ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

УДК 621.396.669Ж519.724

К ОПТИМИЗАЦИИ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПЛОСКИХ КОНТУРОВ

С.Г. Валюхов, В.А. Костин, Ю.И. Сапронов

Воронежский государственный университет

Дано изложение в единой схеме математических конструкций, реализующих подходы к оптимизации зацеплений вращающихся поверхностей винтовых насосов, общую основу которых составляет метод особой точки гладкого отображения.

При исследовании шестеренчатых зацеплений и при построении кинематически совместимых и оптимально зацепленных пар вращающихся винтовых поверхностей важную роль играет задача построения плоского контура, сопряженного с заданным контуром. Сопряженный контур $\hat{l}$ - это кривая, оптимальная (максимальная) в заданном классе гладких или кусочно гладких контуров, зацепленных[1] с заданным контуром l. Максимальность $\hat{l}$ означает невозможность построения другого контура, совместимого с l и ограничивающего область, в замыкание которой включен $\hat{l}$. Построение сопряженных контуров можно осуществлять различными методами, важнейшим среди которых является метод, основанный на построении аналитической огибающей для параметрического семейства циклоид. Ему эквивалентен метод, основанный на использовании отображения Гаусса (отображения *точка кривой* $\to$ *точка пересечения нормали с базовой окружностью*) [1], [2]. Оба этих метода естественным образом «вкладываются» в метод особой точки, основанный на рассмотрении границы образа отображения двухмерного тора в координатную плоскость (отображение порождено «прокатыванием» исходного контура вокруг базовой окружности) [2], [3].

В случае исходного контура, заданного в виде нулевой линии уровня некоторой гладкой функции, сопряженный контур является дискриминантной кривой, соответствующей некоторому 2-параметрическому семейству функций от одной переменной. Метод дискриминантной кривой особенно удобен в тех ситуациях, в которых возникает необходимость оптимизации алгебраических контуров с вращательной симметрией.

Авторы благодарны С.М.Семенову за полезное обсуждение результатов, изложенных в данной статье[2].

1. Допустимые пары контуров. При описании допустимых пар плоских контуров будем отождествлять координатную плоскость с полем комплексных чисел, считая при этом, что центр вращения первого (левого) контура находится в точке $z=-1$ вещественной оси, а центр вращения второго (правого) контура находится в точке $z=1$ вещественной оси (1 - вещественная единица). Левый контур задается в виде

$$z=-1+F(\psi)=-1+f(\psi)e^{i\psi},\ 1-h\le f(t)\le 1+h$$

($f(t)-(2\pi/n)$ - периодическая функция), а правый - в виде

$$z=1+F^*(\varphi)=\left(1-f^*(\varphi)\right)e^{-i\varphi},\ 1-h\le f^*(t)\le 1+h$$

($f^*(t)-(2\pi/n)$ - периодическая функция).

Пара контуров называется *допустимой*, если контуры допускают одновременное равномерное вращение вокруг своих центров (в противоположных направлениях, но с одинако-

[1] В отличие от топологических зацеплений контуров, рассматриваемых в топологии трехмерных многообразий, здесь рассматривается техническое (шестеренчатое) зацепление.

[2] Основная часть содержания статьи была ранее доложена на конференции «Понтрягинские чтения - X» (Воронеж, 1999) [3].

вой угловой скоростью). Допустимость вращения означает отсутствие точек, общих для внутренностей областей, ограниченных этими контурами (во всех фазах вращения). Контуры называются *зацепленными*, если при неподвижности одного из них появляются фазы вращения второго контура, в которых имеются общие внутренние точки для обоих контуров.

Вращение контуров задается следующими функциями от времени t и геометрических параметров ψ,φ:

$$z_1 = -1 + \mathcal{F}(\psi,t) = -1 + F(\psi)e^{it},$$

$$z_2 = 1 + \mathcal{F}^*(\varphi,t) = 1 + F^*(\varphi)e^{-it} \qquad (1)$$

Общие точки левого и правого сечений в любой момент времени t определяются уравнением

$$\mathcal{F}(\psi,t) - \mathcal{F}^*(\varphi,t) = 2.$$

Контур l_1 называется *вписанным* в контур l_2 (обозначается $l_1 \prec l_2$), если l_1 принадлежит замыканию области, ограниченной контуром l_2.

