РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКА

УДК 51.925.51

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

© 2001 г. Е. П. Белоусова

Воронежский государственный университет

Пусть дискретный марковский процесс описывается нелинейной системой разностных уравнений

$$x(t+1) = f(t, x(t)), t = 0,\pm1,\pm2,... \tag{1}$$

Здесь $f(t,x)$ — непрерывная n-мерная вектор-функция. Будем предполагать, во-первых, что система (1) имеет нулевое решение, т.е. $f(t,0) = 0$ и, во-вторых, что правая часть — функция $f(t,x)$ непрерывно дифференцируема по переменным $x_1, ..., x_n$. Напомним определения устойчивого и асимптотически устойчивого решения, предварительно определив симплекс

$$W = \{x \in R^n : x_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Нулевое решение (система (1)) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого малого $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого начального условия* $x(t_0)$, *удовлетворяющего условию* $\|x(t_0)\| < \delta$, *соответствующее решение* $x(t)$ *удовлетворяет условию* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \ge t_0$.

Нулевое решение (система (1)) асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и кроме того $\|x(t)\| \to 0$ *при* $t \to 0$.

Эти определения остаются справедливыми, если система (1) рассматривается в гиперплоскости

$$L = \{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}.$$

Система (1) называется эргодической, если существует единственное решение $\pi(t)$, *принадлежащее симплексу* W *при всех* $t = 0,\pm1,\pm2,...$ *и при любом* $x(t_0) \in W$ *решение* $x(t)$ *с таким начальным условием стремится к* $\pi(t)$ *при* $t \to \infty$, *т.е.* $\|x(t) - \pi(t)\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Если матрица Якоби из частных производных

$$\partial f(t,x)/\partial x = \left(\frac{\partial f_i(t,x)}{\partial x_j}\right), i, j = 1,..., n \tag{2}$$

является марковской, то при любых (t,x) справедливы соотношения

$$\partial f_i(t,x)/\partial x_j \ge 0, i, j = 1, ..., n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \partial f_i(t,x)/\partial x_j = 1, j = 1, ..., n. \tag{4}$$

В силу внедиагональной неотрицательности матрицы Якоби оператор сдвига по траекториям системы (1) является положительным [1]. Поэтому, если начальное условие $x(t_0) \ge 0$, то решение системы (1) с таким начальным условием остается положительным при всех $t \ge t_0$.

Запишем систему (1) в новых обозначениях

$$y(t+1) = f(t, y(t)), t = 0,\pm1,\pm2,... \tag{5}$$

Предположение о непрерывной дифференцируемости по x функции $f(t,x)$ позволяет нам воспользоваться леммой Адамара [2]. Мы можем определить новую матричную функцию $M(t,x,y)$ по правилу

$$M(t,x,y) = \int_0^1 \frac{\partial f(t,(1-\alpha)x + \alpha y)}{\partial x} d\alpha.$$

Тогда разность двух функций $f(t,x)$ и $f(t,y)$ можно записать в следующем виде

$$f(t,x) - f(t,y) = M(t,x,y)(x-y).$$

Полагая $y(t) \equiv 0$ запишем исходную систему по-новому

$$x(t+1) = M(t, x(t))x(t), \tag{7}$$

где через $M(t,x)$ обозначим $M(t,x,0)$. Тогда $M(t,x) = (m_{ij}(t,x))$, $i,j = 1, ..., n$ — квадратная $n \times n$ матричная функция, которая при фиксированных (t,x) обладает всеми свойствами марковских матриц

$$m_{ij}(t,x) \geq 0, i,j = 1,..., n, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(t,x) = 1, j = 1,..., n. \tag{9}$$

Симплекс W инвариантен относительно системы (1). Покажем это. Зафиксируем начальное условие $x(t_0)$ из W. Тогда $x(t_0) \geq 0$ и $\mathbf{1}x(t_0) = 1$, где $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$. Решение $x(t)$ с этим начальным условием обладает теми же свойствами. Действительно,

$$f(t,x) - f(t,0) = M(t,x,0)x(t). \tag{10}$$

По предположению $f(t,0) = 0$, а $M(t,x,0) = (m_{ij}(t,x))$, $i,j = 1, ..., $ n. Поэтому

$$\mathbf{1}x(t+1) = \mathbf{1}f(t,x(t)) = \mathbf{1}M(t,x(t))x(t) =$$
$$= (\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(t,x(t)))x_j(t) = \mathbf{1}x(t) = 1,$$

что и требовалось показать.

