РАЗДЕЛ ФИЗИКА

УДК 621.3.015.4

РЕЗОНАНС ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

© 2001 г. Н. Д. Бирюк

Воронежский государственный университет

Следуя традиции отечественной школы нелинейных колебаний, основанной академиками Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, с использованием теории резонанса, предложенной их учеником, профессором Г. С. Гореликом, дано современное толкование одной из разновидностей резонанса параметрического контура — резонанса первой степени, уточняется область применимости теории.

Резонансные явления широко применяются в механике, электродинамике, атомной физике. Они имеют большое значение в науке и технике. В частности, без резонансных эффектов была бы невозможна современная радиосвязь, достижения которой являются признаком цивилизованности современного общества. Наиболее известен случай резонанса электрического контура с постоянными параметрами. Соответствующая задача является достаточно простой и рассматривалась многими учеными с разных позиций, поэтому ее решение найдено со многими подробностями. Однако даже в этом случае встречаются затруднения. Известная модель контура является идеализированной и не всегда соответствует реальной системе. При введении в контур разнообразными способами значительной диссипации наблюдается заметное отклонение теории от эксперимента. Теория резонанса стационарного контура разрабатывалась применительно к последовательному или дуальному ему, параллельному контуру. В первом из них индуктивность L, емкость C, активное сопротивление R и источник задающего напряжения $u_з(t)$ включены последовательно. Во втором — индуктивность, емкость, активная проводимость $G = 1/R$ и источник задающего тока $i_з(t)$ включены параллельно. Такие физические системы часто называют гармоническими, поскольку они избирают гармонические (синусоидальные или косинусоидальные) функции времени определенной частоты. Поэтому и задающие токи и напряжения для простоты полагаются гармоническими $i_з = I\cos(\omega t + \varphi)$ и $u_з = U\cos(\omega t + \varphi)$. Удобно полагать, что их частота меняется квазистатически (бесконечно медленно), при этом существует такая частота, на которую контур реагирует по-особому: амплитуда одной из определяющих свободный процесс функций достигает максимума. Это и есть резонанс, который принято относить к контуру. Однако более тщательный анализ показывает [1], что это явление относится не к контуру, а к функции, определяющей установившийся режим. К таким функциям относятся токи и напряжения элементов контура, а также заряды конденсаторов, магнитные потоки, сцепляющиеся с индуктивностями. В случае гармонического возмущения каждая из этих функций имеет свою резонансную частоту, а стационарный контур имеет много резонансных частот. Задача в общем виде не решена и вряд ли может быть решена. Ее можно сформулировать так: даны индуктивность, емкость и сколько угодно активных сопротивлений; по-разному соединяя эти элементы, найти, например, заряд конденсатора. Получается система двух дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, но эти коэффициенты беспредельно усложняются при всевозможных соединениях элементов. Центр тяжести задачи заключается не в решении, а в получении нужной системы уравнений.

Допустим, что элементы контура представляют собой любые периодические функции времени с одним и тем же периодом. В таком случае задача радикально усложняется, а резонансные явления получается несравненно богаче, чем в стационарном случае.

Эта сложная линейная задача была впервые поставлена Л. И. Мандельштамом [2], Он же предложил идею решения. Г. С. Горелик разработал теорию [3] такого резонанса. Эта теория могла бы иметь большое прикладное значение, если бы наша отечественная радиосвязь развивалась на базе суперрегенеративного радиоприема. Однако, обстоятельства сложились так, что развитие государственной отечественной и мировой радиосвязи пошло по другому пути, где использовался другой вид радиоприема, супергетеродинный. Поэтому теория Горелика осталась как бы в стороне, о ней стали забывать. В настоящее время осознано, что теория Горелика о резонансе параметрического контура интересна сама по себе как фундаментальное достижение радиофизики. Оценка этой теории Н. Д. Папалекси [4] оказалась пророческой и согласуется с современными взглядами.

При всех очевидных достоинствах теории Горелика и методов ее построения остается нечеткой область ее применимости. При построении теории была использована аналогия между гармоническим и параметрическим контурами, причем в качестве аналога был взят последовательный резонансный контур. Аналог оказался слишком частным, поэтому при обобщениях возникают излишние трудности и неоднозначности. Ниже сделана попытка, по возможности, уменьшить их и уточнить область применимости теории. Для достижения поставленной цели дадим краткое критическое рассмотрение одного из фрагментов этой теории. При этом сохраним обозначения статьи [3], а также оригинальный математический аппарат, который в настоящее время применяется редко, во всяком случае, в радиофизике.

