ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

*УДК 517.982.27*

# ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

**В.И. Овчинников**

*Воронежский государственный университет*

В работе рассматривается задача об описании интерполяционных пространств в терминах векторнозначных последовательностей в случае пар функциональных решеток. Оказывается, что никакие другие пространства $E$, кроме пространств, полученных конструкцией Кальдерона-Лозановского $E=\varphi(E_0,E_1)$, не порождают интерполяционных пространств вида $l_p(E)$ между $l_p(E_0)$ и $l_p(E_1)$ сразу для всех $p$ из некоторого интервала.

Если некоторое пространство $E$ интерполяционно между банаховыми пространствами $E_0$ и $E_1$, то совсем необязательно пространство $l_p(E)$ будет интерполяционным между $l_p(E_0)$ и $l_p(E_1)$ при каком-либо $1\le p\le\infty$ или при всех таких $p$. Я.Петре еще в работе [1] поставил задачу об описании интерполяционных пространств $E$, которые порождают интерполяционные пространства $l_p(E)$. До сих пор не решена задача о построении интерполяционной конструкции (функтора) $\mathsf{F}$ с произвольной характеристической функцией, которая удовлетворяла бы условию

$$\mathsf{F}\left(l_p(E_0),l_p(E_1)\right)=l_p\left(\mathsf{F}(E_0,E_1)\right) \tag{1}$$

для любой пары банаховых пространств $\{E_0,E_1\}$ и любого $1\le p\le\infty$. Заметим, что второй комплексный метод Кальдерона удовлетворяет условиям (1) при всех $1\le p\le\infty$, но его характеристическая функция всего лишь степенная.

Напомним, что функция $\varphi(s,t)$ двух положительных переменных $s$ и $t$ называется интерполяционной функцией, если она возрастает по $s$ и $t$, и $\lambda\varphi(s,t)=\varphi(\lambda s,\lambda t)$ для $\lambda>0$.

В работе [2] были введены интерполяционные конструкции $\varphi_l(E_0,E_1)$ и $\varphi_u(E_0,E_1)$, где $\varphi$ интерполяционная функция, которые с самого начала предназначались для решения задачи Петре, но решали ее не вполне.

В случае пар функциональных решеток ситуация значительно упрощается, поскольку в этом случае конструкции $\varphi_l(E_0,E_1)$ и $\varphi_u(E_0,E_1)$ сводятся к конструкции Кальдерона-Лозановского

$$\varphi(E_0,E_1)=\left\{x:|x|=\varphi\left(|x_0|,|x_1|\right), где \quad x_0\in E_0, x_1\in E_1\right\},$$

при этом $\varphi\left(l_p(E_0),l_p(E_1)\right)=l_p\left(\varphi(E_0,E_1)\right)$ для любого $1\le p\le\infty$. (Заметим, что мы предполагаем, следуя [3], что функциональная решетка по определению порядково полна.)

Цель настоящей работы — это исследование того, когда пространство вида $E=\varphi(E_0,E_1)$ является единственным интерполяционным пространством между $E_0$ и $E_1$, порождающим интерполяционные пространства $l_p(E)$ между $l_p(E_0)$ и $l_p(E_1)$ для некоторого набора индексов $p$.

Без дополнительных пояснений мы будем использовать основные факты и стандартные обозначения теории интерполяции линейных операторов (см. [4] и [5]).

В работе [5] для любого промежуточного пространства $E$ между банаховыми пространствами $E_0$ и $E_1$ было введено понятие верхнего $\overline{\psi}_E(s,t)$ и нижнего $\underline{\psi}_E(s,t)$ типа. По определению это функции

$$\overline{\psi}_E(s,t)=\sup_{\|x\|_{E_0}\le s,\|x\|_{E_1}\le t}\|x\|_E ,$$

$$\underline{\psi}_E(s,t)=\inf_{f\in(E_0+E_1)^*\ \|f\|_{E_0^*}\le 1/s\ \|f\|_{E_1^*}\le 1/t}\frac{1}{\|f\|_{E^*}} .$$

Если пространство $E$ интерполяционно между $E_0$ и $E_1$, то $\underline{\psi}_E(s,t)\le C\overline{\psi}_E(s,t)$ для некоторой константы $C$. Для многих пар, которые называются спектрально полными, эти функции эквивалентны для любого интерполяционного пространства $E$.

