УДК 517.988

ВАРИАЦИОННОСТЬ ОПЕРАТОРА МОНЖА-АМПЕРА НА КЭЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ*

В.Г. Звягин, Н.М. Ратинер

Воронежский государственный университет

В работе изучается оператор $M(\phi)$ типа Монжа-Ампера на компактных келеровых многообразиях. Приведена конструкция нелинейного функционала на пространствах Гельдера, который является потенциалом для $M(\phi)$ по отношению к стандартному скалярному произведению в L_2. Тем самым показано, что уравнения, содержащие оператор Монжа-Ампера, являются уравнениями вариационного типа.

На кэлеровом многообразии V с метрикой g рассмотрим множество $A^{2,\alpha}$ вещественных функций φ класса $C^{2,\alpha}$, для которых 2 раза ковариантное тензорное поле, заданное в локальных координатах по формуле

$$g'_{\lambda\bar{\mu}} = g_{\lambda\bar{\mu}} + \nabla_{\lambda\bar{\mu}} \cdot \varphi, \tag{1}$$

определяет положительно определенную форму. Для каждой функции $\varphi \in A^{2\alpha}$ формула (1) задает новую кэлерову метрику на многообразии V. Определитель метрики g задается локальной формулой:

$$|g| = \begin{vmatrix} g_{1\bar{1}} & g_{1\bar{2}} & \cdots & g_{1\bar{m}} \\ . & . & \cdots & . \\ g_{m\bar{1}} & g_{m\bar{2}} & \cdots & g_{m\bar{m}} \end{vmatrix}.$$

Частное определителей метрик g и g'

$$M(\varphi) = \frac{|g_{\lambda\bar{\mu}} + \nabla_{\lambda\bar{\mu}}\varphi|}{|g_{\lambda\bar{\mu}}|},$$

хотя и задано в локальных координатах, является глобально определенной вещественной функцией на многообразии V (при фиксированной φ). Уравнение

$$M(\varphi) = exp\, F(x,\varphi)$$

называется комплексным уравнением Монжа-Ампера.

Рассмотрим пространства Гельдера $C^{2\alpha}(V)$ и $C^{0\alpha}(V)$ и непрерывные вложения $C^{2,\alpha}(V) \subset C^{0\alpha}(V) \subset L_2(V)$, образ $C^{2\alpha}(V)$ при суперпозиции i этих вложений всюду плотен в $L_2(V)$.

Отображение $M : C^{2,\alpha} \to C^{0,\alpha}$ является градиентом некоторого гладкого функционала $\mathsf{F} : C^{2,\alpha} \to R$ в смысле скалярного произведения в $L_2(V)$:

$$\delta\mathsf{F}(\varphi)h = \langle M(\varphi), h\rangle_{L_2} = \int_V hM(\varphi)dV.$$

Функционал F задается формулой:

$$\mathsf{F}(\varphi) = \int_V \varphi dV + \frac{1}{2!}\int_V \varphi\Delta\varphi dV + \frac{1}{3!}\sum_{\nu\mu}\int_V \varphi \begin{vmatrix} \nabla_\nu^\nu\varphi & \nabla_\mu^\nu\varphi \\ \nabla_\nu^\mu\varphi & \nabla_\mu^\mu\varphi \end{vmatrix} dV + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)\,!}\sum_{\nu,\mu,\ldots}\int_V \varphi \begin{vmatrix} \nabla_\nu^\nu\varphi & \nabla_\mu^\nu\varphi & \ldots & \nabla_\lambda^\nu\varphi \\ . & . & \ldots & . \\ \nabla_\nu^\lambda\varphi & \nabla_\mu^\lambda\varphi & \ldots & \nabla_\lambda^\lambda\varphi \end{vmatrix} dV,$$

где в каждом слагаемом производится суммирование по всем наборам k различных индексов из 1,... ,m, включая их перестановки.

1. Комплексные и почти комплексные многообразия

Если говорить коротко, то кэлерово многообразие представляет собой комплексное (или почти комплексное) многообразие, на котором задана эрмитова метрика со специальным свойством, так называемая метрика Кэлера.

Опишем это понятие более подробно.

Определение 1. *Топологическое пространство M называется комплексным многообразием размерности m, если задано его покрытие локальными картами* (Ω_j,φ_j), *где* $\varphi_j:\Omega_j\to\varphi_j(\Omega_j)$ *- гомеоморфизмы на открытое подмножество в* $\mathbb{C}^m$, *а функции перехода* $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(\Omega_i\cap\Omega_j)\to\varphi_j(\Omega_i\cap\Omega_j)$, $\Omega_i\cap\Omega_j\neq 0$, *голоморфны. Максимальный атлас, состоящий из карт* (Ω_j,φ_j), *называется комплексной структурой на M.*

Касательные пространства к комплексному многообразию имеют естественные структуры комплексных линейных пространств. Часто рассматривают такое вещественное многообразие, на касательных пространствах в каждой точке которого имеются структуры комплексных линейных пространств, гладко согласованные между собой. Такие многообразия называются почти комплексными. Точнее:

Определение 2. *Почти комплексной структурой на вещественном* C^∞*-многообразии M называется тензорное поле J типа (1,1) такое, что* $J(J(X))=-X$ *для каждого векторного поля X на M.*

Другими словами, в каждом касательном пространстве T_pM задан линейный оператор J_p со свойством $J_p^2=-1$, который позволяет ввести операцию умножения на мнимую единицу по формуле $iX=J_pX, X\in T_pM$, и на любые комплексные числа по линейности.