За основу берется дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2[\delta + \sigma(t)]\dot{x} + \rho_1(t)x = f(t), \qquad (1)$$

δ — определенное положительное число равное среднему значению коэффициента затухания, $\sigma(t)$ — его переменная часть. Заменой переменной $x = y\exp[-\int\sigma(t)dt]$ уравнение несколько упрощается

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \rho(t)y = f(t). \qquad (2)$$

Точками сверху обозначены производные во времени. Введем в рассмотрение оператор

$$\mathbf{L} = d^2/dt^2 + \rho(t),$$

тогда (2) примет вид

$$\mathbf{L}y + 2\delta\dot{y} = f(t). \qquad (3)$$

Решение этого уравнения находится в тесной связи с линейно независимыми решениями соответствующего однородного уравнения

$$\mathbf{L}y + 2\delta\dot{y} = 0. \qquad (4)$$

Именно, если $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — два линейно независимых решения (4) с начальными условиями: при $t = t_0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, — то одно из решений (3) представляется в виде

$$y(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{f(\tau)y_2(\tau)d\tau}{D(\tau)} + y_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{f(\tau)y_2(\tau)d\tau}{D(\tau)},$$

где

$$D = y_1\dot{y}_2 + \dot{y}_1 y_2 \text{ — вронскиан.}$$

При наших допущениях другие решения с течением времени асимптотически стремятся к этому решению. Уравнение (4) есть уравнение свободных колебаний нашего параметрического контура. В свою очередь, уравнению (4) ставится в соответствие уравнение

$$\mathbf{L}\,y = 0, \qquad (5)$$

которое по аналогии с последовательным гармоническим контуром названо уравнением собственных колебаний.

При рассмотрении резонансных явлений уравнение (4) должно быть асимптотически устойчивым по Ляпунову. При этом уравнение (5) может принадлежать: 1) области не асимптотической устойчивости, 2) области неустойчивости, 3) границе, разделяющей эти области. Для каждого из этих случаев характерна своя разновидность резонанса. Здесь рассматривается резонанс по п. 1), являющийся прямым обобщением резонанса гармонического контура. Предполагается, что возмущающие функции $f(t)$ в (3) относятся к классу почти периодических функций. Обратим внимание на некоторые терминологические особенности, характерные для радиофизики. Любую почти периодическую функцию можно представить в виде разложения в ряд Фурье по гармоническим функциям, при этом отношения частот составляющих не обязательно являются рациональными числами, как в случае периодических функций. Почти периодическую функцию можно представить в виде конечной или бесконечной суммы периодических функций. Минимальное число таких гармонических функций, что их комбинационные частоты дают весь спектр данной почти периодической функции, называется базисом этой почти периодической функции. Почти периодическая функция с конечным базисом есть квазипериодическая функция. Очевидно, что любую почти периодическую функцию можно с любой точностью аппроксимировать квазипериодической функцией.

Теория почти периодических функций является самостоятельным большим разделом теории функций, который к настоящему времени достиг высокой степени развития и все же продолжает развиваться. Для наших целей особый интерес представляют почти периодические функции одного переменного. Эти функции по свойствам близки к периодическим, но их область применимости несоизмеримо шире. Краткое изложение соответствующей теории с незаурядным методическим мастерством изложено в монографии [5].

Из теории дифференциальных уравнений следует, что если уравнение (5) находится внутри области устойчивости, то его решения являются квазипериодическими функциями времени.

