ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 1999, в. 1

УДК 517.98

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ВСПЛЕСКИ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ И РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННЫМИ КОНСТАНТАМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

И.Я. Новиков

Воронежский государственный университет

В статье рассматриваются ортонормированные базисы специального вида, так называемые нестационарные ортогональные всплески. Важнейшим свойством всплесков является одновременная локализованность по времени и частоте, которая характеризуется константой неопределенности. В статье доказано, что константы неопределенности нестационарных всплесков, построенных при помощи классических масштабирующих фильтров Добеши, не ограничены. Однако, при использовании в конструкции нестационарных бесконечно дифференцируемых всплесков с компактным носителем модифицированных фильтров Добеши, введенных автором, мы получаем нестационарные бесконечно дифференцируемые всплески с компактными носителями и равномерно ограниченными константами неопределенности.

ВВЕДЕНИЕ

Функция $\psi\in L^2(R)$ называется стационарным ортонормированным всплеском, если ее нормированные сжатия и сдвиги $\psi_{jk}(t):=2^{j/2}\psi(2^j t-k)$; $j,k\in Z$; $t\in R$ образуют ортонормированный базис в $L^2(R)$. Различные конструкции стационарных ортонормированных всплесков описаны, например, в монографиях И.Мейера [2], И.Добеши [1] и в обзорных статьях [3], [4].

В статье рассматривается более общее понятие нестационарных ортогональных всплесков, которое состоит в том, что функции ψ_{jk}, оставаясь 2^{-j}-сдвигами функций ψ_{j0}, не являются, вообще говоря, сжатиями функций ψ_{0k}. Эта концепция введена в [5], [6]. Оказывается, что это обобщение ведет к интересным базисам в $L^2(R)$. Например, из результатов работ [7] и [8] следует, что не существует стационарных ортогональных бесконечно дифференцируемых всплесков с компактным носителем. Однако в нестационарной ситуации это возможно, см. [5] и [9].

Свойства всплесков в пространствах, отличных от $L^2(R)$, зависят от их локализации во времени и по частоте. В теории всплесков локализация φ характеризуется так называемым радиусом автокорреляционной функции $\Phi(t):=\int_R\varphi(s)\varphi(s-t)ds$, который определяется формулой

$$\Delta(\Phi):=\left\{\int_R t^2|\Phi(t)|^2dt\Big/\int_R|\Phi(t)|^2dt\right\}^{1/2} \text{ - радиус } \Phi.$$

Подобная константа для преобразования Фурье $\hat\Phi(\omega):=\int_R\Phi(t)e^{-i\omega t}dt$ равна

$$\Delta(\hat\Phi):=\left\{\int_R \omega^2|\hat\Phi(\omega)|^2d\omega\Big/\int_R|\hat\Phi(\omega)|^2d\omega\right\}^{1/2} \text{ - радиус } \hat\Phi.$$

Произведение радиусов $\Delta(\Phi)\Delta(\hat\Phi)$ называется константой неопределенности Φ.

Всюду в дальнейшем мы обозначаем заглавной буквой автокорреляционную функцию для функции, обозначенной прописной буквой.

Очевидно, что для стационарных всплесков константы неопределенности $\Delta(\Phi_{j,k})\Delta(\hat\Phi_{j,k})$ не зависят от j,k.

В данной статье доказано, что константы неопределенности нестационарных всплесков, построенных в [9], не ограничены (Теорема 2.2). Однако, при использовании в конструкции нестационарных бесконечно дифференцируемых всплесков с компактным носителем модифицированных фильтров Добеши, введенных в [13], вместо классических, использованных в [9], мы получаем нестационарные бесконечно дифференцируемые всплески с компактными носителями и равномерно ограниченными константами неопределенности (Теорема 5.1).

Статья имеет следующую структуру. В § 2 приводятся оценки констант неопределенности для нестационарных всплесков, построенных в [9]. В § 3 описывается конструкция нестационарных ортонормированных бесконечно дифференцируемых всплесков с компактными носителями на основе модифицированных фильтров Добеши. В § 4 доказываются свойства этой системы. § 5 посвящен доказательству равномерной ограниченности констант неопределенности нестационарных всплесков, определенных при помощи модифицированных фильтров Добеши.

