ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

УДК 517.977.55

ДИСКРЕТНОЕ МАТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛУРЬЕ В СЛУЧАЕ ПОЛНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ ВЕСОВОЙ МАТРИЦЫ ПРИ УПРАВЛЯЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ В КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА[1]

А.И. Перов

Воронежский государственный университет

Приводятся свойства сингулярного оператора Лурье относительно выпуклого конуса допустимых матриц (положительность, монотонность, выпуклость). Показывается, что в случае слабой сингулярности применима теория вогнутых операторов Красносельского. В случае сильной сингулярности оператор Лурье с помощью псевдообратной матрицы продолжается на конус всех самосопряженных неотрицательно определенных матриц. Показывается, что в условиях дискретной частотной теоремы Калмана-Попова-Якубовича уравнение Лурье всегда имеет стабилизирующее решение.

В теории оптимального управления дискретными системами [1-3] важную роль играет дискретное матричное *уравнение Риккати*, которое также называют часто *уравнением Лурье*,

$$S = \Phi^*(S - S\Gamma(C + \Gamma^* S\Gamma)^{-1}\Gamma^* S)\Phi + R .$$

Все встречающиеся матрицы являются комплексными, причем Φ - квадратная $n \times n$ - матрица, Γ - прямоугольная $n \times m$ - матрица, R - квадратная $n \times n$ - матрица, C - квадратная $m \times m$ - матрица; квадратная $n \times n$ - матрица S является искомой (звездочка означает переход к транспонированной и комплексно сопряженной матрице). Кроме этого, предполагается, что матрицы R и C - самосопряженные и неотрицательно определенные: $R^* = R,\ R \ge 0;\ C^* = C,\ C \ge 0$ (неравенства понимаются в смысле квадратичных форм); искомая матрица S также считается самосопряженной и неотрицательно определенной. Мы называем уравнение Лурье *регулярным* или *сингулярным* в зависимости от того, регулярной (det $C > 0$) или сингулярной (det $C = 0$) является матрица C. Настоящая статья посвящена изучению сингулярного случая (регулярный случай был подробно рассмотрен нами в [4]); более определенно - мы рассмотрим весьма важный для приложений случай так называемого «дешевого» управления ($C = 0$), который был предметом исследования в работах П.В.Пакшина [5, 6].

При сделанном нами предположении уравнение Лурье принимает вид

$$S = \mathsf{F}(S) \equiv \Phi(S - S\Gamma(\Gamma^* S\Gamma)^{-1}\Gamma^* S)\Phi + R . \tag{1}$$

Естественно рассматривать это уравнение для тех матриц S, для которых $\Gamma^* S\Gamma > 0$ (такие матрицы будем называть *допустимыми*). Формула (1) показывает, что решениями уравнения Лурье будут те и только те матрицы S, которые являются неподвижными точками *оператора Лурье* F.

Из *дискретной частотной теоремы Калмана-Попова-Якубовича* (см., например, [7]) вытекает, что в рассматриваемом нами случае «дешевого» управления стабилизируемая разрешимость уравнения Лурье (1) имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия

$$\Gamma^*\Gamma > 0, \tag{2}$$

пара (Φ, Γ) стабилизируема, (3)

из $\Phi x + \Gamma u = \theta x$, где $x \in \ker R$, $u \in \ker C$, $|\theta| = 1$ вытекает, что $x = 0$ и $u = 0$(*дискретное частотное условие*). (4)

Отметим, что условие (2) вытекает из (4) при $x = 0$; оно выделено нами отдельно только из соображений удобства. Условие (2) показывает, что матрица Грамма столбцов матрицы Γ является положительно определенной; поэтому столбцы матрицы Γ линейно независимы и, следовательно, $m \le n$. Случай $m = n$ особенно прост: матрицы Γ и R должны быть обратимыми (условие (3) выполнено автоматически), а стабилизирующее решение имеет вид $S = R$. В дальнейшем мы предполагаем условия (2)—(4) выполненными.

Мы хотим доказать стабилизируемую разрешимость уравнения Лурье (1) методом последовательных приближений

$$S_k = \mathrm{F}(S_{k-1}), \ \ k = 1,2,\dots, \tag{5}$$

отправляясь от какой-либо допустимой матрицы S_0, и тем самым доказать теорему Калмана-Попова-Якубовича методом последовательных приближений. Попутно мы развиваем качественную теорию уравнения Лурье [8].

