(\tilde{x}), D_{11}u(\tilde{x}), \cdots,$$

$$tD_{ij}u(x) + (1-t)D_{ij}u(\tilde{x}), \cdots, D_{nn}u(x))\, dt,$$

$$H[u](x, \tilde{x}) =$$

$$= \frac{F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) - F(\tilde{x}, u(\tilde{x}), Du(\tilde{x}), D^2u(x))}{| x - \tilde{x} |^\alpha}.$$

Это представление корректно в некоторой окрестности множества d. Используя условие 2) теоремы, утверждение леммы 1.2 и предположение $u \in C^2(\overline{\Omega})$ нетрудно установить ограниченность $H[u](x, \tilde{x})$, т.е.

$$| H[u](x, \tilde{x}) | \le M$$

для некоторой константы M. Тогда

$$| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}[u](x, \tilde{x}) D_\alpha D_{i,j} u(x, \tilde{x}) | \le M.$$

Заметим, что

$$a_{ij}[u](x, x) = \frac{\partial F}{\partial w_{i,j}}(x, u(x), Du(x), D^2u(x)).$$

Поэтому оператор

$$Lv(x, \tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}[u](x, \tilde{x}) D_\alpha D_{i,j} v(x, \tilde{x}),$$

$$x, \tilde{x} \in \overline{\Omega}, \quad x \ne \tilde{x}.$$

удовлетворяет условию равномерной эллиптичности на Ω.

Утверждение теоремы (3.1) следует из теоремы (2.1).

Замечание 3.1 *Полученная теорема регулярности без труда обобщается на случай нелинейных эллиптических уравнений произвольного порядка $2m$.*

Список литературы

1. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.// М: Изд-во Иностранной литературы,1957. — 256 с.
2. Nirenberg L. On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity// Comm. Pure. Appl. Math., 6 (1953). pp. 103—156.
3. Morrey C. B. Second order elliptic system of differential equations.// Proc. Nat. Acad. USA, 39 (1953). pp. 201—206.

4. Hopf E. Über den funktionalen, insbesondere den analytischen, Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung// Math. Z., 34 (1931). pp. 194—233.

5. Trudinger N. S. Regularity of solutions of fully nonlinear elliptic equations. // Bull. Un. Math. Ital. (6) 3-A (1984). pp. 421—340.

6. Trudinger N. S. Regularity of solutions of fully nonlinear elliptic equations. II// Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Research Report R 38 (1984).

7. Lieberman G. M. Regularity of solutions of nonlinear elliptic boundary value problem. // J. fur Mathematik, v. 369, 8 (1986), pp. 1—13.

8. Lieberman G. M. Global regularity of solutions of nonlinear second order elliptic and parabolic differential equations.// Math. Z., v. 193 (1986), pp. 331—346.

9. Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. Собственность нелинейных эллиптических дифференциальных операторов в пространствах Гельдера.// Нелинейные операторы в глобальном анализе. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1991, с. 68—86.

10. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I.// М.: Изд-во Иностранной литературы, 1962, 205 с.

11. Schulz F. Regularity theory for quasilinear elliptic systems and Monge-Ampere equations in two dimentions.// v. 1445, Springer-Verlag, 1990, 123 p.

12. Caffarelli L. A., Cabre X. Fully nonlinear elliptic equations. // American Math. Soc. Colloquim Publitions, AMS Providence, v. 43, 1995, 104 p.

13. Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения второго порядка. // М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 464 с.

14. Campanato S. Proprieta di una famiglia di spazi funzionali.// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sec. III, v. 18, fasc. 1 (1964). pp. 137—160.