1. Константы неопределенности для Ψ

В [N1] доказана следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $\{T(N)\}_{N=1}^{\infty}$ *произвольная последовательность натуральных чисел, таких что*

$$\lim_{N\to\infty} T(N)=\infty, \tag{1.1}$$

$$T(N)\le T(N+1)\le T(N)+1, \qquad T(1)=1. \tag{1.2}$$

Тогда существует система

$$\Psi := \{\varphi_{0k},\ \psi_{jk},\ j,k\in Z,\ j\ge 0\}$$

со следующими свойствами:

1) Ψ - ортонормированный базис в $L^2(R)$;

2) $\varphi_{0k}(t)=\varphi_{00}(t-k)$;
$\psi_{jk}(t)=\psi_{j0}(t-k2^{-j})$;
$t\in R;\ j,k\in Z,\ j\ge 0$;

3) $\Psi\subset C^{\infty}(R)$;

4) supp $\varphi_{00}\subset[0,2T(1)+1]$;
supp $\psi_{j0}\subset\left[-(T(j+1)-1)2^{-j},(T(j+2)+1)2^{-j}\right]$,
$j\in Z,\ j\ge 0$.

Функции $\{\varphi_{jk},\psi_{jk}\}_{j,k\in Z,j\ge 0}$ определяются через преобразование Фурье

$$\hat\varphi_j(\omega):=2^{-j/2}\prod_{N=j+1}^{\infty} d_{T(N)}\left(2^{-N}\omega\right),\ j\in N_0,\ \ \omega\in R,$$

$$\varphi_{jk}(t):=\varphi_j\left(t-k2^{-j}\right),\ k\in Z,\ t\in R;$$

$$\hat\psi_j(\omega):=2^{1/2}\,exp\left(-i\omega 2^{-j-1}\right)\bar d_{T(j+1)}\left(-\omega 2^{-j-1}-\pi\right)\hat\varphi_{j+1}(\omega),$$

$\omega\in R$,

$$\psi_{jk}(t):=\psi_j\left(t-k2^{-j}\right),\ k\in Z,\ t\in R, \tag{1.3}$$

где $d_N(\omega)$ - тригонометрический полином или масштабирующий фильтр Добеши (см. [D2]), находится при помощи леммы Рисса [PS, с.92] из уравнения

$$\left|d_N(\omega)\right|^2=B_N(cos\,\omega), \tag{1.4}$$

где

$$B_N(t):=\sum_{l=N}^{2N-1}\binom{2N-1}{l}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{l}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{2N-1-l}.$$

Эта формула показывает, что $B_N(t)$ - полином Бернштейна [Bern] на [-1,1], аппроксимирующий $\chi_{[0,1]}$ - характеристическую функцию отрезка [0,1].

У системы Ψ имеется один существенный недостаток: константы неопределенности нестационарных всплесков ψ_j неограниченно возрастают с ростом *j*. В этом параграфе приводятся соответствующие оценки.

Пусть Φ_j - автокорреляционная функция для φ_j. Тогда

$$\hat\Phi_j(\omega):=2^{-j}\prod_{N=j+1}^{\infty} B_{T(N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right).$$

Технически удобнее оценивать константы неопределенности автокорреляционных функций, приведенных к нулевому масштабу:

$$\Phi_j^0(t):=\Phi_j\left(2^{-j}t\right).$$

Теорема 1.2.

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\hat\Phi_j^0-\chi_{[-\pi,\pi]}\right\|_{L_p}=0,\ \ 1\le p<\infty,$$

$$\liminf_{j\to\infty}\Delta\left(\hat\Phi_j^0\right)\ge\frac{\pi}{\sqrt 3};$$

$$\lim_{j\to\infty}\Delta\left(\Phi_j^0\right)=\infty;$$

и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\Delta\left(\hat{\Phi}_j^0\right)\Delta\left(\Phi_j^0\right)=\infty.$$

Доказательство состоит из следующих лемм.