**Лемма 1.** Если пространство $l_1(E)$ интерполяционно между $l_1(E_0)$ и $l_1(E_1)$, то $E \subset \varphi_u(E_0, E_1)$, где $\varphi^*(s,t) = \overline{\psi}_E(s,t)$ - верхний тип пространства $E$ в паре $\overline{E} = \{E_0, E_1\}$, а $\varphi^*(s,t) = 1/\varphi(1/s, 1/t)$.

**Доказательство.** Пусть $\{\sigma_n^0\}$ и $\{\sigma_n^1\}$ произвольные положительные последовательности, которые мы будем называть весами.

Рассмотрим произвольную пару $\{\ l_1(\sigma^0), l_1(\sigma^1)\ \}$ и оператор с нормой, не превосходящей единицы $T : \overline{E} \to \{l_1(\sigma^0), l_1(\sigma^1)\}$, задаваемый последовательностью функционалов $f_n$, то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n^0 \mid f_n(x) \mid \le \|x\|_{E_0}\ ,\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n^1 \mid f_n(x) \mid \le \|x\|_{E_1}\ .$$

Поставим ему в соответствие отображение $U_T$ из пары $\overline{E} = \{E_0, E_1\}$ в пару $\{l_1(E_0), l_1(E_1)\}$ по формуле $U_T(x) = \{f_n(x) x_n\}_{-\infty}^{\infty}$, где $x_n \in \Delta\overline{E} = E_0 \cap E_1$ и $\|x_n\|_{E_0} \le \sigma_n^0$, $\|x_n\|_{E_1} \le \sigma_n^1$.

Очевидно, что $\|U_T\|_{E_0 \to l_1(E_0)} \le 1$ и $\|U_T\|_{E_1 \to l_1(E_1)} \le 1$, поэтому в силу интерполяционности $l_1(E)$ получим $U_T : E \to l_1(E)$, то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid f_n(x) \mid \le \|x_n\|_E \le C\|x\|_E$$

при любом выборе $x_n$. Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n(x)| \sup_{\|x_n\|_{E_0} \le \sigma_n^0, \|x_n\|_{E_1} \le \sigma_n^1} \|x_n\|_E \le C\|x\|_E$$

то есть

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | f_n(x) | \,\overline{\psi}_E(\sigma_n^0, \sigma_n^1) \le C\|x\|_E\ .$$

По определению пространства $\varphi_u(E_0, E_1)$ отсюда следует, что $\|x\|_{\varphi_u(E_0,E_1)} \le C\|x\|_E$, где $\varphi^*(s,t) = \overline{\psi}_E(s,t)$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если пространство $l_\infty(E)$ интерполяционно между $l_\infty(E_0)$ и $l_\infty(E_1)$, то $\varphi_l(E_0, E_1) \subset E$, где $\varphi^*(s,t) = \underline{\psi}_E(s,t)$ - нижний тип пространства $E$ в паре $\overline{E} = \{E_0, E_1\}$.

**Доказательство.** Пусть $x \in \varphi_l(E_0, E_1)$, тогда по определению (см. [2]) для некоторых весов $\omega^0, \omega^1$ и оператора $T : \{\ l_\infty(\omega^0), l_\infty(\omega^1)\ \} \to \overline{E}$ имеем $x = T(\alpha_\varphi(\omega^0, \omega^1))$, где $\alpha_\varphi(\omega^0, \omega^1) = \{\varphi(1/\omega_n^0, 1/\omega_n^1)\}$.

По определению нижнего типа пространства $E$ можно подобрать функционалы $f_n \in (E_0 + E_1)^*$ и элементы $x_n$ так, чтобы $\varphi(1/\omega^0, 1/\omega^1) = (1-\varepsilon) f_n(x_n)$, причем $\omega_n^0 \|f_n\|_{E_0^*} \le 1$, $\omega_n^1 \|f_n\|_{E_1^*} \le 1$, $\|x_n\|_E \le 1$.