Многообразие с почти комплексной структурой J на нем называется почти комплексным.

Почти комплексная структура может возникать только на четномерных вещественных многообразиях. В фиксированном слое оператор J_p можно задать различными способами, например, фиксируя базис $X_1,\dots,X_{2m}$ в T_pM, положим:

$$J_pX_i=\begin{cases} X_{i+m} & 1\le i\le m \\ -X_{i-m} & m+1\le i\le 2m \end{cases}. \tag{2}$$

Для построения почти комплексной структуры на всем многообразии нужен такой выбор операторов J_p в слоях, при котором они гладко согласованы между собой.

Каждое комплексное многообразие имеет естественную почти комплексную структуру. Чтобы задать ее, рассмотрим локальные координаты $z^1,\dots,z^m$, где $z^k=x^k+iy^k$, $k=1,\dots,m$, на области Ω многообразия V. Базис в вещественном касательном расслоении над Ω состоит из векторных полей $\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial y^k}$. Зададим комплексную структуру J над Ω на базисных векторных полях:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial}{\partial y^k},\quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{3}$$

Эта комплексная структура является глобальной, что вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *(см.[9, т.2, стр. 117]) . Отображение f открытого подмножества из* $\mathbb{C}^n$ *в* $\mathbb{C}^m$ *сохраняет почти комплексную структуру, т.е.* $df\circ J=J\circ df$, *тогда и только тогда, когда f голоморфно.*

Заметим, что не всякая почти комплексная структура задает комплексное многообразие (см. там же).

2. Комплексное касательное пространство к почти комплексному многообразию

Пусть M^{2m} - вещественное четномерное многообразие с заданной на нем почти комплексной структурой J. При этом мы одновременно рассматриваем и ту ситуацию, когда M^{2m} получено из комплексного многообразия путем овеществления, а структура J является естественной почти комплексной структурой.

Рассмотрим в каждой точке вещественное касательное пространство T_pM размерности $2m$ и его комплексификацию - пространство $T_pM^{\mathbb{C}}$ комплексной размерности $2m$.

Напомним, что пространство $T_pM^{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как множество пар (X_1,X_2) с умножением на мнимую единицу: $i(X_1,X_2)=(-X_2,X_1)$.

Пространство $T_pM^{\mathbb{C}}$ принято называть **комплексным касательным пространством**, а его элементы - **комплексными касательными векторами**.

Замечание. Комплексное пространство, которое получается из T_pM с помощью оператора почти комплексной структуры J_p, имеет комплексную размерность m, оно обозначается $\tilde{T}_pM$. Однако название «комплексное касательное пространство» резервируется за $T_pM^{\mathbb{C}}$.

Продолжим оператор комплексной структуры J на комплексное касательное пространство: $J^{\mathbb{C}}(v_1,v_2)=(Jv_1,Jv_2)$, оператор $J^{\mathbb{C}}$ является комплексно линейным.

Поскольку $(J^{\mathbb{C}})^2=-I$, собственными значениями могут быть $\lambda_1=i$ и $\lambda_2=-i$. Обозначим через $T_pM^{1,0}$ и $T_pM^{0,1}$ их собственные подпространства. Непосредственным вычислением проверяется:

Лемма 2. *Комплексный касательный вектор Z почти комплексного многообразия M принадлежит $T_pM^{1,0}$ (соответственно $T_pM^{0,1}$) тогда и только тогда, когда он имеет вид $Z=X-iJX$ (соответственно $Z=X+iJX$) для некоторого вещественного касательного вектора.*

Имеет место разложение:

$$T_pM^{\mathbb{C}}=T_pM^{1,0}\oplus T_pM^{0,1}. \tag{4}$$

В комплексном касательном расслоении к почти комплексному или комплексному многообразию выбирается локальный базис векторных полей, соответствующий разложению (4). Если M - комплексное многообразие и $z^1,\ldots,z^m$, где $z^k=x^k+iy^k, k=1,\ldots,m$ - комплексная локальная система координат на M, то этот базис имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-i\frac{\partial}{\partial y^k}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}+i\frac{\partial}{\partial y^k}\right).$$

В дальнейшем локальные координаты векторных полей, а также всех тензоров рассматриваются по отношению к этому базису. Например, координаты векторного поля X в базисе $\partial/\partial z^1,\ldots,\partial/\partial z^m,\partial/\partial\bar{z}^1,\ldots,\partial/\partial\bar{z}^m$ обозначаются $a^1,\ldots,a^m,a^{\bar{1}},\ldots,a^{\bar{m}}$, а базис в пространстве k-форм состоит из форм вида: $dz^{i_1}\wedge\ldots\wedge dz^{i_l}\wedge d\bar{z}^{k_1}\ldots\wedge d\bar{z}^{k_q}$, $1\le i_1\le\ldots\le i_l\le m$, $1\le k_1\le\ldots\le k_q\le m$.

3. Эрмитова метрика

Пусть M^{2m} - вещественное многообразие с заданной на нем почти комплексной структурой J.