Лемма 1.1.

$$\lim_{j\to\infty}\hat{\Phi}_j^0(\omega)=\chi_{[-\pi,\pi]}(\omega). \qquad (1.5)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\hat{\Phi}_j^0(\omega):=\prod_{N=1}^{\infty}B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right).$$

(см. (1.3) и (1.4)). В силу свойств полиномов Бернштейна

$$\lim_{N\to\infty}B_N(\cos\omega)=\chi_{[0,1]}(\cos\omega). \qquad (1.6)$$

Зафиксируем ω и выберем $L\in N$ так, чтобы $|\omega|<2^{L-1}\pi$. Тогда

$$\prod_{N=1}^{L}\chi_{[0,1]}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)=\chi_{[-\pi,\pi]}(\omega).$$

Поэтому

$$\hat{\Phi}_j^0(\omega)-\chi_{[0,1]}(\cos(\omega/2))=$$

$$=\left(\left(\prod_{N=1}^{L}B_{T(j+N)}\left(\cos\omega 2^{-N}\right)\right)-\prod_{N=1}^{L}\chi_{[0,1]}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{N=L+1}^{\infty}B_{T(j+N)}\left(\cos\omega 2^{-N}\right)-$$

$$-\left(\left(1-\prod_{N=L+1}^{\infty}B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right)\chi_{[-\pi,\pi]}(\omega)\right):=$$

$$:=I_{j,1}+I_{j,2}.$$

Очевидно, что

$$0\le\prod_{N=L+1}^{\infty}B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\le 1.$$

Поэтому из (1.6) следует, что $\left|I_{j,1}\right|\to 0$ при $j\to\infty$.

Для оценки $I_{j,2}$ воспользуемся неравенствами: $1-e^{-t}\le t$ при $t\ge 0$ и $-\ln(1-t)\le\dfrac{1}{1-t}$ при $0<t<1$. Тогда имеем

$$\left|I_{j,2}\right|\le\sum_{N=L+1}^{\infty}\frac{1-B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)}{B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)}.$$

Так как $|\omega|<2^{L-1}\pi$, то $\left|\dfrac{\omega}{2^N}\right|\le\dfrac{\pi}{4}$ для любого $N\ge L+1$. Поэтому

$$\left|B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right|\ge\frac{1}{2}. \qquad (1.7)$$

Так как $B_N(t)+B_N(-t)=1$, то в силу леммы 2 из [N2] имеем

$$\left|1-B_{T(j+N)}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right|\le\sin^{2T(j+N)}\left(\omega 2^{-N}\right). \qquad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует, что $\left|I_{j,2}\right|\to 0$ при $j\to\infty$. □

Лемма 1.2. При $1\le p<\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\hat{\Phi}_j^0-\chi_{[-\pi,\pi]}\right\|_{L_p}=0. \qquad (1.9)$$

Доказательство. В силу теоремы Лебега из (1.5) следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\hat{\Phi}_j^0(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\chi_{[-\pi,\pi]}(\omega)\,d\omega=1.$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\Phi}_j^0(\omega)d\omega=\Phi_j^0(0)=1,$$

то

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\{|\omega|\ge 2\pi\}}\left|\hat{\Phi}_j^0(\omega)\right|^p d\omega=0.$$

Так как $\left|\hat{\Phi}_j^0(\omega)\right| \le 1$, то $\left|\hat{\Phi}_j^0(\omega)\right|^p \le \left|\hat{\Phi}_j^0(\omega)\right|$ и

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\{|\omega|\ge 2\pi\}} \left|\hat{\Phi}_j^0(\omega)\right|^p d\omega = 0$$

для любого $p \in [1,\infty)$. □

Лемма 1.3.

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta_{\hat{\Phi}_j^0} \ge \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \qquad (1.10)$$

Доказательство. Используя (1.5), (1.9) и теорему Лебега, имеем

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta_{\hat{\Phi}_j^0} = \liminf_{j\to\infty} \left\{ \frac{\int_R \omega^2 \left|\hat{\Phi}_j^0\right|^2 d\omega}{\int_R \left|\hat{\Phi}_j^0\right|^2 d\omega} \right\}^{1/2} =$$

$$= \liminf_{j\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_R \omega^2 \left|\hat{\Phi}_j^0\right|^2 d\omega \right\}^{1/2} \ge \liminf_{j\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 \left|\hat{\Phi}_j^0\right|^2 d\omega \right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2 d\omega \right\}^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

Лемма 1.4.