Ниже применяется редко используемый в радиофизике, адекватный поставленной задаче математический аппарат. Кратко опишем его основы применительно к классу почти периодических (а значит и квазипериодических) функций. Для функций времени f и g вводится математическое действие — скалярное произведение

$$(f,g)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)g(t)dt \qquad (6)$$

Это число, равное среднему значению произведения двух почти периодических функций. Важным частным случаем является скалярный квадрат:

$$(f,f)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f^2(t)dt \qquad (7)$$

Функция f считается нормированной, если $(f,f) = 1$, функции f и g ортогональны, если $(f,g) = 0$. При таком подходе достигается аналогия между почти периодическими функциями и векторами, что дает возможность подключить к анализу хорошо разработанные и наглядные разделы векторной алгебры. Можно показать, что любая почти периодическая функция ортогональна к своей производной. Это следует из представления

$$f\dot f=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}f^2,$$

f^2 — почти периодическая функция времени, а среднее значение производной почти периодической функции равно нулю (это можно доказать весьма просто путем разложения функции в ряд Фурье). Таким образом, $(f,\dot f)=0$.

Допустим, что периодическая функция $\rho(t)$ имеет круговую частоту $\Omega=2\pi/T$, T — период колебаний. Тогда решением (5) являются почти периодические функции со спектром $h+k\Omega$, $k=-\infty,\dots,-1,0,1,\dots,\infty$. Константа h является важной характеристикой уравнения (5), ее вычисление представляет собой главную трудность анализа собственных колебаний параметрического контура [6]. Доказано, что вся совокупность решений уравнения (5) есть гильбертова плоскость, которую можно ортонормировать. В результате находится два таких специальных линейно независимых решения u, v уравнения (5), что

$$(u,u)=1,\quad (v,v)=1,\quad (u,v)=0. \qquad (8)$$

Тогда любое решение (5) можно представить как линейную комбинацию этих функций. Функции u,v в качестве решения уравнения (5) удовлетворяют равенствам

$$(u,\dot v)+(v,\dot u)=0,\quad u\dot v=a,\quad v\dot u=-a,$$

где a — константа. Это следует из равенства $u\dot v-\dot u v=2a$ являющегося утверждением теоремы Лиувилля, и очевидного равенства $u\dot v+\dot u v=d/dt\,(uv)$. Интересным частным случаем уравнения (5), сохраняющим главные особенности общего случая, является случай четного оператора **L**, что равнозначно четной функции $\rho(t)$. Тогда можно подобрать такие ортонормированные решения u,v, что одно из них, скажем u, будет четным, а другое v — нечетным. Получается прямая аналогия с гармоническим контуром, для которого

$$u=\sqrt{2}\cos\omega_0 t,\qquad v=\sqrt{2}\sin\omega_0 t.$$

Ортонормированные решения (8) позволяют упорядочить все решения уравнения (5). Именно, всем решениям этого уравнения ставится в соответствие гильбертова плоскость, имеющая много общего с привычной для нас евклидовой плоскостью. Допустим, имеется два произвольных решения

$$y_1 = a_1 u + b_1 v, \quad y_2 = a_2 u + b_2 v.$$

Нормой решения y_1 является положительное число

$$|y_1| = \sqrt{(y_1, y_1)} = \sqrt{a_1^{\;2} + b_1^{\;2}}.$$

Это аналог длины радиус-вектора. Степень близости между решениями выражается числом

$$|y_1 - y_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Это аналог расстояния между двумя точками на евклидовой плоскости. Каждая точка построенной таким способом плоскости есть вполне определенное решение уравнения (5).

Два линейно независимых ортонормированных решения u,v можно получить многими способами. Приведем один из них, являющийся наиболее простым и конструктивным. Пусть y_1,y_2 — два линейно независимых решения уравнения (5). Полагаем $u = y_1\big/\sqrt{(y_1, y_1)}$. Находим решение z, ортогональное к u, для чего представляем его в виде $z = au + by_2$. Из условия ортогональности следует $(u,z) = a + b(y_2,u) = 0$. Константу a выбираем произвольно, тогда константа b однозначно определяется как решение последнего уравнения $b= - a/(y_2,u)$. Выбором констант a,b определяется решение z. Это решение естественным способом нормируется — $v = z\big/\sqrt{(z,z)}$. Итак, получена пара линейно независимых ортонормированных решений уравнения (5). Разумеется, эта пара подбирается неоднозначно (как неоднозначно может быть задана пара единичных взаимно ортогональных векторов). Для единообразия принято для одного из решений, скажем y_1, выбирать начальные условия $y_1= 1$, $\dot{y}_1= 0$, для другого y_2, соответственно, $y_2= 0$, $\dot{y}= 1$.