Отметим основные трудности, которые приходится преодолевать в сингулярном случае. Во-первых, построение конуса, инвариантного относительно оператора Лурье. Во-вторых, отделение стабилизирующего решения от других возможных решений уравнения Лурье. В-третьих, установление сходимости последовательных приближений к стабилизирующему решению. Последнее, включая доказательство существования стабилизирующего решения, оказалось достаточно сложным, что потребовало радикального изменения взгляда на оператор Лурье, отразившегося в его продолжении на более широкий конус. Отметим, что прямое применение здесь принципа сжимающих отображений явно исключено.

Рассмотрим замкнутый выпуклый конус всех самосопряженных неотрицательно определенных $n \times n$ - матриц [9, с. 363]

$$\tilde{\mathrm{K}} = \{S : S^* = S, S \geq 0\}. \tag{6}$$

Этот конус впоследствии еще сыграет свою роль, а пока заметим, что сингулярный оператор F непосредственно на нем не определен. Поэтому введем выпуклый *конус допустимых матриц*

$$\mathrm{K} = \{S : S^* = S, S \geq 0, \Gamma^* S \Gamma > 0\}. \tag{7}$$

Построенный конус K не обладает свойством замкнутости, но зато он является, так сказать, «естественной» областью определения оператора F. Значения оператора F, во всяком случае, лежат в более широком конусе $\tilde{\mathrm{K}}$, $\mathrm{F} : \mathrm{K} \to \tilde{\mathrm{K}}$.

Нелинейные свойства оператора Лурье полностью определяются «внутренним» оператором

$$\mathrm{I}(S) = S - S\Gamma(\Gamma^* S\Gamma)^{-1}\Gamma^* S, \tag{8}$$

вариационный смысл которого будет полностью раскрыт несколько позднее, а пока запишем уравнение (1) в краткой форме

$$S = \mathrm{F}(S) \equiv \Phi^* \mathrm{I}(S)\Phi + R. \tag{9}$$

В рассматриваемом нами случае «дешевого» управления синтезированная матрица допускает прозрачное геометрическое описание. Пусть

$$P = P(S) \equiv \Gamma(\Gamma^* S\Gamma)^{-1}\Gamma^* S. \tag{10}$$

С помощью этой матрицы оператор I записывается в виде $\mathrm{I}(S) = S(I - P)$, а синтезированная матрица - в виде $D = (I - P)\Phi$. Нетрудно проверить, что P является проектором ($P^2 = P$), причем S - ортогональным проектором $(P^* S = SP)$ относительно скалярного произведения $(x, y)_S = x^* S y$, которое может и не быть положительно определенным. Поэтому синтезированная матрица есть результат S - ортогонального проектирования на S - ортогональное дополнение к im Γ. Указанные свойства позволяют написать $\mathrm{I}(S) = (I - P^*)S(I - P)$, а уравнение (9) переписать в виде

$$S = D^* S D + R, \text{ где } D = (I - P)\Phi. \tag{11}$$

Приведем без доказательства следующие свойства оператора I, рассматриваемого как оператор из конуса K в конус $\tilde{\mathrm{K}}$:

1) $0 \leq \mathrm{I}(S) \leq S$;

2) $\mathrm{I}(S) = 0 \Leftrightarrow \ker S + \operatorname{im}\Gamma = C^n$;

3) $\mathrm{I}(S) \neq S$;

4) $\Gamma^* \mathrm{I}(S)\Gamma = 0$;

5) $\ker \mathrm{I}(S) = \ker S + \operatorname{im}\Gamma$;

6) $\mathrm{I}(\alpha S) = \alpha \mathrm{I}(S)$ при $\alpha > 0$ (положительная однородность);

7) $\mathrm{I}(S + T) \geq \mathrm{I}(S) + \mathrm{I}(T)$ (полуаддитивность снизу);

8) $\mathrm{I}(S + T) = \mathrm{I}(S) + T$, если $\Gamma^* T \Gamma = 0$;

9) если $S \leq T$, то $\mathrm{I}(S) \leq \mathrm{I}(T)$ (монотонность);

10) $(1 - \alpha)\mathrm{I}(S) + \alpha \mathrm{I}(T) \leq \mathrm{I}((1 - \alpha)S + \alpha T)$ при $0 < \alpha < 1$ (вогнутость).