Эрмитовой метрикой g на M называется риманова метрика, инвариантная относительно почти комплексной структуры, т.е. для любых векторных полей X и Y

$$g(JX,JY)=g(X,Y). \tag{5}$$

Из формулы (5) и равенства $J^2=-1$ легко вытекает, что

$$g(X,JY)=-g(JX,Y),\ g(X,JX)=0. \tag{6}$$

Заметим, что согласно определению, эрмитова метрика является вещественной билинейной функцией. Однако, она продолжается каноническим образом до комплексной билинейной функции на $T_pM^{\mathbb{C}}$.

Продолжение эрмитовой метрики g на комплексное касательное пространство $(TM)^{\mathbb{C}}$ обозначим той же буквой g. Это будет однозначно определенная симметричная билинейная форма, ее значение на векторных полях $Z=X+iY$ и $W=U+iV$ из $(TM)^{\mathbb{C}}$ равно

$$g(Z,W)=g(X+iY,U+iV)=[g(X,U)-$$
$$-g(Y,V)]+i[g(Y,U)+g(X,V)],$$

при этом выполняются следующие свойства:

a) $g(\bar{Z},\bar{W})=\overline{g(Z,W)}$;

b) $g(Z,\bar{Z})>0$, если $Z\neq 0$;

c) $g(Z,\bar{W})=0$, если $Z\in TM^{1,0}, W\in TM^{0,1}$.

Эрмитова метрика каноническим образом продолжается также на $\tilde{T}_pM$ по формуле $\tilde{g}(x,y)=g(X,Y)+ig(X,JY)$. Форма $\tilde{g}$ является положительно определенной полуторалинейной формой.

Мнимая часть этой формы $Im\,\tilde{g}=g(X,JY)$ в силу (6) является кососимметричной билинейной функцией, т.е. 2-формой на многообразии M^{2m}.

Определение 3. *Фундаментальной формой многообразия называется 2-форма*

$$\omega(X,Y)=g(X,JY) \tag{7}$$

4. Эрмитова метрика и фундаментальная форма в локальных координатах

Пусть M - почти комплексное или комплексное многообразие. Рассмотрим локальный базис $\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$, $1 \le k \le m$, в комплексном касательном пространстве TM^C, соответствующий разложению (4). Вычислим коэффициенты эрмитовой метрики в этих локальных координатах. Поскольку $\partial/\partial z^k = \partial/\partial \bar{z}^k$, то из свойства (с) эрмитовой метрики вытекает, что

$$g_{kl} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial z^l}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}}\right) = 0.$$

Аналогично, $g_{\bar{k}\bar{l}} = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\right) = 0$. Далее из свойства (а) получаем:

$$g_{k\bar{l}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^l}\right) = g\left(\overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}}, \overline{\frac{\partial}{\partial z^l}}\right) = \overline{g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \frac{\partial}{\partial z^l}\right)} = \bar{g}_{\bar{k}l},$$

и, наконец, учитывая симметричность исходной римановой метрики g получаем, что $g_{i\bar{k}} = g_{\bar{k}i}$, в частности, $g_{k\bar{k}}$ вещественны и положительны.

Таким образом, матрица эрмитовой метрики в базисе $\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \bar{A} & 0 \end{pmatrix},$$

где A - эрмитова матрица:

$$A = \begin{pmatrix} g_{1\bar{1}} & g_{1\bar{2}} & \cdots & g_{1\bar{m}} \\ . & . & \cdots & . \\ g_{m\bar{1}} & g_{m\bar{2}} & \cdots & g_{m\bar{m}} \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь в локальных координатах фундаментальную форму многообразия $\omega(X,Y) = g(X,JY)$.

Пусть $X = \sum_{\alpha=1}^{m}\left(a^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + a^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)$, $Y = \sum_{\alpha=1}^{m}\left(b^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + b^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)$. Поскольку первые m векторов базиса лежат в собственном подпространстве оператора комплексной структуры J, отвечающем собственному значению i, то $J\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right) = i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, а следующие m - в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению $-i$, то $J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}$. Отсюда получаем:

$$\omega\ (X,Y) =$$

$$= g\left(\sum_{\alpha=1}^{m}\left(a^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + a^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right), \sum_{\alpha=1}^{m}\left(ib^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - ib^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}\right)\right) =$$

$$= -i\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} a^\alpha b^{\bar{\beta}} g_{\alpha\bar{\beta}} + i\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} a^{\bar{\beta}} b^\alpha g_{\bar{\beta}\alpha} =$$

$$= -i\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\beta}\left(a^\alpha b^{\bar{\beta}} - a^{\bar{\beta}} b^\alpha\right).$$

Заметим теперь, что $a^\alpha = dz^\alpha(X)$, $a^{\bar{\beta}} = d\bar{z}^\beta(X)$, $b^{\bar{\beta}} = d\bar{z}^\beta(Y)$, $b^\alpha = dz^\alpha(Y)$, поэтому выражение в скобках равно:

$$dz^\alpha(X)d\bar{z}^\beta(Y) - dz^\alpha(Y)d\bar{z}^\beta(X) = dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta(X,Y).$$

Окончательно получаем:

$$\omega = -i\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

5. Кэлерова метрика

Определение. Эрмитова метрика на многообразии M^{2m} называется кэлеровой, если фундаментальная форма ω замкнута: $d\omega = 0$.