Условие (9) означает, что при любых фиксированных значениях t,x матричная функция $M(t,x)$ имеет критическое собственное число равное единице. Для установления эргодичности процесса (1) необходимо показать, что все остальные собственные числа по модулю меньше единицы.

Подпространство L инвариантно относительно системы (1). Покажем, что если $x(t) \in L$, то и $x(t+1) \in L$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}x(t+1) = \mathbf{1}M(t,x(t))x(t) = \\ &= (\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(t,x(t)))x_j(t) = \mathbf{1}x(t) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

что и требовалось показать.

Так как оператор $M(t,x)$ при любых фиксированных значениях t и x имеет собственное число равное единице, то для установления эргодичности процесса (1) надо показать, что на подпространстве L нулевое решение системы асимптотически устойчиво. Иными словами, возникает задача оценки спектрального радиуса оператора $M(t,x)|L$. Для эргодичности достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho(M(t,x)|L) < 1 \tag{12}$$

при всех значениях t и x. Здесь $\rho(M(t,x)|L)$ обозначает спектральный радиус оператора $M(t,x)$ на подпространстве L.

Так как справедливо соотношение

$$\rho(M(t,x)|L) \leq \|M(t,x)|L\|, \tag{13}$$

то можно воспользоваться уже известными оценками нормы оператора на подпространстве L. Если для нормы оператора $M(t,x)|L$ выполняется соотношение

$$\|M(t,x)|L\| \leq q(t), 0 < q(t) < 1 \tag{14}$$

при всех (t,x),то автоматически выполняется и (12).

Самыми легкими в проверке по-прежнему остаются критерии, отнесенные к норме вектора с индексом $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, так как для них известны, введенные ранее в [3], точные формулы. Напомним их. Пусть сначала $\alpha = 0$, тогда

$$\begin{aligned} &\|M(t,x)|\,L\|_0 = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{[n/2]} (\tilde{m}_{ik}(t,x) - \tilde{m}_{i,n-k+1}(t,x)). \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть числа, а $\tilde{m}_{ik}(t,x)$ — это записанная в невозрастающем порядке i-ая строка матричной функции $M(t,x)$.

Если $\alpha = 1$, то для вычисления нормы оператора $M(t,x)|L$ воспользуемся формулой Добрушина

$$\begin{aligned} &\|M(t,x)|L\|_1 = \\ &= 1/2 \max_{k_1 < k_2} \sum_{i=1}^{n} |m_{ik_1}(t,x) - m_{ik_2}(t,x)|, \end{aligned} \tag{16}$$

где (t,x) фиксированы.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть оператор* $M(t,x)|L$ *удовлетворяет условию*

$$\|M(t,x)|L\|_0 \leq q_0(t), 0 < q_0(t) < 1 \tag{17}$$

при всех значениях t *и* x *и ряды*

$$\sum_{j=t_0}^{\infty} (q_0(j) - 1), \sum_{j=-\infty}^{t_0} (q_0(j) - 1)$$

являются расходящимися, или

$$\|M(t,x)|L\|_1 \leq q_1(t), 0 < q_1(t) < 1 \tag{18}$$

и ряды

$$\sum_{j=t_0}^{\infty}(q_1(j)-1), \sum_{j=-\infty}^{t_0}(q_1(j)-1)$$

являются расходящимися при всех значениях (t,x).

Тогда система (1) эргодична.

Если $0<\alpha<1$, то можно использовать следующий критерий эргодичности.

Теорема 2. *Пусть при некотором* $\alpha, \alpha \in (0,1)$ *и фиксированных* (t,x) *оператор* $M(t,x)|L$ *таков, что выполняется условие*

$$\max_{1\le i\le n}\{(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}\left|m_{ik}(t,x)-u_k(t,x)\right|+$$

$$\alpha\sum_{k=1}^{n}\left|m_{ki}(t,x)-u_k(t,x)\right|\}\le q_\alpha(t), 0<q_\alpha(t)<1$$

при некоторых значениях параметров $u_1(t,x), ..., u_n(t,x)$, α, *которые подлежат определению.*

Тогда имеет место эргодический случай.