Для применимости метода последовательных приближений (5) в каком-либо конусе нужно, чтобы он был *инвариантным* относительно оператора F.

Теорема 1. *Конус* K *инвариантен относительно оператора* F *тогда и только тогда, когда матрица R принадлежит этому конусу, т.е.*

$$\Gamma^* R\Gamma > 0 \cdot \tag{12}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть конус K инвариантен относительно F. Возьмем матрицу $S = \Gamma\Gamma^*$ из конуса K. Для нее $\mathsf{F}(S) = R$ и, значит, матрица *R* должна принадлежать конусу K, т.е. имеет место неравенство (12).

Достаточность. Пусть выполнено условие (12). Тогда в силу очевидного неравенства $\mathsf{F}(S) \ge R$, верного для любой матрицы *S* из K, мы видим, что $\Gamma^* T\Gamma \ge \Gamma^* R\Gamma > 0$, т.е. матрица $T = \mathsf{F}(S)$ снова лежит в конусе K. Теорема 1 доказана.

К сожалению, неравенство (12) не вытекает из условий (2)-(4), а есть некоторое дополнительное требование. По существу, все, что мы делаем дальше, связано с изучением случаев, когда неравенство (12) не выполнено.

Лемма 1. *Пусть подпространство L удовлетворяет условиям*

$$L \subseteq \ker R, \;\; \Phi L \subseteq L + \operatorname{im}\Gamma . \tag{13}$$

Тогда пересечение подпространств L и im *Γ тривиально,* $L \cap \operatorname{im}\Gamma = 0$.

Доказательство. Предположим обратное, и пусть подпространство $L \cap \operatorname{im}\Gamma$ имеет ненулевую размерность q. Построим в подпространстве $L + \operatorname{im}\Gamma$ базис $f_1,..., f_d$ так, чтобы векторы $f_1,..., f_{p+q}$ образовывали базис в *L*; $f_{p+1},..., f_d$ было базисом в im Γ, а $f_{p+1},..., f_{p+q}$ - базисом в пересечении $L \cap \operatorname{im}\Gamma$. Поставим в соответствие вектору *x* из *L* столбец $\hat{x}$ из координат $x_1,...,x_{p+q}$ вектора *x* в базисе $f_1,..., f_{p+q}$. Согласно второму из соотношений в (13) для любого *x* из *L* вектор *y* = Φ*x* разлагается по базису $f_1,..., f_d$ с координатами

$$y_i = \sum_{j=1}^{p+q} \varphi_{ij} x_j , \;\; i = 1,...,d .$$

Без ограничения общности можно считать, что оператор Γ переводит векторы $e_1,...,e_m$ базиса $\mathbf{C}^m$ в векторы $f_{p+1},..., f_{p+m}$ соответственно. Определим оператор *K* из *L* в $\mathbf{C}^m$ так, чтобы вектор $z = \Gamma K x$ имел в базисе $f_1,..., f_d$ координаты $z_i = 0$ при $1 \le i \le p$;

$$z_i = \sum_{j=1}^{p+q} k_{ij} x_j , \;\; p+1 \le i \le p+q ;$$

$$z_i = -\sum_{j=1}^{p+q} \varphi_{ij} x_j , \;\; p+q+1 \le i \le p+q+r(=d) ,$$

где матрица (k_{ij}) является произвольной. При выбранном таким образом операторе *K* мы видим, что при любом *x* из *L* вектор $Dx = \Phi x + \Gamma K x$ снова лежит в *L*, причем оператор $D: L \to L$ имеет в базисе $f_1,..., f_{p+q}$ матрицу $\hat{D} = \hat{\Phi} + \hat{\Gamma}\hat{K}$, где $\hat{\Phi} = (\varphi_{ij})$ - квадратная $(p+q)\times(p+q)$ - матрица (*i,j* = 1,…,*p*+*q*), $\hat{\Gamma}$ - прямоугольная $(p+q)\times q$ - матрица, столбцы которой суть $e_{p+1},...,e_{p+q}$, а $\hat{K} = (k_{p+i,j})$ - прямоугольная $q \times (p+q)$ - матрица ($1 \le i \le q$; $j = 1,..., p+q$). Так как матрица *K* - произвольная, то для любого комплексного λ можно указать такую матрицу *K* = *K*(λ), что λ будет собственным значением матрицы $\hat{D}$, $\hat{D}\hat{x} = \lambda\hat{x}$, $\hat{x} \ne 0$. Полагая $\lambda = \theta$, где $|\theta| = 1$, и, переходя к соответствующему вектору *x* из *L*, получаем $\Phi x + \Gamma u = \theta x$, где $u = Kx$. Так как $x \in \ker R$ (в силу первого из соотношений в (13)), $u \in \ker C = \mathbf{C}^m$ и $|\theta| = 1$, то согласно (4) должно быть *x* = 0 и *u* = 0 - вопреки тому, что $\hat{x} \ne 0$. Лемма 1 доказана.