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta_{\Phi_j^0} = \infty. \qquad (1.11)$$

Доказательство. Из (1.9) следует, что

$$\int_R \left|\Phi_j^0(t) - \frac{\sin \pi t}{\pi t}\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R \left|\Phi_j^0(\omega) - \chi_{[-\pi,\pi]}(\omega)\right|^2 d\omega \to 0$$

при $j \to \infty$.
Поэтому по лемме Фату

$$\liminf_{j\to\infty} \Delta^2_{\hat{\Phi}_j^0} = \liminf_{j\to\infty} \int_R t^2 \left|\Phi_j^0(t)\right|^2 dt \ge \int_R t^2 \left|\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right|^2 dt = \infty.$$

□

Можно дать точную, по порядку, оценку роста радиусов автокорреляционных функций Φ_j^0.

Лемма 1.5. *Пусть* $\hat{F}(\omega) := \prod_{l=1}^{\infty} f_l\left(\omega 2^{-l}\right)$, *где* $f_l(t)$ *- некоторые неотрицательные* 2π*-периодические функции, причем бесконечное произведение сходится абсолютно и допускает почленное дифференцирование. Обозначим*

$$\hat{F}_j^0 := \prod_{l=1}^{\infty} f_{j+l}\left(\omega 2^{-l}\right). \qquad (1.12)$$

Предположим, что

$$\sum_{k\in Z} \hat{F}_j^0(\omega + 2\pi k) \equiv 1. \qquad (1.13)$$

Тогда

$$\left(\int_R t^2 \left| F_j^0(t) \right|^2 dt\right)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f'_{j+l}(\omega)\right|^2 d\omega\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Так как $\hat{F}_j^0(\cdot)(\omega) = -i\hat{F}_j^{0\prime}(\omega)$, то в силу тождества Планшереля имеем

$$\int_R t^2 \left|F_j^0(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_R \left|\hat{F}_j'^0(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Из (1.12) следует, что

$$\hat{F}_j^{0\prime}(\omega) = \left(\sum_{l\in N} 2^{-l} \frac{f'_{j+l}\left(2^{-l}\omega\right)}{f_{j+l}\left(2^{-l}\omega\right)} \right) \prod_{p=1}^{\infty} f_{j+p}\left(2^{-p}\omega\right).$$

Из (1.13) следует, что $f_l(\omega) \le 1$, поэтому

$$\left|\hat{F}_j^{0\prime}(\omega)\right| \le \sum_{l\in N} 2^{-l} \left| f'_{j+l}\left(2^{-l}\omega\right)\right| \cdot \left| \prod_{p=l+1}^{\infty} f_{j+p}\left(2^{-p}\omega\right)\right|$$

и, используя неравенство треугольника в $L^2(R)$, имеем

$$\left(\int_R \left|\hat{F}_j^{0\prime}(\omega)\right|^2 d\omega\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{l\in N} 2^{-l} \left(\int_R \left| f'_{j+l}\left(2^{-l}\omega\right)\right|^2 \cdot \left| \prod_{p=l+1}^{\infty} f_{j+p}\left(2^{-p}\omega\right)\right|^2 d\omega\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{l\in N} 2^{-l/2} \left(\int_R \left| f'_{j+l}(\omega)\right|^2 \cdot \left| \prod_{p=1}^{\infty} f_{j+l+p}\left(2^{-p}\omega\right)\right|^2 d\omega\right)^{1/2}.$$

Учитывая 2π-периодичность функций f_l и тождество (1.13), имеем

$$\int_R \left| f'_{j+l}(\omega)\right|^2 \cdot \left|\prod_{p=1}^{\infty} f_{j+l+p}\left(2^{-p}\omega\right)\right|^2 d\omega \le$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} \left| f'_{j+l}(\omega)\right|^2 \cdot \left|\sum_{l\in Z} \hat{F}^0_{j+l}(\omega+2\pi l)\right| d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f'_{j+l}(\omega)\right|^2 d\omega.$$

□

Лемма 1.6. *Пусть*

$$\hat{F}(\omega) := \prod_{l=1}^{\infty} f_l\left(\omega 2^{-l}\right),$$

где $f_l(t)$ - некоторые неотрицательные четные 2π-периодические функции, убывающие на $[0,\pi]$. *Тогда*

$$\left(\int_R t^2 \left|F(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \ge \frac{\prod_{l=2}^{\infty} f_l\left(\pi 2^{-l}\right)}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f_1'(\omega)\right|^2 d\omega\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Определим функцию F_1 в образах Фурье

$$\hat{F}_1(\omega) = \prod_{l=1}^{\infty} f_{1+l}\left(\omega 2^{-l}\right).$$

Легко видеть, что

$$\int_R \left|F'(\omega)\right|^2 d\omega \ge \int_{-2\pi}^{2\pi} \left|F'(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$= \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} f_1'(\omega/2)\hat{F}_1(\omega/2) + \frac{1}{2} f_1(\omega/2)\hat{F}_1'(\omega/2)\right)^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f_1'(\omega)\hat{F}_1(\omega) + f_1(\omega)\hat{F}_1'(\omega)\right)^2 d\omega.$$