Лемма 3. *Метрика является кэлеровой тогда и только тогда, когда в локальных координатах выполняются следующие условия:*

$$\partial_i g_{j\bar{k}} = \partial_j g_{i\bar{k}} \text{ и } \partial_{\bar{i}} g_{j\bar{k}} = \partial_{\bar{k}} g_{j\bar{i}}.$$

◀ Вычислим $d\omega$.

$$d\omega = -id\left(g_{k\bar{l}} dz^k \wedge d\bar{z}^l\right) =$$

$$= -i\left(\partial_j g_{k\bar{l}} dz^j \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^l + \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} d\bar{z}^j \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^l\right) =$$

$$= -i\left[dz^j \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^l\left(\partial_j g_{k\bar{l}} - \partial_k g_{j\bar{l}}\right) + \right. \tag{8}$$

$$\left. + dz^k \wedge d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^l\left(-\partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} + \partial_{\bar{l}} g_{k\bar{j}}\right)\right] = 0,$$

Откуда и получаются требуемые соотношения. ▶

Многообразие, на котором задана кэлерова метрика, называется кэлеровым.

На кэлеровом многообразии рассмотрим риманову связность, т.е. такую связность, для которой тензор кручения $T(X,Y)$ равен нулю и ковариантная производная метрического тензора равна нулю.

Поскольку для римановой связности коэффициенты Кристофеля связаны с метрикой формулами

$$\Gamma_{ij}^{l}=\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{kj}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij}\right)g^{kl}, \tag{9}$$

где g^{kl} - коэффициенты матрицы обратной к (g_{ij}), то из соотношений (8) легко вытекает, что все коэффициенты Кристофеля смешанного типа равны нулю: $\Gamma_{\bar{i}j}^{k}=\Gamma_{i\bar{j}}^{k}=\Gamma_{ij}^{\bar{k}}=\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}}=\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}}=\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{k}=0$, а $\Gamma_{ij}^{k}=\overline{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}}$ могут быть ненулевые.

Рассмотрим на почти комплексном многообразии V вещественную C^{∞} - гладкую функцию φ. Приведем некоторые коммутационные соотношения для ковариантных производных от φ, которые понадобятся в дальнейшем.

Для удобства будем обозначать индексы, меняющиеся от 1 до m, греческими буквами $\alpha,\beta,\ldots$, а индексы, пробегающие значения $1,\ldots,m,\bar{1},\ldots,\bar{m}$, будем обозначать большими латинскими буквами $A,B,\ldots$.

Лемма 4. *На кэлеровом многообразии*

1. вторые ковариантные производные от функции симметричны по нижним индексам: $\nabla_{AB}\varphi=\nabla_{BA}\varphi$;

2. смешанные вторые ковариантные производные совпадают с обычными:

$\nabla_{\lambda\bar{\mu}}\varphi=\partial^2_{\lambda\bar{\mu}}\varphi$;

3. третьи ковариантные производные симметричны по верхним индексам:

$$\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\nabla_{\gamma}\varphi=\nabla^{\beta}\nabla^{\alpha}\nabla_{\gamma}\varphi.$$

◀ Ковариантная производная от функции φ по направлению базисного векторного поля есть, по определению, производная по направлению этого векторного поля, т.е. просто частная производная: $\nabla_A\varphi=\partial_A\varphi$. Набор частных производных функции $(\partial_1\varphi,\ldots,\partial_m\varphi,\partial_{\bar{1}}\varphi,\ldots,\partial_{\bar{m}}\varphi)$ меняется как 1 раз ковариантный тензор, поэтому вторая ковариантная производная вычисляется по формуле

$$\nabla_A\nabla_B\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^A\partial x^B}-\Gamma_{AB}^{C}\nabla_C\varphi.$$

Поскольку для симметричной связности символы Кристофеля симметричны по нижним индексам, то смешанные вторые ковариантные производные от функции симметричны:

$$\nabla_{AB}\varphi=\nabla_A(\partial_B\varphi)=\partial^2_{AB}-\Gamma_{AB}^{C}\nabla_C\varphi=$$
$$=\partial^2_{AB}-\Gamma_{BA}^{C}\nabla_C\varphi=\nabla_{BA}\varphi.$$

Для кэлерова многообразия смешанные символы Кристофеля равны нулю, поэтому

$$\nabla_\lambda\nabla_{\bar{\mu}}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\lambda\partial x^{\bar{\mu}}}-\Gamma_{\lambda\bar{\mu}}^{C}\nabla_C\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^\lambda\partial x^{\bar{\mu}}}.$$

Наконец,

$$\nabla^{\alpha}\nabla^{\beta}\nabla_{\gamma}\varphi-\nabla^{\beta}\nabla^{\alpha}\nabla_{\gamma}\varphi=g^{\alpha\bar{p}}g^{\beta\bar{q}}\left(\nabla_{\bar{p}}\nabla_{\bar{q}}\nabla_{\gamma}\varphi-\nabla_{\bar{q}}\nabla_{\bar{p}}\nabla_{\gamma}\varphi\right)=$$
$$=g^{\alpha\bar{p}}g^{\beta\bar{q}}R^{l}_{\gamma\bar{p}\bar{q}}\nabla_l\varphi,$$

где $R^{l}_{\gamma\bar{p}\bar{q}}$ - коэффициенты тензора кривизны ([8], стр.276). Для кэлерового многообразия $R^{l}_{\gamma\bar{p}\bar{q}}=0$ ([9], т.2, стр.149). Откуда и получаем требуемое соотношение. ▶

6. Комплексное уравнение Монжа-Ампера

Пусть (V,g) - кэлерово замкнутое многообразие. Как обычно, $C^{l\alpha}(V)$ обозначает пространство Гельдера непрерывных функций на многообразии V, имеющих непрерывные производные до порядка l и конечную норму:

$$\|u\|_{C^{l,\alpha}}=\sum_{|\beta|\le l}\max_V|\nabla_\beta u|+\sum_{|\beta|=l}\sup_{x\ne y}\frac{|\nabla_\beta u(x)-\nabla_\beta u(y)|}{[d(x,y)]^{\alpha}},$$

$d(x,y)$ - расстояние между точками x и y многообразия V.