Обозначим через L совокупность всех подпространств *L*, удовлетворяющих условиям (13) (это множество не пусто: например, в него входит *L* = 0). Согласно лемме 1 для каждого такого подпространства *L* существует единственный оператор $K = K(L): L \to \mathbf{C}^m$ такой, что оператор *D*, определенный по правилу $Dx = \Phi x + \Gamma K x$ для *x* из *L*, отображает *L* в себя. Дискретное частотное условие (4) говорит о том, что спектр оператора *D* не пересекается с единичной окружностью. Можно показать, что в L есть максимальное подпространство.

Обозначим через $\mathsf{L}_{\max}$ совокупность всех тех подпространств *L* из L, для которых спектр соответствующего оператора *D* = *D*(*L*) лежит внутри единичного круга. Оказывается, что в $\mathsf{L}_{\max}$ всегда есть максимальное подпространство, которое мы обозначим $L_{\max}$ (т.е. $L_{\max} \in \mathsf{L}_{\max}$ и из $L \in \mathsf{L}_{\max}$ вытекает $L \subseteq \mathsf{L}_{\max}$). По лемме 1 имеем $L_{\max} \cap \operatorname{im}\Gamma = 0$. Значение построенного нами подпространства $L_{\max}$ для развиваемой теории полностью вскрывает приводимая ниже теорема.

Теорема 2. *Ядро стабилизирующего решения S совпадает с подпространством $L_{\max}$, т.е.* $\ker S = L_{\max}$.

Доказательство. Полагая $L = \ker S$, мы в силу уравнения (9) видим, что подпространство L удовлетворяет условиям (13) (при этом мы воспользовались свойством 5) оператора J). Далее, рассмотрим уравнение (11). Так как по предположению S - стабилизирующее решение, то спектр синтезированного оператора D лежит внутри единичного круга. Нетрудно видеть, что согласно (11) оператор D отображает L в себя. Поэтому $L \in \mathrm{L}_{\max}$ и имеет место включение $\ker S \subseteq L_{\max}$.

Пусть теперь L - произвольное подпространство из $\mathrm{L}_{\max}$, λ - произвольное собственное значение оператора $D = D(L)$ и $x_1,\ldots,x_p$ - отвечающая λ жорданова цепочка ($|\lambda|<1; x_1,\ldots,x_p \in L$),

$$Dx_1 = \lambda x_1,\; Dx_2 = \lambda x_2 + x_1,\; \ldots,\; Dx_p = \lambda x_p + x_{p-1}.$$

Проверим, что все векторы $x_1,\ldots,x_p$ содержатся в S. Доказывать это утверждение будем индукцией по номеру k вектора x_k ($k = 1,\ldots,p$). Проведем только шаг индукции. Пусть $x_1,\ldots,x_{k-1} \in \ker S$; проверим, что $x_k \in \ker S$. Из уравнения (9) получаем

$$x_k^* S x_k = x_k^* \Phi^* \mathrm{J}(S) \Phi x_k + x_k^* R x_k.$$

Так как по условию $x_k \in R$ (ибо $L \subseteq \ker R$) и $\Phi x_k = \lambda x_k + x_{k-1} - \Gamma K x_k$, то в силу свойства 4) оператора $\mathcal{J}$ находим

$$\left(1-|\lambda|^2\right) x_k^* S x_k + |\lambda|^2 x_k^* S\Gamma\left(\Gamma^* S \Gamma\right)^{-1} \Gamma^* S x_k = 0.$$

Из неравенства $|\lambda|<1$ вытекает, что $Sx_k = 0$ и, значит, $x_k \in \ker S$. Шаг индукции проведен. Так как L есть прямая сумма корневых подпространств оператора D, то нами доказано включение $\ker S \subseteq L_{\max}$. Теорема 2 полностью доказана.

