ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

УДК 517.99

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Г. Задорожний

Воронежский государственный университет

Получены уравнения для моментальных функций решения задачи Коши уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами. Найдена формула для нахождения математического ожидания решения.

1. Постановка задачи

Реальные процессы зависят от влияния различных случайных факторов. Если это влияние незначительно, то им можно пренебречь, однако желательно знать оценку степени зависимости процесса от случайных факторов.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \varepsilon(t)\Delta y(t,x) + f(t,x) \quad (1)$$

$$y(t_0,x) = g(x) \quad (2)$$

Здесь $t \in [t_0,t] = T \subset R, x \in R^n$, Δ- оператор Лапласа по переменной $x \in R^n, y: T \times R^n \to R, \varepsilon(t)$ - случайный процесс (зависимость от случайного события в записи не отражается), $f: T \times R^n \to R$ - случайный процесс, $g: R^n \to R$ -задано.

Требуется найти моментные функции решения задачи (1),(2), в первую очередь, математическое ожидание и дисперсионную функцию.

Обычно пытаются получить из задачи (1),(2) уравнения для моментных функций, но при этом получается бесконечная система связанных дифференциальных уравнений. Для некоторых задач ее удается замкнуть или свести к конечной системе уравнений [1], [2]. Мы рассматриваем другой подход, который позволяет получить рекуррентную последовательность вспомогательных детерминированных уравнений, из решений которых легко находятся моментные функции.

2. Уравнение для общего характеристического функционала

Пусть V банахово пространство функций $\upsilon: T \to R$, U банахово пространство функций $u: T \times R^n \to R$. Пространства V и U выбираются таким образом, чтобы для выборочных функций случайных процессов $\varepsilon(t)$ и $f(t,x)$ функционалы

$$\int_T \varepsilon(s)\upsilon(s)ds, \quad \int_T\int_{R^n} f(s,x)u(s,x)dsdx$$

были линейными ограниченными функционалами, соответственно, на V и U.

Будем предполагать, что случайные процессы ε и f заданы характеристическим функционалом [2]

$$\psi(\upsilon(\cdot),u(\cdot)) = M(\exp(i\int_T \varepsilon(s)\upsilon(s)ds + i\int_T\int_{R^n} f(s,x)u(s,x)dsdx)),$$

где M обозначает математическое ожидание по функции распределения процессов ε и f.

Введем обозначения

$$e(\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)) = \exp(i\int_T \varepsilon(s)\upsilon(s)ds + \int_T\int_{R^n} f(s,x)u(s,x)\,dsdx + i\int_T\int_{R^n} y(s,x)w(s,x)\,dsdx),$$

где $w(\cdot) \in U, M$ - математическое ожидание по функции распределения ε, f и g.

Умножим уравнение (1) на $e(\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))$, тогда математическое ожидание полученного равенства формально можно записать с помощью отображения Y и вариационных производных [3] в виде

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Y}{\delta w(t,x)} = \frac{1}{i^2}\frac{\delta}{\delta\upsilon(t)}\Delta\frac{\delta}{\delta w(t,x)}Y + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta u(t,x)}Y,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta Y}{\delta w(t,x)}=-i\frac{\delta}{\delta \upsilon(t)}\Delta\frac{\delta}{\delta w(t,x)}Y+\frac{\delta}{\delta u(t,x)}Y\,. \qquad (3)$$

Аналогичным образом из (2) получаем

$$\left.\frac{\delta Y\big(\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)\big)}{\delta w(t,x)}\right|_{t=t_0}=ig(x)Y(\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))\,. \qquad (4)$$

Мы пришли к детерминированной задаче для $Y(t,x,\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))$. Если Y известно, то из него формально легко получить моментные функции для решения $y(t,x)$ и даже корреляционные функции процессов y и ε, а также процессов y и f. Например,

$$My(t,x)=\frac{1}{i}\left.\frac{\delta Y\big(\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)\big)}{\delta w(t,x)}\right|_{\upsilon=0,u=0,w=0.}\,.$$

3. Моментные функции решения задачи (1),(2)

Будем искать решение задачи (3),(4) в виде степенного ряда по w

$$Y=Y_0(\upsilon(\cdot),u(\cdot))+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\ldots\int Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_k,x_1,\ldots,x_k)\times$$

$$\times w(s_1,x_1)\ldots w(s_k,x_k)\,ds_1\ldots ds_k\,dx_1\ldots dx_k\ ,$$

где интегралы по переменным s_i, $i = 1, \ldots , k$ вычисляются по промежутку T, а по переменным x_i, $i = 1, \ldots , k$ по пространству R^n. Из определения ψ и Y следует

$$Y(t,x,\upsilon(\cdot),u(\cdot),0)=Y_0(\upsilon(\cdot),u(\cdot))=\psi(\upsilon(\cdot),u(\cdot))\,.$$

Подставим Y в уравнение (3), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\partial}{\partial t}Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},x_1,\ldots,x_{k-1},x)\times$$

$$\times w(s_1,x_1)\ldots w(s_{k-1},x_{k-1})\,ds_1\ldots ds_{k-1}dx_1\ldots dx_{k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{k+1}}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta\upsilon(t)}\Delta Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},t,x_1,\ldots,x_{k-1},x)\times$$

$$\times w(s_1,x_1)\ldots w(s_{k-1},x_{k-1})\,ds_1\ldots ds_{k-1}dx_1\ldots dx_{k-1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{k+1}}{(k-1)!}\int\ldots\int\frac{\delta}{\delta u(t,x)}Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_k,t,x_1,\ldots,x_k)\times$$

$$\times w(s_1,x_1)\ldots w(s_k,x_k)\,ds_1\ldots ds_k\,dx_1\ldots dx_k\ .$$

Приравнивая одинаковые степени по w, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},t,x_1,\ldots,x_{k-1},x)=$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\upsilon(t)}\Delta Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},t,x_1,\ldots,x_{k-1},x)-$$

$$-i\frac{\delta}{\delta u(t,x)}Y_{k-1}(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},x_1,\ldots,x_{k-1})\,,$$