Тогда отображение $V : \{x_n\} \to \{f_n(x_n)\}$ действует из $l_\infty(E_0)$ в $l_\infty(\omega^0)$ и из $l_\infty(E_1)$ в $l_\infty(\omega^1)$.

Поэтому оператор $TV : \{l_\infty(E_0), l_\infty(E_1)\} \to \{E_0, E_1\}$ и $TV(\{x_n\}) = (1-\varepsilon)x$. Поскольку $l_\infty(E)$ - интерполяционно между $l_\infty(E_0)$ и $l_\infty(E_1)$, получим $x \in E$. Лемма доказана.

Пусть пара $\overline{E} = \{E_0, E_1\}$ спектрально полна, тогда верхний и нижний типы пространства $E$ совпадают с точностью до эквивалентности. Обозначим $\varphi(s,t) = \overline{\psi}_E^*(s,t) \quad \underline{\psi}_E^*(s,t)$, тогда получим следующее следствие Лемм 1 и 2.

**Следствие 1.** Если для некоторого промежуточного пространства $E$, пространство $l_1(E)$ интерполяционно между $l_1(E_0)$ и $l_1(E_1)$, а $l_\infty(E)$ интерполяционно между $l_\infty(E_0)$ и $l_\infty(E_1)$, то для некоторой интерполяционной функции $\varphi$ оказывается, что $\varphi_l(E_0, E_1) \subset E \subset \varphi_u(E_0, E_1)$.

Если пара $\overline{E}$ - ручная, т.е. $\varphi_l(E_0, E_1) = \varphi_u(E_0, E_1)$, в частности, если $\overline{E}$ - пара функциональных решеток, то получается полное описание пространства $E$.

**Следствие 2.** Если пара $\overline{E}$ - ручная и спектрально полная, то любое пространство $E$ такое, что $l_1(E)$ интерполяционно между $l_1(E_0)$ и $l_1(E_1)$, а $l_\infty(E)$ интерполяционно между $l_\infty(E_0)$ и $l_\infty(E_1)$, имеет вид $E = \varphi_l(E_0, E_1) = \varphi_u(E_0, E_1)$ для некоторой интерполяционной функции $\varphi$.

Таким образом, для пары функциональных решеток $\overline{E}$ то, что $l_1(E)$ интерполяционно между $l_1(E_0)$ и $l_1(E_1)$, а $l_\infty(E)$ интерполяционно между $l_\infty(E_0)$ и $l_\infty(E_1)$, эквивалентно тому, что $l_p(E)$ интерполяционно между $l_p(E_0)$ и $l_p(E_1)$ для любого $p \in [1, \infty]$.

Оказывается, что в случае если на пространства $E_0$ и $E_1$ наложены дополнительные условия, то отрезок $[1, \infty]$ можно сузить.

**Теорема 2.** Пусть $E$ такое интерполяционное пространство между $L_{p_0}(0,\infty)$ и $L_{p_1}(0,\infty)$, где $1 \le p_0 \le p_1 < \infty$, что $l_{p_0}(E)$ интерполяционно между $l_{p_0}(L_{p_0})$ и $l_{p_0}(L_{p_1})$, а $l_{p_1}(E)$ интерполяционно между $l_{p_1}(L_{p_0})$ и $l_{p_1}(L_{p_1})$, тогда $E$ совпадает с пространством Орлича $\varphi^*(L_{p_o}, L_{p_1})$.

**Доказательство.** В силу интерполяционности $E$ мы можем эквивалентно перенормировать его таким образом, что $E$ будет симметричным пространством. Обозначим через $\varphi(s,t)$ тип пространства $E$ между $L_{p_0}$ и $L_{p_1}$, который, в силу Леммы 2 из [6], находится из равенства $\varphi_E(t)=\varphi\left(t^{1/p_o},t^{1/p_1}\right)$, где $\varphi_E(t)$ - фундаментальная функция симметричного пространства $E$.