Введем в рассмотрение новый выпуклый конус

$$\mathrm{K}_{\max} = \{S : S^* = S,\;\; S \ge 0,\;\; \ker S \subseteq L_{\max}\}. \qquad (14)$$

Он так же, как и конус $\mathcal{K}$, не является замкнутым, но у него есть одно неоспоримое преимущество - он является инвариантным относительно оператора $\mathcal{F}$ без всяких дополнительных ограничений (см. ниже теорему 3). Нетрудно видеть, что $\operatorname{int}\widetilde{\mathrm{K}} = \operatorname{int}\mathrm{K} = \operatorname{int}\mathrm{K}_{\max} \subset \mathrm{K}_{\max} \subset \mathrm{K} \subset \widetilde{\mathrm{K}}$.

Теорема 3. *Конус* $\mathrm{K}_{\max}$ *инвариантен относительно оператора $\mathcal{F}$, т.е.* $\mathrm{F}(\mathrm{K}_{\max}) \subseteq \mathrm{K}_{\max}$.

Доказательство. Пусть S из $\mathrm{K}_{\max}$. Покажем, что $T = \mathrm{F}(S)$ также принадлежит $\mathrm{K}_{\max}$. Действительно, если $x \in \ker T$, то согласно (9) имеем $x \in \ker R$ и $\Phi x \in \ker \mathrm{J}(S) = \ker S + \operatorname{im}\Gamma$ (см. свойство 5) оператора $\mathcal{J}$). Так как $\ker S \subseteq L_{\max}$, то $\Phi x \in L_{\max} + \operatorname{im}\Gamma$. Можно показать, что отсюда вытекает, что $x \in L_{\max}$, т.е. $\ker T \subseteq L_{\max}$. Теорема 3 доказана.

В процедуре построения «элемента, идущего вперед» [10, с. 115], важное место занимает приводимая ниже лемма 2. Пусть S - произвольная самосопряженная и неотрицательно определенная матрица. Обозначим через $\mathcal{T}$ совокупность всех матриц T, которые удовлетворяют условиям

$$0 \le T \le S,\;\; \Gamma^* T \Gamma = 0. \qquad (15)$$

Конечно, предполагается, что матрица T является самосопряженной.

Лемма 2. *В совокупности $\mathcal{T}$ всегда есть максимальный элемент, т.е. такая матрица* $[S]$, *что*

$[S] \in \mathrm{T}$ *и* $T \le [S]$ *для любой матрицы* T *из* $\mathcal{T}$. (16)

Доказательство этого утверждения можно найти в [9, гл. VIII, § 7, задачи 205-208], где приведена также формула $[S] = S^{1/2} Q S^{1/2}$ (Q - ортпроектор на ортогональное дополнение к подпространству $S^{1/2}\operatorname{im}\Gamma$).

Квадратные скобки $[\;]: \widetilde{\mathrm{K}} \to \widetilde{\mathrm{K}}$ обладают следующими свойствами, аналогичными свойствам оператора J:

1) $0 \le [S] \le S$;
2) $[S] = 0 \Leftrightarrow \ker S + \operatorname{im}\Gamma = \mathbf{C}^n$;
3) $[S] = S \Leftrightarrow \Gamma^* S \Gamma = 0$;
4) $\Gamma^* [S] \Gamma = 0$;
5) $\ker [S] = \ker S + \operatorname{im}\Gamma$;

6) $[\alpha S]=\alpha[S]$ при $\alpha>0$ (положительная однородность);

7) $[S+T]\geq[S]+[T]$ (полуаддитивность снизу);

8) $[S+T]=[S]+T$, если $\Gamma^*T\Gamma=0$;

9) если $S\leq T$, то $[S]\leq[T]$ (монотонность);

10) $(1-\alpha)[S]+\alpha[T]\leq[(1-\alpha)S+\alpha T]$

при $0<\alpha<1$ (вогнутость);

11) $[[S]]=[S]$ (идемпотентность);

12) $[S]=\mathsf{J}(S)$, если $\Gamma^*S\Gamma>0$;

13) оператор $[\ ]:\tilde{\mathsf{K}}\to\tilde{\mathsf{K}}$ непрерывен в следующем смысле: если неубывающая (невозрастающая) последовательность S_k сходится к S, то неубывающая (невозрастающая) последовательность $[S_k]$ сходится к $[S]$.