Определение 1. *Допустимая пара контуров $l,\hat{l}$ называется максимальной, если нет такой допустимой пары контуров $m,\hat{m}$, отличной от $l,\hat{l}$, что $l \prec m$ и $\hat{l} \prec \hat{m}$.*

Определение 2. *Допустимый для l контур $\hat{l}$ называется максимальным для контура l, если нет такого допустимого для l и отличного от $\hat{l}$ контура m, что $\hat{l} \prec m$.*

Максимальный допустимый для l контур $\hat{l}$ называется *сопряженным* (по отношению к l) контуром.

Определение 3. *Два гладких профиля, движение которых задано формулами (1), регулярно соприкасаются в момент $t=t_0$ в точке $\mathbf{r}$, если существует интервал $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ и пара определенных на этом интервале гладких регулярных (с ненулевыми производными) функций $\psi(t),\varphi(t)$ таких, что*

1) $-1+\mathcal{F}(\psi(t_0),t_0) = 1+\mathcal{F}^*(\varphi(t_0),t_0) = \mathbf{r}$,

2) $\mathcal{F}(\psi(t),t) - \mathcal{F}^*(\varphi(t),t) = 2 \quad \forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$,

3) существует окрестность U точки $\mathbf{r}$ такая, что при каждом $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ линии $z=-1+\mathcal{F}(\psi,t)$ и $z=1+\mathcal{F}^*(\varphi,t)$ пересекаются в этой окрестности по единственной точке $-1+\mathcal{F}(\psi(t),t)$ $(=1+\mathcal{F}^*(\varphi(t),t))$.

Все остальные случаи соприкосновения контуров называются особыми.

В аналитической кинематике насосов важнейшую роль играет следующее утверждение [4].

Теорема 1. *Для любой пары гладких совместимых профилей, движение которых задано формулами (1), и имеющих регулярное соприкосновение при $t=t_0$ в точке $z=\mathbf{r}$, с необходимостью выполняется следующее соотношение в этой точке:*

$$\left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi}\right) = 0 \qquad (2)$$

(здесь $(x+iy, u+iv) = xu + yv$ - скалярное произведение)[3].

Соотношение (2) называется *условием ортогональности* (оно означает ортогональность вектора $z=\mathbf{r}$ общему касательном вектору τ к обоим профилям в точке их касания). Утверждение этой теоремы распространяется и на случаи особого соприкосновения, если точки касания являются точками гладкости обоих рассматриваемых контуров.

В дальнейшем мы рассматриваем лишь контуры, регулярно соприкасающиеся со своими сопряженными контурами в каждый момент времени, кроме, может быть, отдельных изолированных значений времени. Это условие означает, что нарушение регулярности соприкосновения может происходить лишь за счет появления особенности или негладкости в точке касания (точки негладкости контуров также будем считать особыми).

2. Сопряженный контур как огибающая для семейства циклоид. Построение сопряженного контура (компьютерное или аналитическое) удобно проводить, разместив профили так, чтобы центр одного из них (левого) был расположен в нуле, а центр другого (правого) - в точке $z=2$. Пусть левый профиль зафиксирован в неподвижном состоянии, а правый движется как плоское твердое тело, жестко скрепленное с кругом радиуса единица, центр которого в начальный момент времени расположен в точке $z=2$, и который равномерно и без скольжения катится по неподвижной окружности $S=\{z\in C : |z|=1\}$. Эта окружность называется *базовой*. Подвижный профиль в начальный момент времени (обозначим его l) зададим в виде $w(\varphi) = f(\varphi)e^{i\varphi}+2,\ 0\le\varphi\le 2\pi$. Движение профиля задается при этом функцией

[3] Здесь и далее мы безоговорочно отождествляем точки комплексной плоскости с соответствующими им радиусами-векторами на координатной плоскости.

$$z(\varphi,t) = e^{it}(e^{it}(w(\varphi)-2)+2) = e^{i(2t+\varphi)}f(\varphi)+2e^{it}. \quad (3)$$

Точка $a \in X$ называется *достижимой из нуля*, если в комплексной плоскости существует непрерывная кривая $z = \alpha(t)$, $0 \le t \le 1$, такая, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = a$ и точка a является единственной общей точкой для данной кривой и множества X.