Рассмотрим произвольные веса $\{\lambda_n\},\{\mu_n\}$ и положительный оператор $T$ с нормой не превосходящей единицы, действующий из $\{L_1,L_{p_1/p_0}\}$ в $\left\{ l_1\left(\lambda^{p_0}\right), l_1\left(\mu^{p_0}\right) \right\}$. Тогда сублинейный оператор $U(x)=(T(|x|^{p_0}))^{1/p_0}$ с единичной нормой действует из $L_{p_1}$ в $l_{p_0}(\lambda)$ и из $L_{p_0}$ в $l_{p_0}(\mu)$.

Зафиксируем элемент $a\in E$. Тогда по теореме Канторовича-Банаха (см.[7] ) найдется линейный оператор $S$ такой, что $S(|a|)=U(a)$ и $|S(x)|\le U(x)$ для всех $x\in L_{p_0}+L_{p_1}$. Оператор $S$ действует из пары $\{L_{p_0},L_{p_1}\}$ в пару $\{l_{p_0}(\lambda),l_{p_0}(\mu)\}$ с нормой не превосходящей единицы.

Обозначим $f_n$ линейные функционалы, которые задают этот оператор $S$, и рассмотрим линейный оператор $W(x)=\{f_n(x)x_n\}_{-\infty}^{\infty}$, где $\|x_n\|_{L_{p0}}\le\mu_n$, $\|x_n\|_{L_{p1}}\le\lambda_n$. Тогда $W:\{L_{p_0},L_{p_1}\}\to\{l_{p_0}(L_{p_0}),l_{p_0}(L_{p_1})\}$, и поэтому $W$ ограниченно действует из $E$ в $l_{p_0}(E)$, и

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|f_n(x)|\,\|x_n\|_E\right)^{p_0}\right)^{1/p_0}\le C\|x\|_E$$

независимо от выбора последовательности $x_n$.

Взяв supremum по всем $\{x_n\}$ с выбранными ограничениями, получим

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(|f_n(x)|\,\varphi(\lambda_n,\mu_n)\right)^{p_0}\right)^{1/p_0}\le C\|x\|_E .$$

Поэтому $S(|a|)\in l_{p_0}(\varphi(\lambda,\mu))$, и $U(a)\in l_{p_0}(\varphi(\lambda,\mu))$, и $\left(T\left(|a|^{p_0}\right)\right)^{1/p_0}\in l_{p_0}(\varphi(\lambda,\mu))$. Значит $\left(T\left(|a|^{p_0}\right)\right)\in l_1(\varphi^{p_0}(\lambda,\mu))$ и $\left\|T\left(|a|^{p_0}\right)\right\|_{l_1(\varphi^{p_0}(\lambda,\mu))}\le\|a\|_E^{p_0}$. Поскольку $T$ - произвольный положительный оператор с единичной нормой, действующий из $\{L_1,L_{p_1/p_0}\}$ в пару $\{l_1(\lambda),l_1(\mu)\}$, то так же, как и в Теореме 3 из [4], получим

$$\left\|\,|a|^{p_0}\right\|_{\varphi^{*\{p_0\}}\left(L_1,L_{p_1/p_0}\right)}\le C\sup_T\left\|T\left(|a|^{p_0}\right)\right\|_{l_1\left(\varphi^{p_0}(\lambda,\mu)\right)},$$

где $\phi^{\{p\}}(s,t)$ обозначает функцию $\phi^p\left(s^{1/p},t^{1/p}\right)$.

По определению конструкции Кальдерона-Лозановского включение $|a|^{p_0}\in\varphi^{*\{p_0\}}\left(L_1,L_{p_1/p_0}\right)$ эквивалентно включению $|a|\in\varphi^*\left(L_{p_0},L_{p_1}\right)$. Таким образом $E\subset\varphi^*\left(L_{p_0},L_{p_1}\right)$.