Свойство 12) говорит о вариационном характере оператора J (см. лемму 2). Свойства 12) и 13) означают, что оператор [ ] является непрерывным (в указанном выше смысле) продолжением оператора J с конуса $\mathcal{K}$ на конус $\tilde{\mathsf{K}}$.

Рассмотрим *обобщенное уравнение Лурье*

$$S=\tilde{\mathsf{F}}(S)\equiv\Phi^*[S]\Phi+R, \tag{17}$$

которое в силу свойства 12) превращается в уравнение Лурье (9), если матрица S принадлежит конусу $\mathcal{K}$. *Обобщенный оператор Лурье* $\tilde{\mathsf{F}}:\tilde{\mathsf{K}}\to\tilde{\mathsf{K}}$ является непрерывным (в указанном выше смысле) продолжением оператора $\tilde{\mathsf{F}}:\mathsf{K}\to\tilde{\mathsf{K}}$ с конуса $\mathcal{K}$ на весь конус $\tilde{\mathsf{K}}$. Ясно, что любое решение уравнения Лурье (9) одновременно представляет собой и решение обобщенного уравнения Лурье (17).

Рассмотрим вместо (5) метод последовательных приближений

$$\tilde{S}_k=\tilde{\mathsf{F}}(\tilde{S}_{k-1}),\ \ k=1,2,\dots. \tag{18}$$

Мы видим, что он беспрепятственно определен для любой матрицы $\tilde{S}_0$ из конуса $\tilde{\mathsf{K}}$, так как конус $\tilde{\mathsf{K}}$ инвариантен относительно оператора $\tilde{\mathsf{F}}$. Выберем из последовательностей (18) «минимальную», положив

$$\tilde{U}_k=\mathsf{F}(\tilde{U}_{k-1}),\ \ k=1,2,\dots,\ \ \tilde{U}_0=0. \tag{19}$$

Проверим, что последовательность (19) неубывающая. Неравенство $\tilde{U}_0\leq\tilde{U}_1$ очевидно. Проведем шаг математической индукции: если $\tilde{U}_{k-1}\leq\tilde{U}_k$ уже установлено, то в силу монотонности оператора $\tilde{\mathsf{F}}$ получаем $\tilde{U}_k=\tilde{\mathsf{F}}(\tilde{U}_{k-1})\leq\tilde{\mathsf{F}}(\tilde{U}_k)=\tilde{U}_{k+1}$, и наше утверждение доказано. Следующее важное свойство последовательности (19) состоит в том, что

$$\tilde{U}_k\leq\tilde{S}_k,\ \ k=0,1,2,\dots, \tag{20}$$

для любой последовательности (18) (свойство «минимальности»). Действительно, неравенство $\tilde{U}_0\leq\tilde{S}_0$ очевидно, и, если неравенство $\tilde{U}_{k-1}\leq\tilde{S}_{k-1}$ уже установлено (шаг математической индукции), то опять-таки в силу монотонности оператора $\tilde{\mathsf{F}}$ получаем $\tilde{U}_k=\tilde{\mathsf{F}}(\tilde{U}_{k-1})\leq\tilde{\mathsf{F}}(\tilde{U}_k)=\tilde{U}_{k+1}$, и требуемое установлено. Так как в силу условия (3) неубывающая последовательность $\{\tilde{U}_k\}$ ограничена сверху, то она сходится к некоторой матрице $\tilde{U}$ из конуса $\tilde{\mathsf{K}}$. Совершая предельный переход в (19), находим

$$\tilde{U}=\tilde{\mathsf{F}}(\tilde{U}). \tag{21}$$

Мы не только обнаружили решение уравнения (17), но и получили минимальное решение: согласно (20) для любого решения $\tilde{S}$ уравнения (17) имеем оценку $\tilde{U}\leq\tilde{S}$.

Покажем, что в силу дискретного частотного условия (4) любое решение обобщенного уравнения Лурье (17) лежит в конусе $\mathcal{K}$ и потому является решением уравнения Лурье (9). Обозначая через L ядро решения $\tilde{S}$ уравнения (17), мы видим, что оно является пересечением ядер матриц R и $\Phi^*[S]\Phi$, т.е. $x\in L\Leftrightarrow x\in\ker R$ и $\Phi x\in\ker[S]=L+\operatorname{im}\Gamma$ (мы воспользовались свойством 5) квадратных скобок). По лемме 1 получаем $L\bigcap\operatorname{im}\Gamma=0$ и, значит, матрица $\tilde{S}$ лежит в конусе $\mathcal{K}$. Таким образом, нами доказано, что матричное уравнение Лурье (9) имеет решение.