Пусть φ - вещественная функция класса $C^{2\alpha}$, для которой 2 раза ковариантное тензорное поле, заданное в локальных координатах по формуле:

$$g'_{\lambda\bar{\mu}} = g_{\lambda\bar{\mu}} + \nabla_{\lambda\bar{\mu}}\varphi, \tag{10}$$

определяет положительно определенную форму. Обозначим через $A^{2,\alpha}$ множество таких функции. Множество $A^{2,\alpha}$ открыто в $C^{2,\alpha}$. Для функций $\varphi \in A^{2\alpha}$ формула (1) задает новую кэлерову метрику на многообразии V.

Каждая эрмитова метрика g определяет на почти комплексном многообразии форму объема η, которая в локальных координатах задается формулой: $\eta = |g| dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^m$, где $|g|$ - определитель метрики:

$$|g| = \begin{vmatrix} g_{1\bar{1}} & g_{1\bar{2}} & \cdots & g_{1\bar{m}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{m\bar{1}} & g_{m\bar{2}} & \cdots & g_{m\bar{m}} \end{vmatrix}.$$

Как известно, форма объема является глобально определенной формой.

Поскольку пространство $2m$-форм на почти комплексном многообразии V^{2m} одномерно, то формы объема η и η', соответствующие метрикам g и g', отличаются на положительную функцию: $\eta' = M(\varphi)\eta$.

Уравнение

$$M(\varphi) = exp(F(\varphi, x)), \tag{11}$$

где F-гладкая функция на $I \times V$, называют комплексным уравнением Монжа-Ампера (см.[1]).

Уравнения такого вида возникли при решении некоторых геометрических проблем, таких как доказательство гипотезы Калаби и существование метрик Эйнштейна (см. [1], [2], [3], [6], [7]).

Отображение $M : C^{2,\alpha} \to C^{0,\alpha}$ непрерывно дифференцируемо, его производная Фреше равна

$$dM(\varphi)h = M(\varphi) g_{\lambda\bar{\mu}} h,$$

где $g_\varphi^{\lambda,\bar{\mu}}$ - элементы обратной матрицы к $(g_{\lambda,\bar{\mu}} + \partial_{\lambda,\bar{\mu}}\varphi)$, и является фредгольмовым оператором индекса ноль (см.[5] для вещественного многообразия V).

7. Вариационность оператора M

Согласно общему определению, нелинейный функционал $f : E \to R$ на банаховом пространстве E называется дифференцируемым по Фреше в точке $x \in R$, если существует линейный непрерывный функционал l на E такой, что

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + \omega(x,h), \tag{12}$$

где $\omega(x,h) = o(\|h\|_E)$.

Функционал l называется производной Фреше функционала f и обозначается $\delta f(x)$. Если пространство E - гильбертово, то по теореме Рисса существует элемент h_1 пространства E такой, что $l(h) = \langle h_1, h\rangle_E$. Таким образом, в случае гильбертова пространства получаем оператор из E в E, который называется градиентом Фреше функционала f.

Часто рассматривают более общую ситуацию. Пусть $f : E \to R$ - непрерывно дифференцируемый функционал на банаховом пространстве E. Пусть, кроме того, имеется пара вещественных линейных пространств F и H, где E - банахово, а H - гильбертово, вместе с непрерывными линейными вложениями: $E \subset F$, $F \subset H$, суперпозиция которых - плотное вложение E в H.

Определение 4. *C^1-отображение $A : E \to F$ называется H-градиентом функционала f, если $\delta f(x)h = \langle A(x), h\rangle_H$ для всех h из H.*

Функционал f называется потенциалом отображения A или потенциальным функционалом.

Если для $A : E \to F$ можно подобрать потенциал f, то отображение A называется вариационным.

В данном случае будем рассматривать в качестве пространств E, F, и H соответственно, пространства $C^{2\alpha}(V)$, $C^{0\alpha}(V)$, $L_2(V)$.

Теорема 1. *Отображение $M : C^{2,\alpha}(V) \to C^{0,\alpha}(V)$ является L_2-градиентом функционала $\mathsf{F} : C^{2\alpha}(V) \to R$:*

$$\delta\mathsf{F}(\varphi)h = \langle M(\varphi), h\rangle_{L_2} = \int_V hM(\varphi)dV,$$

$$\mathsf{F}(\varphi) = \int_V \varphi dV + \frac{1}{2!}\int_V \varphi\Delta\varphi dV + \frac{1}{3!}\sum_{\nu\mu}\int_V \varphi \begin{vmatrix} \nabla_\nu^\nu\varphi & \nabla_\mu^\nu\varphi \\ \nabla_\nu^\mu\varphi & \nabla_\mu^\mu\varphi \end{vmatrix} dV + \ldots +$$

$$+\frac{1}{(m+1)\,!}\sum_{\nu,\mu,\ldots}\int_V \varphi\begin{vmatrix}\nabla_\nu^\nu\varphi & \nabla_\mu^\nu\varphi & \ldots & \nabla_\lambda^\nu\varphi\\ . & . & \ldots & .\\ \nabla_\nu^\lambda\varphi & \nabla_\mu^\lambda\varphi & \ldots & \nabla_\lambda^\lambda\varphi\end{vmatrix}dV, \qquad (13)$$

где суммирование производится по всем наборам k различных чисел из $1,\ldots,m$, включая их перестановки.