Предположим теперь, что функция $f(t,x)$ является ω-периодической по t, т.е.

$$f(t,x)=f(t+\omega,x). \qquad (19)$$

Система (1) с правой частью, удовлетворяющей условию (19) называется эргодической, если существует единственное периодическое решение $\pi(t)$, *принадлежащее* W *при всех* $t=0,\pm1,\pm2,...$ *и для любого начального условия* $x(t_0)\in W$ *соответствующее решение* $x(t)$ *стремится к* $\pi(t)$ *при* $t\to\infty$, т.е. $\|x(t)-\pi(x)\|\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Определения эргодичности систем с произвольной и периодической правой частью эквивалентны.

Если через $U(t,t_0)$ обозначить оператор сдвига по траекториям решений системы разностных уравнений (1), то $U(\omega,0)$ будет оператором сдвига за период ω. Так как симплекс W инвариантен относительно системы (1), то $U(\omega,0)$ преобразует W в себя за период ω. По теореме Боля-Брауэра [1] оператор $U(t,t_0)$ имеет неподвижную точку и система (1) имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение $\pi(t)$.

Если функция $f(t,x)$ является ω-периодической, то доказательство единственности решения $\pi(t)$ и сходимости к нему при $t\to\infty$ решений $x(t)$ с любым начальным условием из симплекса W аналогично доказательству в линейном случае [3].

Рассмотрим в R^n систему нелинейных уравнений

$$\dot{x}(t)=k(t,x(t)), -\infty<t<\infty. \qquad (20)$$

Здесь $k(t,x)$ — n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных. Предположим , что выполнены следующие условия: во-первых, у системы (20) существует нулевое решение $x(t)\equiv 0$, т.е.

$$k(t,0)=0, \qquad (21)$$

во-вторых, правые части системы непрерывно дифференцируемы по переменным $x_1, ..., x_n$ и матричная функция

$$\partial k(t,x)/\partial x=(\partial k_i(t,x)/\partial x_j), i,j=1,..., n \qquad (22)$$

является колмогоровской при любых (t,x), т.е.

$$\partial k_i(t,x_1,..., x_n)/\partial x_i\le 0, i=1,..., n, \qquad (23)$$

$$\partial k_i(t,x_1,...,x_n)/\partial x_j\ge 0, i,j=1,...,n;\ i\ne j, \qquad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\partial k_i(t,x_1,..., x_n)/\partial x_j=0, j=1,..., n. \qquad (25)$$

Определения устойчивости и асимптотической устойчивости системы (20) сохраняют свою силу и в гиперплоскости L.

Предложим следующее определение эргодичности для нелинейных систем.

Система (20) называется эргодической, если существует единственное решение $\pi(t)$, *при всех* t *из* R *принадлежащее симплексу* W *и для любого начального условия* $x(t_0)\in W$ *соответствующее решение* $x(t)$ *стремится к* $\pi(t)$ *при* $t\to\infty$, *т.е.* $\|x(t)-\pi(t)\|\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Обозначим через $U(t,t_0)$ оператор сдвига по траекториям системы (20). В силу положительности правых частей системы, которая в [1] определяется как внедиагональная неотрицательность матричной функции Якоби (22) оператор $U(t,t_0)$ является положительным. Это означает, что если начальное условие $x(t_0)$ неотрицательно, то решение исходной системы с этим начальным условием тоже будет неотрицательно при всех $t\ge t_0$.