Однако построенное нами решение $U=\tilde{U}$ может не быть стабилизирующим решением. Для того, чтобы получить стабилизирующее решение, нужны дополнительные рассуждения. Положим $R(\varepsilon)=R+\varepsilon I$, где $\varepsilon>0$. При любом ε матрицы Φ, Γ и $R(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям (2)-(4), причем (4) в этом случае совпадает с (2). Нетрудно показать, что построенное нами решение $S(\varepsilon)$ уравнения Лурье

$$S=\Phi^*\mathsf{J}(S)\Phi+R(\varepsilon) \tag{22}$$

является стабилизирующим. Матричная функция S(ε) является неубывающей и потому имеет предел при $0<\varepsilon\to 0$, который мы обозначим через S; ясно, что $S\geq\tilde{\tilde{U}}$. Так как согласно (22) имеем $S(\varepsilon)=\Phi^{*}\mathrm{J}(S(\varepsilon))\Phi+R(\varepsilon)$, то, совершая в последнем равенстве предельный переход при $0<\varepsilon\to 0$, получаем $S=\Phi^{*}\mathrm{J}(S)\Phi+R$ (в силу свойства 13) квадратных скобок). Мы видим, что предельная матрица S является решением обобщенного уравнения Лурье (17). По доказанному выше она одновременно является и решением уравнением Лурье (9). Покажем, что построенная матрица S есть стабилизирующее решение. На самом деле, так как S(ε) - решение уравнения (22), то согласно (11)

$$S(\varepsilon)=D^{*}(\varepsilon)S(\varepsilon)D(\varepsilon)+R(\varepsilon), \tag{23}$$

причем в силу того, что S(ε) - стабилизирующее решение, спектр синтезированной матрицы

$$D(\varepsilon)=\Phi-\Gamma(\Gamma^{*}S(\varepsilon)\Gamma)^{-1}\Gamma^{*}S(\varepsilon)\Phi \tag{24}$$

лежит внутри единичного круга. Так как S(ε) при $0<\varepsilon\to 0$ имеет предел S и этот предел принадлежит $\mathcal{K}$, то $D(\varepsilon)$ при $0<\varepsilon\to 0$ также имеет предел, который мы обозначим через D. Совершив в (23) и (24) предельный переход, мы найдем, что имеют место равенства (10) и (11). По непрерывности спектр матрицы D лежит в замкнутом единичном круге. Покажем, что ни одно из собственных значений матрицы D не попадает на единичную окружность. Пусть $Dx=\theta x$ и $|\theta|=1$. Из (11) получаем, что $x^{*}Sx=(Dx)^{*}S(Dx)+x^{*}Rx$, т.е. $x^{*}Sx=|\theta|^{2}x^{*}Sx+x^{*}Rx$, откуда вытекает, что $x\in\ker R$. Так как $\Phi x+\Gamma u=\theta x$, если придать u соответствующее значение, то в силу условия (4) получаем x = 0 (u = 0). Итак, нами доказано, что S - стабилизирующее решение уравнения Лурье (9).

Центральным результатом статьи является приводимая ниже

Теорема 4. *При любой матрице S_0 из конуса $\mathrm{K}_{\max}$ метод последовательных приближений (5) сходится к стабилизирующему решению S.*

Доказательство проводится по схеме, предложенной в [4, с.27-28]. Прежде всего напомним, что в силу теоремы 3 последовательные приближения (5) можно неограниченно строить для любой начальной матрицы из конуса $\mathrm{K}_{\max}$. Заметив это, найдем такие матрицы $\underline{S}_0$ и $\overline{S}_0$ из конуса $\mathrm{K}_{\max}$, что выполнены требования $\underline{S}_0\leq S_0\leq\overline{S}_0$, причем $\underline{S}_0\leq\mathrm{F}(\underline{S}_0)$ и $\mathrm{F}(\overline{S}_0)\leq\overline{S}_0$.