Определение 4. *Пусть $\{X_t\}_{t\in T}$ - произвольное параметрическое семейство подмножеств в комплексной плоскости C. Геометрической огибающей этого семейства относительно нуля называется совокупность всех достижимых из нуля точек на $\partial(\bigcup_t X)$ - границе объединения множеств данного семейства.*

В определении 4 не предполагается континуальность рассматриваемого семейства множеств (множество индексов T произвольно). Оно может быть и конечным. Очевидно, что геометрическая огибающая относительно нуля для t-параметрического семейства кривых, заданных уравнением (3) (или, что эквивалентно, φ -параметрического семейства циклоид), является сопряженным профилем. Таким образом, контуры, сопряженные к гладким, можно строить как часть аналитической огибающей для гладкого семейства гладких кривых.

Определение 5. *Допустимым (встречным) профилем $\hat{l}$ по отношению к заданному профилю l называется любой профиль, вписанный в сопряженный профиль. Допустимый профиль называется максимальным в заданном классе профилей, если он не вписывается в какой-либо другой допустимый по отношению к l профиль из этого же класса.*

3. Гауссово отображение и сопряженный контур. Пусть $z=r(s)$ - произвольная регулярная параметризация заданного однозначного контура l, а $r = \hat{r}(s)$ - параметризация допустимого встречного контура (если встречный контур является сопряженным, то точки $r(s)$ и $\hat{r}(s)$ совмещаются в единой точке касания при соответствующих расположениях и соответствующих вращениях контуров).

Определение 6. *Контур l, заданный уравнением $z = r(s)$, называется контуром первого рода, если нормаль к l, взятая в его произвольной точке (то есть прямая, проходящая через точку $r(s)$ в направлении, перпендикулярном касательному вектору $\frac{dr(s)}{ds}$), пересекает базовую окружность.*

Для контура первого рода с каждой точкой $r(s)$ связывается *гауссова точка $g(s)$*, как точка на базовой окружности $S = \{z \in C : |z| = 1\}$, ближайшая к $r(s)$ из пары точек в пересечении S с нормалью, взятой в точке $r(s)$. Соответствие

$$s \to g(s) \quad (4)$$

называется *гауссовым отображением*.

Определение 7. *Контур первого рода l, заданный уравнением $z = r(s)$, называется простым, если соответствующее ему гауссово отображение (4) (рассматриваемое как отображение $l \to S$) является диффеоморфизмом. В противном случае контур называется сложным.*

Для точек контура первого рода имеет место представление

$$r(s) = g(s) + \upsilon(s),$$

где $\upsilon(s) = \mu i \frac{dr(s)}{ds}$ - вектор, соединяющий гауссову точку $g(s)$ с точкой $r(s)$. Имеет место представление

$$\upsilon(s) = \xi g(s) + \eta t(s), \quad (5)$$

где $\xi = (\upsilon(s), g(s))$, а $t(s) = ig(s)$ - касательный орт к базовой окружности S в точке $g(s)$ (т.е. $(t(s), g(s)) = 0$). Определим двойственный вектор

$$\hat{\upsilon}(s) = -\xi g^*(s) + \eta t^*(s)\,^4 \quad (6)$$

(см. разложение (5)) и сопряженную точку

$$\hat{r}(s) = g^*(s) + \hat{\upsilon}(s) \quad (7)$$

Контур, заданный уравнением $r = \hat{r}(s)$, обозначим $\hat{l}$.

[4] Комплексное число z^* получается из z сменой знака в вещественной части: $z^* = -\bar{z}$: $\bar{z}$ - число, сопряженное к z).