Покажем, что если $x(t_0)$ принадлежит симплексу W, т.е. $\mathbf{1}x(t_0)=1$ и $x(t_0)\ge 0$, то решение $x(t)$ с таким начальным условием тоже будет принадлежать W, т.е. $\mathbf{1}x(t)=1$ и $x(t)\ge 0$ при всех $t \geq t_0$. Обозначим через $u(t) = \mathbf{1}x(t)$ и продифференцируем ее. Получим

$$\dot{u}(t) = \mathbf{1}\dot{x}(t) = \mathbf{1}k(t, x(t)).$$

Введем в рассмотрение еще одну функцию $v(t,x)=\mathbf{1}k(t,x)$. Посчитаем ее производную по x:

$$\partial v(t,x)/\partial x = \mathbf{1}\partial k(t,x)/\partial x = 0 \qquad (26)$$

при всех t в силу того, что матрица (22) является колмогоровской при всех (t,x). Отсюда следует, что

$$v(t,x) = \mathbf{1}k(t,x) = const.$$

По предположению система имеет нулевое решение, т.е. $k(t,0) = 0$. Это означает, что $\mathbf{1}k(t,x) = 0$. Возвращаясь к функции $u(t)$ получаем, что $\mathbf{1}\dot{x}(t) = 0$. Значит $\mathbf{1}x(t) = const$ и так как $\mathbf{1}x(t_0) = 1$, то $\mathbf{1}x(t) = 1$ при любом $t \geq t_0$.

Тем самым доказана инвариантность симплекса W относительно системы (20).

Будем считать, что функция $k(t,x)$ является ω-периодической по t, т.е.

$$k(t,x) = k(t+\omega, x). \qquad (27)$$

Система (20) с правой частью, удовлетворяющей условию (27) называется эргодической, если существует единственное периодическое решение $\pi(t)$, при всех t из R принадлежащее W и для любого начального условия $x(t_0) \in W$ соответствующее решение $x(t)$ стремится к $\pi(t)$ при $t \to \infty$, т.е. $\|x(t) - \pi(t)\| \to \infty$ при $t \to \infty$.

Положим

$$U = U(\omega, 0),$$

тогда в силу инвариантности W относительно системы (20) оператор U сдвига за период ω преобразует W в себя. Из теоремы Боля-Брауэра вытекает, что оператор сдвига имеет неподвижную точку и система (20) имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение $\pi(t)$.

Для доказательства единственности и асимптотической устойчивости решения $\pi(t)$ при любой правой части необходимо указать условия, при которых норма разности любых двух решений $x(t)$ и $y(t)$ исходной системы стремится к нулю с течением времени, т.е.

$$\|x(t) - y(t)\| \to 0 \text{ при } t \to \infty. \qquad (28)$$

Норма здесь любая, так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны между собой. Заметим, что если начальные условия $x(t_0)$ и $y(t_0)$ принадлежат W, то их разность $x(t_0) - y(t_0)$ и соответственно разность $x(t) - y(t)$ при всех $t \geq t_0$ принадлежит гиперплоскости L.

Гиперплоскость L инвариантна относительно системы (20). Покажем это. Образуем функцию $u(t) = \mathbf{1}x(t)$. Если начальное условие $x(t_0) \in L$, то

$$u(t_0) = \mathbf{1}x(t_0) = 0. \qquad (29)$$

Продифференцировав $u(t)$, получим

$$\dot{u}(t) = \mathbf{1}\dot{x}(t) = \mathbf{1}k(t, x(t)). \qquad (30)$$

Так как $\mathbf{1}k(t,x(t)) = 0$, то $u(t) \equiv const$ и в силу (29) $u(t) \equiv 0$. Инвариантность доказана.

Запишем систему (20) в новых обозначениях

$$\dot{y}(t) = k(t, y(t)),\ -\infty < t < \infty \qquad (31)$$

тогда по лемме Адамара [2] можно определить новую матричную функцию

$$K(t,x,y) = \int_0^1 \frac{\partial k(t,(1-\alpha)x + \alpha y)}{\partial x} d\alpha, \qquad (32)$$

которая при фиксированных значениях параметров также является колмогоровской. Разность двух функций $k(t,x)$ и $k(t,y)$ можно записать в следующем виде

$$k(t,x) - k(t,y) = K(t,x,y)(x-y). \qquad (33)$$

Полагая $y \equiv 0$ запишем исходную систему по-новому

$$\dot{x}(t) = K(t,x)x(t), \qquad (34)$$

где через $K(t,x)$ обозначим $K(t,x,0)$.