Докажем теперь обратное вложение. Если $p_1=\infty$, то по Лемме 2 $\varphi^*\left(L_{p_0},L_{p_1}\right)=\varphi_l^*\left(L_{p_0},L_{p_1}\right)\subset E$ и утверждение доказано. Таким образом мы будем считать, что $1\le p_0<p_1<\infty$. Обозначим через $q$ дополнительные показатели: $1/q_0+1/p_0=1$, $1/q_1+1/p_1=1$.

Будем предполагать, что пересечение $L_{p_0}\cap L_{p_1}$ плотно в $E$, то есть $E^0=E$. В противном случае рассмотрим $E^0$ вместо $E$. Для него, как нетрудно видеть, условия теоремы (при $p_0<p_1<\infty$) выполняются.

Для любых весов $\alpha$ и $\beta$ и любого линейного оператора $T:\{l_{p_1}(\alpha),l_{p_1}(\beta)\}\to\{L_{p_0},L_{p_1}\}$ мы будем иметь $T:l_{p_1}(\varphi(\alpha,\beta))\to E$. В самом деле, любой такой оператор порождает оператор $V_T:\{l_{p_1}(L_{p_0}),l_{p_1}(L_{p_1})\}\to\{L_{p_0},L_{p_1}\}$, который является суперпозицией $T$ и оператора $V:\{x_n\}\to\{f_n(x_n)\}$, где $\|f_n\|_{(L_{p0})^*}=\alpha_n$, $\|f_n\|_{(L_{p1})^*}=\beta_n$. По условию $V_T:l_{p_1}(E)\to E$, отсюда, если перебрать все операторы $V$, порожденные функционалами $f_n$, легко получить, что $T:l_{p_1}(\varphi(\alpha,\beta))\to E$.

Для сопряженного оператора $T^*:\{L_{q_0},L_{q_1}\}\to\{l_{q_1}(1/\alpha),l_{q_1}(1/\beta)\}$ соответственно получим, что $T^*:E^*\to l_{q_1}\left(\varphi^*(1/\alpha,1/\beta)\right)$. Заметим, что оператор $S:\{L_{q_0},L_{q_1}\}\to\{l_{q_1}(1/\alpha),l_{q_1}(1/\beta)\}$ будет сопряженным к некоторому оператору $T$ тогда и только тогда, когда порождающие его функционалы имеют интегральный вид.

Покажем, что $E^*\subset\varphi\left(L_{q_0},L_{q_1}\right)$. Пусть $a\in E^*$, рассмотрим произвольный положительный оператор $P$ с нормой не превосходящей единицы, действующий из $\{L_{q_0/q_1},L_1\}$ в пару весовых пространств $\{l_1(1/\alpha^{q_1}), l_1(1/\beta^{q_1})\}$. Дополнительно предположим, что функционалы, определяющие этот оператор, задаются функциями из $L_\infty \bigcap L_{q_0/(q_0-q_1)}$.

Оператор $Q(x)=(P(|x|^{q_1}))^{1/q_1}$ будет сублинейным и отображает $\{L_{q_0}, L_{q_1}\}$ в $\{l_1(1/\alpha^{q_1}), l_1(1/\beta^{q_1})\}$. По теореме Хана-Банаха-Канторовича найдется линейный оператор $T$ такой, что $T(a)=Q(a)$ и $|T(x)|\le Q|(x)|$.

Определяющие его функционалы будут непрерывны относительно полунорм вида

$$p_n(x)=\left(\int_0^\infty y_n(s)\;|\;x(s)\;|^{q_1}\,ds\right)^{1/q_1}$$

поэтому эти функционалы имеют интегральный вид. Поэтому для такого оператора $T: E^* \to l_{q_1}(\varphi^*(1/\alpha, 1/\beta))$. Поскольку $a\in E^*$, то $T(a)\in l_{q_1}(\varphi^*(1/\alpha, 1/\beta))$ и, следовательно, $P(|a|^{q_1})\in l_1(\varphi^{*q_1}(1/\alpha, 1/\beta))$ и

$$\left\|P\left(\;|a|^{q_1}\right)\right\|_{l_1\left(\varphi^{*q_1}(1/\alpha,1/\beta)\right)}=\left\|P\left(\;|a|^{q_1}\right)\right\|_{l_1\left(\varphi^{\{q_1\}*}\left(1/\alpha^{q_1},1/\beta^{q_1}\right)\right)}\le C$$

независимо от выбора оператора $P$.