Теорема 2. *Если $g(s)$ - гауссово отображение для контура первого рода l, заданного уравнением $r=r(s)$, то $g^*(s)$ (см. (6)) является гауссовым отображением для контура $\hat{l}$, заданного уравнением $r=\hat{r}(s)$, где точка $\hat{r}(s)$ определена соотношениями (5)—(7). При этом $\hat{l}$ также является контуром первого рода.*

4. Метод особых точек гладких отображений. Пусть $\mathcal{F}: R^2 \to R^2$ - гладкое преобразование, отображающее произвольную точку $x=(\xi_1,\xi_2)$ координатной плоскости R^2 в точку $y=(\eta_1,\eta_2)$, $\eta_1=\mathcal{F}_1(\xi_1,\xi_2)$, $\eta_2=\mathcal{F}_2(\xi_1,\xi_2)$. Точка $a\in R^2$ называется *регулярной* для отображения $\mathcal{F}$, если якобиан $J(\mathcal{F})(a)$ этого отображения в точке a отличен от нуля. В противном случае (равенства якобиана нулю) точка a называется *особой*.

Если точка a регулярна, то существуют такие окрестности $\mathcal{O}$ и $\mathcal{U}$ точек a и $b=\mathcal{F}(a)$, что $\mathcal{F}$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{O}$ на $\mathcal{U}$ и при этом обратное отображение $\mathcal{F}:\mathcal{U}\to\mathcal{O}$ также является гладким. Данное утверждение является одним из ключевых в курсе современного математического анализа. Оно без особого труда выводится из теоремы о неявной функции. Отображение $\mathcal{F}$ в рассматриваемом случае называется локальным диффеоморфизмом в точке a.

Поведение отображения в окрестности произвольной особой точки может оказаться весьма сложным. Полного описания всех возможных типов поведения до сих пор нет. Оказывается, что и нет необходимости в рассмотрении всех типов, а достаточно изучить лишь простейшие из них - складки и сборки [6], так как только они могут появляться устойчиво (могут быть неустранимыми посредством малых полиномиальных возмущений). К такому выводу пришел в 1955 году американский математик Х.Уитни ([7],[6]), изучавший поведение в целом гладких отображений многомерных пространств.

Напомним, что точка a называется *особой типа складки* (складки Уитни) или, соответственно, *типа сборки* (сборки Уитни) для отображения $\mathcal{F}$, если после некоторых обратимых (диффеоморфных) замен координат в окрестностях точек a и $b=\mathcal{F}(a)$ отображение $\mathcal{F}$ приводится к форме

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1,\\ \eta_2=\xi_2^2\end{cases}$$

или, соответственно, к форме

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1,\\ \eta_2=\xi_2^3+\xi_1\xi_2.\end{cases}$$

Легко увидеть, что при гладком отображении образ окрестности каждой особой точки типа сборки накрывает окрестность образа этой точки. То есть особая точка типа сборки не может отобразиться на граничную точку в образе плоской области (если эта точка принадлежит внутренности области). Точки же с особенностью складки могут отображаться на границу образа области. Нетрудно также заметить, что множество особенностей типа складки и их образы образуют гладкие линии (линии складок). Причем отдельные компоненты этих линий могут «стыковаться» в отдельных точках, являющихся образами сборок. Состыкованные образы линий складок в малой окрестности любой точки стыка напоминают профиль острого шипа или клюва.

В дальнейшем образ множества Σ (множества особых точек) обозначается S и называется *линией особых значений*. Из этих наблюдений вытекает следующее заключение: *граница образа области на плоскости (при гладком отображении) состоит из кусков линий, каждый из которых является либо образом части границы области, либо образом части линии складок.*

Следовательно, линию особых точек можно определять на основе уравнения

$$\left(\frac{\partial\mathcal{F}(t,s)}{\partial s},\frac{1}{2i}\frac{\partial\mathcal{F}(t,s)}{\partial t}\right)=0. \qquad (8)$$

Это же уравнение задает и аналитическую огибающую для s-семейства контуров $\mathcal{F}(t,s)$ [10].

Каждое гладкое отображение $\mathcal{F}:(s,t)\mapsto$ $\mapsto \mathcal{F}_1(s,t)+i\mathcal{F}_2(s,t)$ можно истолковать как гладкое t-параметрическое семейство гладких кривых на плоскости, параметризованных переменной s, и, наоборот, каждое такое семейство задает гладкое отображение из плоской области в комплексную плоскость. Эта связь полезна в обоих направлениях.