$k = 1,2, \ldots$ (5)

Условие (4) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int\ldots\int Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},t,x_1,\ldots,x_{k-1},x)\times$$

$$\times w(s_1,x_1)\ldots w(s_{k-1},x_{k-1})\,ds_1\ldots ds_{k-1}dx_1\ldots dx_{k-1}\Big|_{t=t_0}=$$

$$ig(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\int\ldots\int Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_k,x_1,\ldots,x_k)\times$$

$$\times w(s_1,x_1)\ldots w(s_k,x_k)\,ds_1\ldots ds_k\,dx_1\ldots dx_k\ .$$

Приравнивая одинаковые степени по w, получаем начальные условия для Y_k

$$Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},t_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x)=$$

$$=g(x)Y_{k-1}(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,\ldots,s_{k-1},x_1,\ldots,x_{k-1})\,,$$

$k = 1,2, \ldots$. (6)

Мы получили детерминированную рекуррентную систему задач Коши (5),(6) для коэффициентов разложения Y по степеням w. Если $Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))$ является характеристическим функционалом для ε, f и y, то

$$Y_k(0,0,s_1,\ldots,s_k,x_1,\ldots,x_k)=i^{-k}\left.\frac{\delta^k Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),0)}{\delta w(s_1,x_1)\ldots\delta w(s_k,x_k)}\right|_{\upsilon=0,u=0}=$$

$$=M\,(y(s_1,x_1)\ldots y(s_k,x_k))\,.$$

Система (5),(6) получена формально, но последнее соображение служит основанием для следующего определения.

Определение. Если существует симметричное по переменным $(s_1,x_1),\ldots,(s_k,x_k)$ решение

$Y_k(\upsilon(\cdot),u(\cdot),s_1,...,s_k,x_1,...,x_k)$ задачи (5),(6), то $Y_k(0,0,s_1,...,s_k,x_1,...,x_k)$ называется моментной функцией порядка k решения задачи (1),(2).

4. Математическое ожидание решения

При $k=1$ решение задачи (5),(6) определяет математическое ожидание решения задачи (1),(2). Выпишем ее

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_1(\upsilon(\cdot),u(\cdot),t,x)=-i\frac{\delta}{\delta\upsilon(t)}\Delta Y_1(\upsilon(\cdot),u(\cdot),t,x)-$$

$$-i\frac{\delta}{\delta u(t,x)}\psi(\upsilon(\cdot),u(\cdot)), \qquad (7)$$

$$Y_1(\upsilon(\cdot),u(\cdot),t_0,x)=g(x)\psi(\upsilon(\cdot),u(\cdot)).$$

Определим функцию $\chi(t_0,t,s)$ переменного s по правилу: $\chi(t_0,t,s)=\mathrm{sign}(s-t_0)$ при $s\in[\min(t_0,t),\max(t_0,t)]$ и $\chi(t_0,t,s)=0$ в противном случае.

Теорема. 1. Пусть V является пространством суммируемых на отрезке T функций, тогда обобщенное решение задачи (7) имеет вид

$$Y_1(\upsilon(\cdot),u(\cdot),t_0,x)=g(x)*F_\xi^{-1}[\psi(\upsilon(\cdot)+i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot),u(\cdot))](x)-$$

$$-i\int_{t_0}^t F_\xi^{-1}[F_x[\frac{\delta\psi(\upsilon(\cdot)+i|\xi|^2\chi(\tau,t,\cdot),u(\cdot))}{\delta u(\tau,x)}](\xi)](x)\,d\tau.$$

Доказательство. Применив преобразование Фурье F_x по переменной x, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_x[Y_1]=i\frac{\delta}{\delta\upsilon(t)}|\xi|^2F_x[Y_1]-iF_x[\frac{\delta}{\delta u(t,x)}\psi(\upsilon(\cdot),u(\cdot))],$$

$$F_x[Y_1(\upsilon(\cdot),u(\cdot),t_0,x)]=F_x[g(x)]\psi(\upsilon(\cdot),u(\cdot)).$$

Это задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с обычной и вариационной производными. Она решается в явном виде [3]

$$F_x[Y_1]=F_x[g(x)]\psi(\upsilon(\cdot)+i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot),u(\cdot))-$$

$$-\int_{t_0}^t F_x[\frac{\delta}{\delta u(s,x)}\psi(\upsilon(\cdot)+i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot),u(\cdot))]\,ds.$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье, получаем решение Y_1. Теорема доказана.

Теорема. 2. Математическое ожидание решения задачи (1),(2) находится по формуле

$$My(t,x)=g(x)*F_\xi^{-1}[\psi(i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot),0)](x)-$$

$$-i\int_{t_0}^t F_\xi^{-1}[F_x[\frac{\delta\psi(i|\xi|^2\chi(\tau,t,\cdot),0)}{\delta u(\tau,x)}](\xi)](x)\,d\tau.$$

Доказательство легко получается из предыдущей теоремы, поскольку $My(t,x)=Y_1(0,0,t,x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фурсиков А.В. О проблеме замыкания для цепи моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе Навье-Стокса, в случае больших чисел Рейнольдса//Доклады РАН, 1991, т.319. С. 83 - 87.

2. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. -М.: Наука, 1980.

3. Задорожний В.Г. О линейном дифференциальном уравнении первого порядка с обычной и вариационной производными//Мат. заметки РАН. 1993. т.53. Вып. 4. С. 36 - 44.