8. Доказательство теоремы 1

Перепишем $M(\varphi)$ в виде:

$$M(\varphi)=|g|\cdot|g^{-1}|=|g\cdot g^{-1}|=$$

$$=\begin{vmatrix}1+g^{\bar{\alpha}1}\partial_{1\bar{\alpha}}\varphi & g^{\bar{\alpha}2}\partial_{1\bar{\alpha}}\varphi & \ldots & g^{\bar{\alpha}m}\partial_{1\bar{\alpha}}\varphi\\ g^{\bar{\alpha}1}\partial_{2\bar{\alpha}}\varphi & 1+g^{\bar{\alpha}2}\partial_{2\bar{\alpha}}\varphi & \ldots & g^{\bar{\alpha}m}\partial_{2\bar{\alpha}}\varphi\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ g^{\bar{\alpha}1}\partial_{m\bar{\alpha}}\varphi & g^{\bar{\alpha}2}\partial_{m\bar{\alpha}}\varphi & \ldots & 1+g^{\bar{\alpha}m}\partial_{m\bar{\alpha}}\varphi\end{vmatrix},$$

где $g^{\bar{\mu}\nu}$ - элементы обратной матрицы к матрице $g_{\alpha\bar{\beta}}$.

Используя операцию поднятия индексов, запишем, что $g^{\bar{\alpha}k}\partial_{1\bar{\alpha}}\varphi=\nabla_1^k\varphi$. Заметим, что здесь суммирование производится только по индексам с чертой, поскольку $g^{\alpha k}=0$. В результате поднятия индексов и транспонирования определитель примет вид:

$$M(\varphi)=\begin{vmatrix}1+\nabla_1^1\varphi & \nabla_2^1\varphi & \ldots & \nabla_m^1\varphi\\ \nabla_1^2\varphi & 1+\nabla_2^2\varphi & \ldots & \nabla_m^2\varphi\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \nabla_1^m\varphi & \nabla_2^m\varphi & \ldots & 1+\nabla_m^m\varphi\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первому столбцу, затем оба полученные определителя по второму столбцу и т.д., в результате получим формулу

$$M(\varphi)=1+\Delta\varphi+\frac{1}{2!}\sum_{\nu\mu}\begin{vmatrix}\nabla_\nu^\nu\varphi & \nabla_\mu^\nu\varphi\\ \nabla_\nu^\mu\varphi & \nabla_\mu^\mu\varphi\end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{m!}\sum_{\nu,\mu,\ldots}\begin{vmatrix}\nabla_\nu^\nu\varphi & \nabla_\mu^\nu\varphi & \ldots & \nabla_\lambda^\nu\varphi\\ . & . & \ldots & .\\ \nabla_\nu^\lambda\varphi & \nabla_\mu^\lambda\varphi & \ldots & \nabla_\lambda^\lambda\varphi\end{vmatrix},$$

где в каждом слагаемом производится суммирование по всем наборам из k различных индексов из $1,\ldots,m$, включая их перестановки.

Для каждого $k=1,\ldots,m$ рассмотрим функционал $F_k: A^{2,\alpha}\to R$, заданный по формуле:

$$F_k(\varphi)=\int_V\varphi\begin{vmatrix}\nabla_1^1\varphi & \nabla_2^1\varphi & \ldots & \nabla_k^1\varphi\\ . & . & \ldots & .\\ \nabla_1^k\varphi & \nabla_2^k\varphi & \ldots & \nabla_k^k\varphi\end{vmatrix}dV.$$

Теорема 2. *Производная Фреше функционала F_k равна:*

$$\delta F_k(\varphi)h=\int_V h\det\left(\nabla_j^i\varphi\right)dV+\int_V\varphi A_j^i\nabla_j^i h\,dV,$$

где A_j^i - алгебраическое дополнение к элементу $\nabla_j^i\varphi$ в матрице $\left(\nabla_j^i\varphi\right)$.

◄ Рассмотрим разность

$$\int_V(\varphi+h)\det\left(\nabla_j^i(\varphi+h)\right)dV-\int_V\varphi\det\left(\nabla_j^i\varphi\right)dV=$$

$$=\int_V\varphi\det\left(\nabla_j^i(\varphi+h)\right)dV+\int_V h\det\left(\nabla_j^i(\varphi+h)\right)dV-$$

$$-\int_V\varphi\det\left(\nabla_j^i\varphi\right)dV.$$

Используя линейность определителя по столбцам, разложим первые два интеграла на сумму 2^{k+1} слагаемых, получим

$$\int_V h\det\left(\nabla_j^i\varphi\right)dV+\sum_{i=1}^k\int_V\varphi\det\left(\nabla^1\varphi,\ldots,\nabla^i h,\ldots,\nabla^k\varphi\right)dV+$$

$$+\omega(\varphi,h),$$

где $\omega(\varphi,h)$ содержит слагаемые двух видов: под интегралом стоит произведение h на определитель, хотя бы один столбец которого содержит ковариантные производные от h, и произведение φ на определитель, у которого по крайней мере два столбца содержат производные от h. Поэтому $max|\omega(\varphi,h)| \leq \|h\|^2_{C^{2\alpha}}$. Осталось в последней формуле разложить определители по столбцам, содержащим ковариантные производные от h. ▶