$K(t,x) = (k_{ij}(t,x))$, i, j = 1, ..., n — квадратная $n \times n$-матричная функция, которая при фиксированных t,x обладает свойствами

$$k_{ii}(t,x) \leq 0, i = 1,...,\ n, \qquad (35)$$

$$k_{ij}(t,x) \geq 0, i,j = 1,...,\ n; i \neq j, \qquad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij}(t,x) = 0, j = 1, ..., n. \qquad (37)$$

Условие (37) означает, что имеет место критический случай, так как при всех t,x матричная функция $K(t,x)$ имеет нулевое критическое собственное значение, отвечающее левому критическому собственному вектору $\mathbf{1}$.

Нетрудно видеть, что подпространство L инвариантно относительно матричной функции $K(t,x)$.

Для доказательства эргодичности системы (20) необходимо оценить логарифмичекую норму оператора $K(t,x)$ на подпространстве L и потребовать выполнения неравенства

$$\gamma(K(t,x)|L) < 0. \tag{38}$$

Воспользуемся известной формулой для вычисления точного значения $\gamma_0(K(t,x)|L)$. При фиксированных (t,x) имеем

$$\gamma_0(K(t,x)|L) = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{[n/2]}(\tilde{k}_{ij}(t,x) - \tilde{k}_{i,n-j+1}(t,x)). \tag{39}$$

Здесь $\tilde{k}_{ij}(t,x)$ при любом фиксированном i есть конечная последовательность $k_{ij}(t,x)$, записанная в невозрастающем порядке, кроме диагонального элемента $k_{ii}(t,x)$, который ставится на первое место, $\tilde{k}_{i1}(t,x) = \tilde{k}_{ij}(t,x)$, а квадратные скобки означают целую часть числа. Справедлива

Теорема 3. *Пусть оператор* $K(t,x)|L$ *удовлетворяет условию*

$$\gamma_0(K(t,x)|L) \le \gamma_0(t), \tag{40}$$

где $\gamma_0(t)$ *такова, что*

$$\gamma_0(t) < 0$$

при всех t, если система имеет произвольную правую часть, или

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \gamma_0(s)ds < 0, \tag{41}$$

если правая часть системы периодическая.

Тогда система (20) эргодическая.

Если $\alpha = 1$, то при фиксированных значениях t,x

$$\gamma_1(K(t,x)|L) = 1/2\max_{i<j}\{k_{ii}(t,x) + k_{jj}(t,x) - (k_{ij}(t,x) + k_{ji}(t,x)) + \sum_{s\ne i,j}|k_{si}(t,x) - k_{sj}(t,x)|\}. \tag{42}$$

Теорема 4. *Пусть оператор* $K(t,x)|L$ *удовлетворяет условию*

$$\gamma_1(K(t,x)|L) \le \gamma_1(t), \tag{43}$$

где $\gamma_1(t)$ *такова, что*

$$\gamma_1(t) < 0$$

при всех t, *если система имеет произвольную правую часть, или*

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \gamma_1(s)ds < 0, \tag{44}$$

если правая часть системы периодическая.

Тогда система (20) эргодическая.

Закончим этот список теорем последней, которой можно пользоваться для оценки логарифмической нормы оператора $K(t,x)|L$ в случае, когда $0 < \alpha < 1$.

Теорема 5. *Пусть оператор* $K(t,x)|L$ *таков, что выполнено условие*

$$\gamma_\alpha(K(t,x)|L) \le \gamma_\alpha(t), \tag{45}$$

где

$$\gamma_\alpha(K(t,x)|L) = \max_{1\le i\le n}\{k_{ii}(t,x) - u_i(t,x) + (1-\alpha)\sum_{s\ne i}|k_{is}(t,x) - u_i(t,x)| + \alpha\sum_{s\ne i}|k_{si}(t,x) - u_s(t,x)|\} \tag{46}$$

и $u_1(t,x)$, ..., $u_n(t,x)$, $\alpha \in (0,1)$ — *параметры, подлежащие определению. И пусть* $\gamma_\alpha(t)$ *такова, что*

$$\gamma_\alpha(t) < 0$$

при всех t, *если система имеет произвольную правую часть, или*

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \gamma_\alpha(s)ds < 0, \tag{47}$$

если правая часть системы периодическая.

Тогда система (20) эргодическая.