Следовательно, как и в Теореме 3 из [4], получим $|a|^{q_1}\in\varphi^{\{q_1\}}(L_{q_0/q_1}, L_1)$. То есть $|a|\in\varphi(L_{q_0}, L_{q_1})$. Таким образом вложение $E^*\subset\varphi(L_{q_0}, L_{q_1})$ доказано.

Следовательно, $\varphi^*(L_{p_0}, L_{p_1})\subset E''$. Поскольку $1\le p_0<p_1<\infty$, пространство Орлича $\varphi^*(L_{p_0}, L_{p_1})$ совпадает с замыканием $L_1\bigcap L_\infty$ в $\varphi^*(L_{p_0}, L_{p_1})$. Поэтому $\varphi^*(L_{p_0}, L_{p_1})\subset(E'')^0=E^0$. Таким образом

$$\varphi^*(L_{p_0}, L_{p_1})\subset E^0\subset\varphi^*(L_{p_0}, L_{p_1}).$$

Теорема доказана.

Эта теорема допускает следующее распространение на пространства Орлича.

**Следствие 3.** Если пространство $l_{p_0}(E)$ интерполяционно между $l_{p_0}(L^*_{N_0})$ и $l_{p_0}(L^*_{N_1})$ и $l_{p_1}(E)$ интерполяционно между $l_{p_1}(L^*_{N_0})$ и $l_{p_1}(L^*_{N_1})$, где пространства Орлича $L^*_{N_0}$ и $L^*_{N_1}$ $p_0$-выпуклы и $p_1$-вогнуты, то $E=\varphi(L^*_{N_0}, L^*_{N_1})$ для некоторой интерполяционной функции $\varphi$.

**Доказательство.** Как показано в [8], условие $p_0$-выпуклости и $p_1$-вогнутости для пространств Орлича $L^*_{N_0}$ и $L^*_{N_1}$ означает, что найдутся интерполяционные функции $\varphi_0$ и $\varphi_1$ такие, что $L^*_{N_0}=\varphi_0(L_{p_0}, L_{p_1})$, $L^*_{N_1}=\varphi_1(L_{p_0}, L_{p_1})$. Поэтому в силу Теоремы 1 $l_{p_0}(E)$ будет интерполяционно между $l_{p_0}(L_{p_0})$ и $l_{p_0}(L_{p_1})$ и $l_{p_1}(E)$ будет интерполяционно между $l_{p_1}(L_{p_0})$ и $l_{p_1}(L_{p_1})$. Тогда по Теореме 2 пространство $E$ является пространством Орлича. Но любое интерполяционное пространство Орлича между пространствами Орлича имеет вид $L^*_N=\varphi(L^*_{N_0}, L^*_{N_1})$, что и требовалось доказать.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Peetre J. Sur l'utilisation des suites inconditionellement sommable des espaces d'interpolation // Rend.Semin.mat.Univ.Padova. 1971. V.46. P.173—190.
2. Овчинников В.И. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика // Функц. анализ и его прил. 1976. Т.10. В.4. С.45-54.
3. Lindenstrauss J., Tsafriri J. Classical Banach Spaces II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1978.
4. Ovchinnikov V.I. The method of orbits in interpolation theory. Mathematical Reports, V.1, part 2. Chur: Harwood Academic Pbl., 1984.
5. Дмитриев В.И., Крейн С.Г., Овчинников В.И. Основы теории интерполяции линейных операторов // В сб. «Геометрия линейных пространств и теория операторов». Ярославль, 1977. С.31-74.
6. Берколайко М.З., Овчинников В.И. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1983. Т.161. С.3—17.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: «Наука», 1977.
8. Бухвалов А.В. Теоремы об интерполяции операторов в пространствах со смешанной нормой // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Изд-во Ярослав. гос. ун-та, 1984. С.90-105.