Лемма 5. *Если A^i_j - алгебраическое дополнение к элементу $\nabla^i_j\varphi$ в матрице порядка k, составленной из вторых ковариантных производных на кэлеровом многообразии, то имеют место следующие соотношения:*

1. $\nabla^i A^i_j = 0$, *для всех j=1,...,k;*

2. $\nabla_j A^i_j = 0$, *для всех i=1,...,k;*

здесь, как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Доказательство этой леммы дано в следующем пункте.

Теорема 3. Если $\varphi \in C^3(V) \bigcap A^{2\alpha}$, то

$$\int_V \varphi A^i_j \nabla^i_j h dV = k \int_V h\, det\left(\nabla^i_j\varphi\right) dV. \tag{14}$$

◀ Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_V \varphi A^i_j \nabla^i_j h dV = \int_V \nabla^i\left(\varphi A^i_j\right)\nabla_j h dV =$$

$$= \int_V \nabla^i \varphi A^i_j \nabla_j h dV + \int_V \varphi\left(\nabla^i A^i_j\right)\nabla_j h dV.$$

Последний интеграл равен нулю в силу первой части леммы. Интегрируя еще раз по частям и учитывая вторую часть леммы, получаем:

$$\int_V \nabla^i \varphi A^i_j \nabla_j h dV = \int_V \nabla_j\left(\nabla^i \varphi A^i_j\right) h dV =$$

$$= \int_V \nabla^i_j \varphi A^i_j h dV + \int_V \nabla^i \varphi\left(\nabla_j A^i_j\right) h dV =$$

$$= \int_V \left(\nabla^i_j \varphi A^i_j\right) h\, dV = k \int_V h \det\left(\nabla^i_j \varphi\right) h\, dV.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всякого фиксированного i (или j) сумма по j (соответ. i) $\nabla^i_j \varphi A^i_j$ равна определителю матрицы $\left(\nabla^i_j\varphi\right)$. ▶

Теорема 4. *Формула (14) верна для функций φ из $C^{2\alpha}(V)$.*

◀ Пусть $\varphi \in C^{2\alpha}(V)$. Пусть последовательность C^∞ - функций φ_n сходится в норме C^2 к φ. Тогда функции φ_n сходятся непрерывно вместе со своими вторыми производными к функции φ. Поэтому можно перейти к пределу под знаком интеграла в равенстве (14). ▶

Используя предыдущие леммы, получаем формулу для вычисления градиента функционала F_k.

$$\delta \mathsf{F}_k(\varphi) = (k+1) \int_V h \det\left(\nabla^i_j \varphi\right)\, dV.$$

Теперь легко видно, что градиент Фреше функционала (13) равен

$$\delta \mathsf{F}(\varphi) h = \int_V h dV + \int_V h \Delta\varphi\, dV + \frac{1}{2!}\sum_{\nu\mu} \int_V h \begin{vmatrix} \nabla^\nu_\nu\varphi & \nabla^\nu_\mu\varphi \\ \nabla^\mu_\nu\varphi & \nabla^\mu_\mu\varphi \end{vmatrix} dV + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m!}\sum_{\nu,\mu,\ldots} \int_V h \begin{vmatrix} \nabla^\nu_\nu\varphi & \nabla^\nu_\mu\varphi & \ldots & \nabla^\nu_\lambda\varphi \\ . & . & \ldots & . \\ \nabla^\lambda_\nu\varphi & \nabla^\lambda_\mu\varphi & \ldots & \nabla^\lambda_\lambda\varphi \end{vmatrix} dV = \left\langle M(\varphi), h\right\rangle_{L_2}.$$

Учитывая формулу разложения для $M(\varphi)$, получаем нужный результат.

9. Доказательство леммы 5

◀ 1) Обозначим через $\hat{B}^i$ i-ю строку матрицы $\left(\nabla^i_j\varphi\right)$, в которой вычеркнут j-тый столбец, т.е.

$\hat{B}^i=\left(\nabla_1^i\varphi,...,\nabla_{j-1}^i\varphi,\nabla_{j+1}^i\varphi,...,\nabla_k^i\varphi\right)$. Тогда алгебраическое дополнение A_j^i можно записать в виде:

$$A_j^i=(-1)^{i+j}\det\begin{pmatrix}\hat{B}^1\\ \vdots\\ \hat{B}^{i-1}\\ \hat{B}^{i+1}\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix},$$