Кривая, являющаяся огибающей для заданного t-параметрического семейства кривых, одновременно является множеством особых значений отображения $\mathcal{F}$. Если это отображение находится в общем положении, то множество его особых значений состоит из простых кривых, состыкованных в изолированных особых точках. Простые кривые являются образами кривых (в плоскости переменных s,t), заполненных особыми (для $\mathcal{F}$) точками типа «складка», а изолированные особые точки кривых являются образами изолированных особых точек отображения типа «сборка».

Если задано гладкое отображение $\mathcal{F}:(s,t)\mapsto \mapsto \mathcal{F}_1(s,t)+i\mathcal{F}_2(s,t)$, естественно связанное с гладким t-параметрическим семейством гладких кривых, параметризованных переменной s, то огибающую можно строить в виде образа кривой $\sum$ для отображения $\mathcal{F}$, где $\sum$ - кривая в плоскости переменных s,t, заданная уравнением (8). Поскольку $\sum$ - множество особых точек отображения $\mathcal{F}$, то огибающую можно трактовать как часть границы полного образа $\mathcal{F}$ (см. [10]).

Аналогичные заключения справедливы и в случае отображения $\mathcal{F}:\mathrm{M}\to\mathrm{R}^2$, где M - гладкая поверхность с краем или без края. Точки типа складки или сборки определяются посредством введения локальных координат на поверхности (типы точек не изменяются при заменах координат). Следовательно, если M - гладкая поверхность без края, то граница $\partial\mathcal{F}(\mathrm{M})$ полностью состоит из образов особых точек.

Если отображение $\mathcal{F}$ задано формулой (3), то границу образа $\mathcal{F}$ естественно назвать *геометрически сопряженным контуром*, а множество особых значений S - *аналитически сопряженным контуром*.

Пример. Целочисленная циклоида (отношение радиусов производящих окружностей - целое число) задается уравнением

$$\mathrm{F}(s)=\left(\frac{1}{n}+h\right)e^{i(n+1)s}+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{is},\quad 0<|h|<1.$$

«Прокручивание» циклоиды вокруг нуля задается формулой

$$\mathcal{F}(s,t)=\left(\frac{1}{n}+h\right)e^{i((n+1)s+2t)}+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i(s+2t)}+2e^{it}.$$

Так как

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s}(s,t)=i\left(\left(\frac{1}{n}+h\right)(n+1)e^{i((n+1)s+2t)}+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i(s+2t)}\right)$$

и

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}(s,t)=2i\left(\left(\frac{1}{n}+h\right)e^{i((n+1)s+2t)}+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i(s+2t)}+e^{it}\right)$$

то

$$\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial s}(s,t),\frac{1}{2i}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}(s,t)\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{n}+h\right)(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin(ns)-$$

$$-\left(\frac{1}{n}+h\right)(n+1)\sin((n+1)s+t)+$$

$$+\left(\frac{1}{n}+h\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin(ns)-\left(\frac{1}{n}+1\right)\sin(s+t).$$