При анализе резонанса оказывается целесообразным рассматривать одновременно два уравнения: (3) и отличающееся от него правой частью

$$\mathbf{L}y + 2\delta\dot{y} = f(t) \tag{3}$$

$$\mathbf{L}y + 2\delta\dot{y} = \delta f(t). \tag{9}$$

Поскольку оба они асимптотически устойчивы по Ляпунову, то установившийся режим всецело определяется правой частью. Оба уравнения являются линейными, поэтому их решения связаны друг с другом простой зависимостью. Именно, если решение первого уравнения

$$y = y(t),$$

то второго - соответственно,

$$y = \delta y(t).$$

Второе уравнение может быть представлено в виде

$$\mathbf{L}y = \delta(f - 2\dot{y}).$$

Получается, что если $f = 2\dot{y}$, то вынужденные колебания контура совпадают с собственными, т.е. с решениями уравнения $\mathbf{L}y = 0$. Таким образом, если

$$f = P\dot{u} + Q\dot{v},$$

то уравнение (9) имеет точное решение

$$y = (Pu + Qv)/2,$$

а уравнение (3), соответственно

$$y = (Pu + Qv)/2\delta. \tag{10}$$

Такой резонанс называется резонансом первой степени (коэффициент затухания в знаменателе находится в первой степени) и является прямым обобщением резонанса гармонического контура.

Из изложенного следует, что параметрический контур разлагает возмущающую силу $f(t)$ следующим образом

$$f(t) = P\dot{u} + Q\dot{v} + g, \tag{11}$$

где g должно удовлетворять условиям

$$(g,u) = 0, \;\; (g, v) = 0. \tag{12}$$

Можно показать, что такое разложение однозначно и коэффициенты равны

$$P = -(v,f)/a, \quad Q = (u,f)/a, \tag{13}$$

где a — вронскиан уравнения (5).

Для случая (9) возмущающая сила вызывает колебания

$$y = (Pu + Qv)/2 + \delta z. \tag{14}$$

Если беспредельно уменьшать δ, то

$$y_p = \lim_{\delta \to 0} y = \frac{Pu + Gv}{2}. \tag{15}$$

В уравнении (3) эта возмущающая сила возбудит резонансные колебания

$$y_p = \frac{Pu + Qv}{2\delta}.$$

Итак, если при разложении (11) возмущающей силы хотя бы один из коэффициентов P,Q не равен нулю, то имеем резонанс первой степени. В противном случае резонанса нет.

Здесь вкратце рассмотрено одно из ответвлений явления резонанса (резонанс первой степени) линейного контура, параметры которого изменяются во времени по любым периодическим законам с одним и тем же периодом, независимо от протекающих токов. Возмущающая сила предполагается любой почти периодической функцией времени.

Если вернуться к уравнениям (4) и (5), то можно заметить нестрогость в толковании собственных колебаний. Общепринятое толкование следующее: свободными колебания принято считать решения уравнения (4), собственные колебания это свободные колебания при отсутствии диссипации. На практике собственные колебания получают из свободных, полагая равными нулю все входящие в него активные сопротивления и проводимости. В данном случае считается, что решения уравнения (5) дают собственные колебания для уравнения (4). Это может быть только в том случае, если все диссипативные элементы контура входят только в коэффициент при первой производной. На примере более простых электрических гармонических контуров выясняется, что это выполняется только в параллельных и последовательных контурах. Большинство применяемых на практике контуров не являются ни последовательными, ни параллельными. В таком случае диссипативные элементы входят также и в оператор $\mathbf{L}$, тогда нарушается привычный переход от свободных колебаний к собственным.

Рассмотрим этот вопрос на конкретном примере. На рис. представлена схема колебательного контура, включающего в себя как частные случаи последовательный и параллельный контуры. Контур возмущается двумя источниками питания: источником задающего напряжения $u_з(t)$ и источником задающего тока $i_з(t)$. Если положить $i_з \equiv 0$, то получим обобщенный последовательный контур, а если, кроме того, $G = 0$, то — обычный последовательный контур. Если положить $u_з \equiv 0$, то получим обобщенный параллельный контур, а если, кроме того, $R = 0$, то — обычный параллельный контур. Считаем, что все элементы контура R, L, C, G изменяются во времени независимо от протекающих по ним токов. В таком случае это линейный контур с переменными параметрами.