поэтому

$$\nabla^i A_j^i=(-1)^{j+1}\nabla^1\det\begin{pmatrix}\hat{B}^2\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+...+(-1)^{j+k}\nabla^k\det\begin{pmatrix}\hat{B}^1\\ \hat{B}^2\\ \vdots\\ \hat{B}^{k-1}\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)^{j+1}\left[\det\begin{pmatrix}\nabla^1\hat{B}^2\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\hat{B}^2\\ \nabla^1\hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+...+\det\begin{pmatrix}\hat{B}^2\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \nabla^1\hat{B}^k\end{pmatrix}\right]+$$

$$+(-1)^{j+2}\left[\det\begin{pmatrix}\nabla^2\hat{B}^1\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\hat{B}^1\\ \nabla^2\hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+...+\det\begin{pmatrix}\hat{B}^1\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \nabla^2\hat{B}^k\end{pmatrix}\right]+$$

$$+...+(-1)^{j+k}\left[\det\begin{pmatrix}\nabla^k\hat{B}^1\\ \hat{B}^2\\ \vdots\\ \hat{B}^{k-1}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\hat{B}^1\\ \nabla^k\hat{B}^2\\ \vdots\\ \hat{B}^{k-1}\end{pmatrix}+...+\det\begin{pmatrix}\hat{B}^1\\ \hat{B}^2\\ \vdots\\ \nabla^k\hat{B}^{k-1}\end{pmatrix}\right].$$

Из леммы 4 получаем, что $\nabla^\alpha\hat{B}^\beta=\nabla^\beta\hat{B}^\alpha$. Теперь легко заметить, что в выражении для $\nabla^i A_j^i$ первый определитель первой суммы совпадает с первым определителем второй суммы, поэтому

$$(-1)^{j+1}\det\begin{pmatrix}\nabla^1\hat{B}^2\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+(-1)^{j+2}\det\begin{pmatrix}\nabla^2\hat{B}^1\\ \hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}=0.$$

Второй определитель первой суммы и первый определитель третьей суммы совпадают с точностью до перестановки строк, поэтому

$$(-1)^{j+1}\det\begin{pmatrix}\hat{B}^2\\ \nabla^1\hat{B}^3\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}+(-1)^{j+3}\det\begin{pmatrix}\nabla^3\hat{B}^1\\ \hat{B}^2\\ \vdots\\ \hat{B}^k\end{pmatrix}=0,$$

и т.д. последний $(k-1)$-й определитель первой суммы сокращается с первым определителем последней k-той суммы. Аналогично, каждое слагаемое второй суммы, начиная со второго, сокращается со вторыми слагаемыми последующих сумм и т.д. В результате получаем $\nabla^i A_j^i=0$.

2) Для доказательства второго равенства обозначим через $\hat{B}_j$ j-тый столбец матрицы $\left(\nabla_j^i\varphi\right)$, в которой вычеркнута i-тая строка, т.е.

$$\hat{B}_j=\begin{pmatrix}\nabla_j^1\varphi\\ \vdots\\ \nabla_j^{i-1}\varphi\\ \nabla_j^{i+1}\varphi\\ \vdots\\ \nabla_j^k\varphi\end{pmatrix}.$$

Тогда $A_j^i=(-1)^{i+j}\det\left(\hat{B}_1,...,\hat{B}_{j-1},\hat{B}_{j+1},...,\hat{B}_k\right)$. Таким образом,

$$\nabla_j A_j^i=(-1)^{i+1}\nabla_1\det\left(\hat{B}_2,\hat{B}_3,...,\hat{B}_k\right)+...+$$
$$+(-1)^{i+k}\nabla_k\det\left(\hat{B}_1,\hat{B}_2,...,\hat{B}_{k-1}\right)=$$
$$=(-1)^{i+1}[\det(\nabla_1\hat{B}_2,\hat{B}_3,...,\hat{B}_k)+...+\det(\hat{B}_2,\hat{B}_3,...,\nabla_1\hat{B}_k)]+...+$$
$$+(-1)^{i+k}[\det(\nabla_k\hat{B}_1,\hat{B}_2,...,\hat{B}_{k-1})+...+\det(\hat{B}_1,\hat{B}_2,...,\nabla_k\hat{B}_{k-1})].$$

Мы можем переставлять нижние индексы в ковариантных производных третьего порядка, поскольку $\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^\gamma\varphi-\nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla^\gamma\varphi=g^{\gamma\bar{p}}\left(\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_{\bar{p}}\varphi-\right.$ $\left.-\nabla_\beta\nabla_\alpha\nabla_{\bar{p}}\varphi\right)=g^{\gamma\bar{p}}R^A_{\bar{p}\alpha\beta}\nabla_A\varphi=0$, а на кэлеровом многообразии $R^A_{\bar{p}\alpha\beta}=0$.

Произведя сокращения аналогично первой части леммы, получим требуемый результат. ▸

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N98-01-00029

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aubin T. Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations.- Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 252.-Springer-Verlag.-1982. -204p.

2. Aubin T. Mètrique riemanniennes et courbure//J.Diff.Gèo.-1970,-V.4, -P.383-424

3. Aubin T. Equations du type Monge-Ampère sur les variètès kählèriennes compactes//C.R.A.S. -Paris.-1976.-V.283A.-P.119.

4. Aubin T. Equations du type Monge-Ampère sur les variètès kählèriennes compactes// Bull.Sc.Math.-1978.-V.102.-P.63-95.

5. Yau S-T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation. I //Comm.Pure Appl.Math.-1977.-V.31.-P.339-411.

6. Бессе А. Многообразия Эйнштейна. т.1,2.-М.:Мир,-1990.-703с.

7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. -М.:Наука,-1979.-759с.

8. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. т.1,2.-М.:Наука, 1981.-344с.-414с.