Последовательности $\underline{S}_k$ и $\overline{S}_k$, получающиеся, если в (5) в качестве начальной матрицы взять $\underline{S}_0$ или $\overline{S}_0$ соответственно, являются монотонными, и $\underline{S}_k\leq S_k\leq\overline{S}_k$ при любом k (в силу монотонности оператора $\mathcal{F}$). Пределы последовательностей $\underline{S}_k$ и $\overline{S}_k$, которые мы обозначим через $\underline{S}$ и $\overline{S}$ соответственно, очевидно, являются решениями уравнения Лурье (9), и, кроме того, удовлетворяют ограничению $\alpha\overline{S}\leq\underline{S}\leq\overline{S}$ при некотором $\alpha\in(0,1)$. Так же, как и в [4], показывается, что отсюда вытекает, что $\underline{S}=S=\overline{S}$. Итак, обе последовательности $\underline{S}_k$ и $\overline{S}_k$ сходятся к одному и тому же пределу S, откуда немедленно вытекает и сходимость последовательности S_k к пределу S. Теорема 4 полностью доказана.

Докажем, что для любого решения S уравнения (9) справедлива оценка снизу

$$R+\Phi^{*}[R]\Phi+\ldots+\Phi^{*}[\ldots[\Phi^{*}[R]\Phi\ldots]\Phi+\ldots\leq S. \tag{25}$$

Введем в рассмотрение частные суммы написанного ряда: $\mathrm{W}_0=0$, $\mathrm{W}_1=R$, $\mathrm{W}_2=R+\Phi^{*}[R]\Phi,\ldots$ (в k-й сумме каждая из матриц Ф* и Ф встречается k-1 раз). Проверим, что при любом k справедливо неравенство $\mathrm{W}_k\leq U_k$, где $U_k=\tilde{U}_k$ есть «минимальная» последовательность (19). На самом деле, $\mathrm{W}_0=0=U_0$, $\mathrm{W}_1=R=U_1$ и, если неравенство $\mathrm{W}_{k-1}\leq U_{k-1}$ уже установлено, то в силу монотонности и полуаддитивности снизу квадратных скобок получаем

$$\mathrm{W}_k=R+\Phi^{*}[R]\Phi+\ldots+\underbrace{\Phi^{*}[\ldots[}_{k-1}\Phi^{*}[R]\Phi]\ldots]\Phi\leq$$
$$\leq R+\Phi^{*}[R+\Phi^{*}[R]\Phi+\ldots+\Phi^{*}[\ldots[\Phi^{*}[R]\Phi]\ldots]\Phi]\Phi=$$
$$=R+\Phi^{*}[\mathrm{W}_{k-1}]\Phi\leq R+\Phi^{*}[U_{k-1}]\Phi=U_k.$$

Шаг математической индукции проведен и требуемая оценка установлена.

Отметим, что в силу свойства 4) квадратных скобок, стоящий в (25) матричный ряд не изменится, если в нем вместо Ф написать Ф+ГK, где K - произвольная $m\times n$-матрица. Выбрав матрицу K так, чтобы спектральный радиус матрицы Ф+ГK был меньше единицы, spr

$(\Phi+\Gamma K)=q<1$, мы видим, что изучаемый матричный ряд сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, сколь угодно близким к числу q^2. Наконец, в некоторых случаях в (25) стоит знак равенства, и получающаяся формула может быть использована для аналитического представления решения.

Работа финансировалась РФФИ (шифр 96-01-00374)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку, Элм, 1989, 329 с.
2. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. H_2-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку, Элм, 1991, 376 с.
3. Фомин В.Н. Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1985, 336 с.
4. Перов А.И. Дискретное матричное уравнение Лурье (регулярный случай)// АиТ, 1995, N 3, с. 21-29.
5. Пакшин П.В. Асимптотические свойства линейных дискретных управлений. I. Асимптотические решения алгебраического уравнения Риккати// Техническая кибернетика, 1991, N 3 с. 226-232.
6. Пакшин П.В. Асимптотические свойства линейных дискретных управлений. II. Робастная стабилизация стохастических систем с мультипликативными шумами// Техническая кибернетика, 1991, N 4, с. 103-114.
7. Антонов В.Г., Лихтарников А.Л., Якубович В.А. Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений// Вестн. Ленинградского ун-та, 1975, N 1. с. 23-31.
8. Perov Anatolii, Voronezh State University, Russia. Discrete matrix Lur'e equation (singular case). International Congress of Mathematicians (Berlin, August 18-27, 1998). Abstracts of Short Communications and Posters Sessions, p. 347.
9. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969, 476 с.
10. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962, 396 с.