Если ввести нормирующие делители заряда q_n, магнитного потока Φ_n и времени t_n, то можно перейти к безразмерным переменным заряда $x_1 = q/q_n$, магнитного потока $x_2 = \Phi/\Phi_n$ и времени $\tau = t/t_n$. Дифференциальные уравнения этого контура относительно заряда x_1 и магнитного потока x_2, соответственно, следующие:

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + [t_n(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}) + \frac{d\ln L}{d\tau}]\frac{dx_1}{d\tau} +$$
$$+(t_n{}^2\frac{1+RG}{LC} + \frac{t_nG}{C}\frac{d}{d\tau}\ln\frac{GL}{C})x_1 =$$
$$= \frac{t_n}{q_n}(t_n\frac{u_з + Ri_з}{L} + \frac{d\ln L}{d\tau}i_з + \frac{di_з}{d\tau})$$

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + [t_n(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}) + \frac{d\ln C}{d\tau}]\frac{dx_2}{d\tau} +$$
$$+(t_n{}^2\frac{1+RG}{LC} + \frac{t_nR}{L}\frac{d}{d\tau}\ln\frac{RC}{L})x_2 =$$
$$= \frac{t_n}{\Phi_n}(t_n\frac{i_з + Gu_з}{C} + \frac{d\ln C}{d\tau}u_з + \frac{du_з}{d\tau})$$

Как видно, дифференциальные уравнения относительно заряда и магнитного потока во времени имеют одинаковую структуру, хотя и в разных переменных. Это является следствием того свойства контура, что он — дуально вырожден, т.е. дуальная цепь для этого контура представляет собой такой же контур. Если к этим уравнения применить замену переменных, чтобы привести его к виду

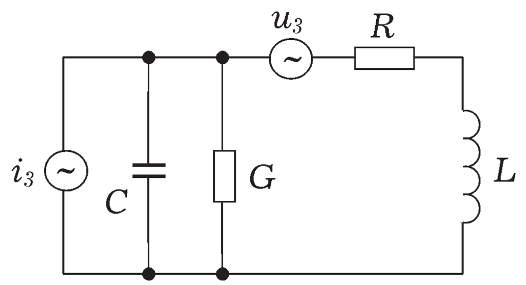

Рис.

(2), то придется выполнить громоздкие преобразования и, кроме того, не получается согласованности с установившейся терминологией. Во избежание этого можно на уравнения наложить должные ограничения. При этом одно условие $RG << 1$ является общим для обоих уравнений. Кроме того, есть раздельные ограничения. Для первого уравнения это — неравенства

$$\frac{d}{d\tau}\ln L \ll \frac{R}{L}+\frac{G}{C}, \quad C\frac{d}{d\tau}(\frac{GL}{C}) \ll 1.$$

Для второго, соответственно,

$$\frac{d}{d\tau}\ln C \ll \frac{R}{L}+\frac{G}{C}, \quad L\frac{d}{d\tau}\left(\frac{RC}{L}\right) \ll 1.$$

В этом случае диссипация будет сосредоточена во втором члене левой части, что и выполняется в последовательном или параллельном гармоническом контуре.

Тем не менее, и в общем случае теория Горелика в принципе должна привести к нужному результату. В практических расчетах при этом используются формальные математические преобразования, что связано с трудностями, в том числе и терминологического характера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирюк Н. Д. Колебательный контур в электро- и радиоизмерениях// Известия вузов. Электроника. 1997. Вып. 3—4. С. 151—152.

2. Мандельштам Л. И. Вопросы электрических колебательных систем и радиотехники // Успехи физических наук. 1933. Т. 13. Вып. 2. С. 161—194.

3. Горелик Г. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами // Журнал технической физики. 1934. Т. 4. Вып. 10. С. 1783—1817. 1935. Т. 5. Вып. 2. С. 196—215. 1935. Т. 5. Вып. 3. С. 490—517.

4. Папалекси Н. Д. Эволюция понятия резонанса. // Собрание трудов. М.: изд. АН СССР, 1948. С.341—356.

5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.:Наука, 1967. — 472 с.

6. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. — М.: ИЛ, 1953. — 476 с.