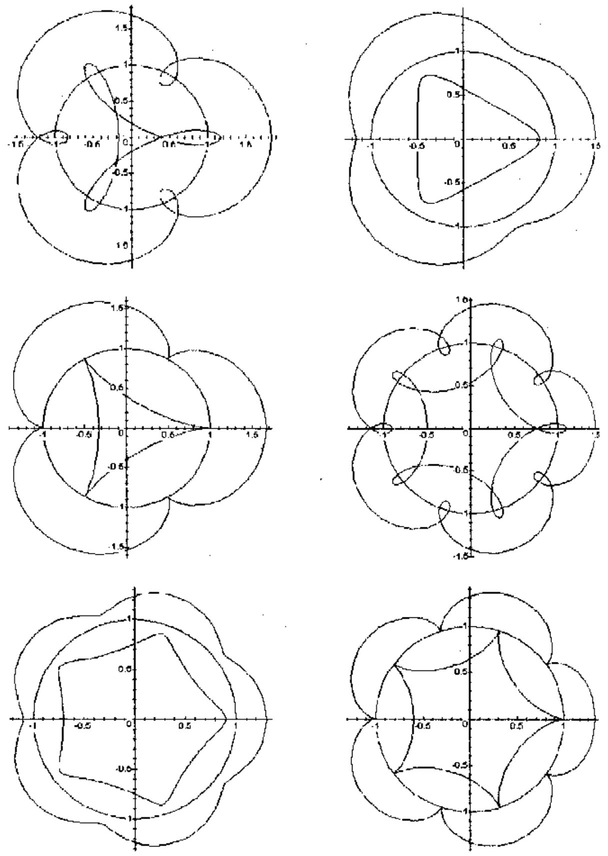

Рис. 1

Следовательно, линия критических точек определяется уравнением

$$(1+nh)(\sin(ns)+\sin((n+1)s+t))+\sin(s+t))=0,$$

следствием которого является соотношение

$$t=-s+\pi.$$

Из этого соотношения получаем уравнение аналитически сопряженного контура (также являющегося целочисленной циклоидой)

$$F^*(s)=\left(\frac{1}{n}+h\right)e^{i(n-1)s}-\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{-is}.$$

Соответствующие пары взаимно аналитически сопряженных циклоид при n=2,3 и h=0,2, 0, -0, 2 изображены на рисунке 1.

6. Симметричные профили и эквивариантные особенности гладких функций. В теории особенностей гладких функций имеется направление, связанное с изучением функций, обладающих симметриями [8], [9] (инвариантных относительно действий групп преобразований плоскости). Особенности функций в условиях групповой симметрии называются *эквивариантными* особенностями (или *G-эквивариантными*, если заранее указана действующая группа *G*).

В вопросах аналитического строения профильных кривых для винтовых насосов важную роль играют функции *V с поворотной симметрией:*

$$V(z)=V(e^{\frac{2\pi i}{n}}z) \qquad \forall z\in C \tag{9}$$

(n - фиксированное целое число n). Соотношение (9) выполняется для функций, допускающих представление в виде

$$V(z)=W(I(z),J_n(z)) \qquad \forall z\in C, \tag{10}$$

$$I(z)=|z|^2,\ \ J_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(\omega^k,z),\ \ \omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

Оказывается, что любой полином (от двух переменных), для которого выполняется соотношение поворотной симметрии (9), допускает представление (10) с единственным полиномом W. Данное утверждение доказывается аналогично теореме о симметрических многочленах. Многочлены I,J_n здесь выполняют роль элементарных симметричных многочленов.

Вопросы строения конечнократных особенностей функций и их морсовизаций естественно включаются в более общую теорию *деформаций особенностей* [6]. Среди всевозможных гладких деформаций выделяются так называемые *версальные* и *миниверсальные* деформации, играющие важную роль в общей теории деформаций. Это связано с тем, что версальные деформации содержат в себе все метаморфозы функции (перестройки линий уровня, расклейки и склейки особых точек, различные бифуркационные эффекты и т.д.), которые могут произойти при произвольном гладком деформировании функции. Гладкая деформация $U(z,\lambda)$ функции $V(x)$ называется версальной, если факторклассы ее системы скоростей деформации $\frac{\partial U}{\partial\lambda_k}(z,0)$ (λ_k - координата λ, $k=1,2,\ \dots\ ,m$) дают систему линейных образующих в локальном кольце особенности V в нуле (рассматриваемом как линейное пространство). Гладкая деформация $U(z,\lambda)$ функции $V(x)$ называется миниверсальной, если факторклассы скоростей данной деформации образуют базис в локальном кольце особенности V в нуле. В частности, деформация

$$V(z)+\sum_{i=1}^{\mu}\lambda_k\omega_k(z),$$

где $\{\omega_k(z)\}$ - произвольный базис локального кольца особенности V в нуле, является миниверсальной.

Посредством миниверсальных деформаций вводятся *бифуркационные диаграммы*, важнейшими среди которых являются *каустики, дискриминантные множества и множества Максвелла.*

Пусть λ принадлежит заданной области управления $\Lambda\subset R^{\mu}$. Через $U\subset C$ обозначим «наблюдаемую» область (в ней и только в ней находятся изучаемые кривые). *Каустика* $\sum$ *- это совокупность тех управлений λ, при которых $V(\cdot,\lambda)$ имеет в U вырожденную критическую точку. Дискриминантное множество D - совокупность управлений λ, при которых $V(\cdot,\lambda)$ имеет в U критическую точку на нулевой линии уровня. Множество Максвелла Δ — совокупность управлений λ, при которых $V(\cdot,\lambda)$ принимает равные значения на паре различных критических точек.*