Утверждения теорем 3,4 и 5 остаются справедливыми, если налагать ограничения типа (35)—(37) не на матричную функцию $K(t,x)$, а на матричную функцию

$$\frac{\partial k(t,(1-\alpha)x + \alpha y)}{\partial x}. \tag{48}$$

Для доказательства этого факта покажем, что для непрерывной матричной функции $A(\alpha)$, рассматриваемой при $0 \le \alpha \le 1$ справедливо неравенство

$$\gamma(\int_0^1 A(\alpha)d\alpha) \le \int_0^1 \gamma(A(\alpha))d\alpha. \tag{49}$$

Докажем сначала, что для любой конечной суммы

$$\gamma(\sum_{i=1}^p A_i\Delta\alpha_i) \le \sum_{i=1}^p(\gamma(A_i))\Delta\alpha_i, \tag{50}$$

где

$$\Delta\alpha_i \ge 0, i = 1,..., p \text{ и } \sum_{i=1}^p \Delta\alpha_i = 1. \tag{51}$$

По определению логарифмической нормы имеем

$$\gamma(\sum_{i=1}^{p} A_i \Delta\alpha_i) = \\ = \lim_{0<h\to\infty} (\| I + h\sum_{i=1}^{p} A_i\Delta\alpha_i \| - \| I \|)/h. \quad (52)$$

Используя (51) можно записать

$$\| I + h\sum_{i=1}^{p} A_i\Delta\alpha_i \| = \| \sum_{i=1}^{p} \Delta\alpha_i I + h\sum_{i=1}^{p} A_i\Delta\alpha_i \| =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{p} (I + hA_i)\Delta\alpha_i \| \le \sum_{i=1}^{p} \| I + hA_i \| \Delta\alpha_i.$$

Поэтому

$$\| I + h\sum_{i=1}^{p} A_i\Delta\alpha_i \| - \| I \| \le \sum_{i=1}^{p} \| I + hA_i \| \Delta\alpha_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{p} (\| I + hA_i \| - \| I \|)\Delta\alpha_i.$$

Наконец,

$$\gamma(\sum_{i=1}^{p} A_i\Delta\alpha_i) = \lim_{0<h\to 0} (\| I + h\sum_{i=1}^{p} A_i\Delta\alpha_i \| - \| I \|)/h \le$$

$$\le \lim_{0<h\to 0} \frac{\| I + hA_i \| - \| I \|}{h} \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{p} \gamma(A_i)\Delta\alpha_i.$$

и неравенство (50) доказано.

Разобьем отрезок $[0,1]$ точками $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p = 1$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{p} A(\alpha_i)\Delta\alpha_i, \text{ где } \Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}, i = 1,\ldots, p.$$

В силу неравенства (50)

$$\gamma(\sum_{i=1}^{p} A(\alpha_i)\Delta\alpha_i) \le \sum_{i=1}^{p} (\gamma(A(\alpha_i)))\Delta\alpha_i.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\sum_{i=1}^{p} (\gamma(A(\alpha_i)))\Delta\alpha_i$$

есть интегральная сумма для $\gamma(A(\alpha))$ при $0 \le \alpha \le 1$, совершим в последнем неравенстве предельный переход при

$$\max_{1\le i\le p} \Delta\alpha_i \to 0$$

и получим неравенство (49).

Из (49) получаем

$$\gamma(K(t,x,y)) = \gamma(\int_0^1 \frac{\partial k(t,(1-\alpha)x + \alpha y)}{\partial x} d\alpha) \le$$

$$\le \int_0^1 \gamma \frac{\partial k(t,(1-\alpha)x + \alpha y)}{\partial x} d\alpha$$

и пусть

$$\gamma(\frac{\partial k(t,(1-\alpha)x + \alpha y)}{\partial x}) \le \gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ функция, обладающая свойствами определенными в теоремах 3, 4 или 5. В этом случае доказательство эргодичности процесса (20) будет аналогично доказательству указанных теорем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 331 с.

2. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебник для студ. мех.-мат. спец. ун-тов/ Под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник. — 7-е изд., исправ. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 296 с.

3. Белоусова Е. П. Эргодичность как критический случай в теории устойчивости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1998.

4. Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова// Теория вероятностей и ее применения. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 12—89.