При изучении критических точек и их локальных морсовизаций можно сократить на единицу количество параметров версальной деформации за счет рассмотрения лишь мономиальных образующих (в локальном кольце особенности) положительной степени (моном нулевой степени отбрасывается). Допустимость такой «экономии» связана, во-первых, с тем, что при дифференцировании постоянные слагаемые функции исчезают и поэтому они не играют никакой роли при определении критических точек и вычислении их кратности. Во-вторых, проистекающую при таком отбрасывании параметра потерю информации в вопросах, связанных с метаморфозами линий уровня, можно компенсировать расширением группы диффеоморфных преобразований аргумента функций посредством добавления преобразований постоянного сдвига значений функций. Сокращенная на один параметр миниверсальная деформация называется ограниченной миниверсальной деформацией. Число входящих в нее управляющих параметров совпадает с коразмерностью особенности.

Имеется трактовка огибающих в виде дискриминантных кривых [10]. Пусть исходное семейство кривых задано в виде линий нулевого уровня для функций из гладкого t-параметрического семейства гладких функций $V(x,y,t)$. Условие касания огибающей кривой $z(t)=x(t)+iy(t)$ всех линий заданного семейства приводит к условию ортогональности градиента V и касательного вектора к огибающей:

$$\left(grad_z V(x(t),y(t),t), \frac{d}{dt}z(t)\right)=0.$$

Из этого соотношения вытекает, что огибающая задается следующей системой уравнений

$$V(x,y,t)=\frac{\partial V}{\partial t}(x,y,t)=0, \qquad (11)$$

которая описывает также те значения x,y, при которых функция $V(x,y,\cdot)$ имеет кратный корень (по переменной t). Следовательно, проекция $(x,y,t)\mapsto(x,y)$ переводит множество решений системы уравнений (11) на дискриминантную кривую гладкого (x,y)-семейства гладких функций $V(x,y,t)$ скалярного аргумента t.

Таким образом, *исследование и построение сопряженных контуров можно также осуществлять посредством теории дискриминантных кривых.*

Пусть l - линия нулевого уровня гладкой функции $V(z)$, $z\in C$. После «прокручивания» l вокруг базовой окружности получим t-семейство кривых в виде нулевых уровней функций из семейства (деформации)

$$V(z,t)=V\left(e^{2it}z+2e^{it}\right),\ z\in C. \qquad (12)$$

Через L обозначим дискриминантную кривую z-семейства (12). Непосредственной проверкой легко устанавливается следующее утверждение.

Теорема 3. *Если гладкая функция* $V(z), z\in C$, *обладает поворотной симметрией, выраженной условием (9), то дискриминантная кривая L, соответствующая z-семейству (12) функций (переменной t), инвариантна относительно поворота плоскости* $z\to e^{\frac{2\pi i}{n}}z$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И. К кинематике винтовых насосов. Труды математического факультета (новая серия). - Воронеж: изд-во ВГУ, 1998. N.3. С.14-19.
2. Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И., Семенов С.М. Зацепления винтовых поверхностей. - Воронеж: изд-во ВГУ, 1999. 131 с.
3. Валюхов С.Г., Костин В.А., Сапронов Ю.И. Особенности гладких отображений и геометрия зацеплений вращающихся деталей винтового насоса. «Понтрягинские чтения — X». Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ. 1999. С.52.
4. Пыж О.А., Харитонов Е.С., Егорова П.Б. Судовые винтовые насосы. - Л.: Судостроение, 1969. 196 с.
5. Балденко Д.Ф., Бидман М.Г., Калишевский В.Л. и др. Винтовые насосы. - М.: Машиностроение, 1982. 228 с.
6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. - М.: Наука, 1982. 304 с.
7. Whitney H., On Singularities of mappings of Euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane // Ann. of Math., 1955. - 65. P.374-410.
8. Poénaru V. Singularités C^∞ en présence de symétrie // Lecture Notes in Math., 1976. V.510, Chapter II. Springer-Verlag. P.61-89.
9. Wall C.T.C. A note on symmetry of singularities // Bull. London Math. Soc., 1980. - 12. P.169-175.
10. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. 262 с.