По условию $f_l(\omega)$ - четные функции и $f_l'(\omega) \le 0$ при $\omega \in [0,\pi]$. Тогда $\hat{F}_1'(\omega) \le 0$ при $\omega \in [0,\pi]$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f_1'(\omega)\hat{F}_1(\omega) + f_1(\omega)\hat{F}_1'(\omega)\right)^2 d\omega =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left(f_1'(\omega)\hat{F}_1(\omega) + f_1(\omega)\hat{F}_1'(\omega)\right)^2 d\omega \ge$$

$$\ge 2\int_0^{\pi} \left(f_1'(\omega)\hat{F}_1(\omega)\right)^2 d\omega \ge \left(\hat{F}_1(\pi)\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(f_1'(\omega)\right)^2 d\omega. \ \square$$

Следующая лемма дает асимптотику радиуса квадрата модуля масштабирующего фильтра Добеши.

Лемма 1.7.

$$\left\|\sin_{\omega} B_N'(\cos\omega)\right\|_{L_2[-\pi,\pi]} \sim N^{1/4}. \quad (1.14)$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$B_N'(\cos\omega) = \frac{1}{2}\frac{(2N+1)\,!}{4^N (N!)^2}\sin^{2N}(\omega) = \sqrt{\frac{N}{\pi}}\left(1+O\left(N^{-2}\right)\right)\sin^{2N}(\omega).$$

Теперь остается воспользоваться тем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2N} d\omega = 2\pi\frac{\binom{2N}{N}}{4^N} = \sqrt{\frac{\pi}{N}}. \ \square$$

Следствие 1.1.

$$\Delta_{\Phi_j^0} \sim T(j+1)^{1/4}.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $t \in [0,1]$ $B_N(t) \ge \dfrac{1+t}{2}$. Поэтому при любом j

$$\hat{\Phi}_j^0(\pi) \ge \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1+\cos\left(\pi 2^{-N}\right)}{2} =$$

$$= \prod_{N=1}^{\infty} \cos^2\left(\pi 2^{-N-1}\right) = \left(\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2}.$$

Поэтому в силу леммы 1.6 и (1.14)

$$\Delta_{\Phi_j^0} \gg T(j+1)^{1/4}.$$

Обратная оценка следует из (1.14) и леммы 1.5.

□

2. Конструкция нестационарных всплесков с модифицированными фильтрами Добеши

Прежде всего напомним определение модифицированных фильтров Добеши m_N^a, впервые рассмотренных в [13]. Пусть $a \in (0,1)$, $f_a(t)$ - бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция на [-1,1], равная 0 при $t \in [-1,-a]$ и удовлетворяющая тождеству

$$f_a(t) + f_a(-t) = 1, \qquad t \in [-1,1]. \tag{2.1}$$

Обозначим через

$$b_l^N(t) := \binom{N}{l} \left(\frac{1+t}{2}\right)^l \left(\frac{1-t}{2}\right)^{N-l}, \quad l = 0,1, \ \ldots \ , N,$$

мономы С.Н. Бернштейна на отрезке [-1,1], $t_{N,l} := \dfrac{2l-N}{N}, l = 0,1, \ \ldots \ , N$.

Рассмотрим тригонометрические полиномы с действительными коэффициентами $h_N^a(k)$

$$m_N^a(\omega) = 2^{-1/2} \sum_{l=0}^{2N-1} h_N^a(l) \ e^{-il\omega}, \qquad N \in \mathbf{N}, \tag{2.2}$$

удовлетворяющие уравнению

$$|m_N^a(\omega)|^2 = B_{2N-1}^a(\cos\omega), \quad m_N^a(0) = 1, \tag{2.3}$$

где $B_K^a(t) := \sum_{l=0}^{K} f_a(t_{K,l}) b_l^K(t)$. Полиномы B_K^a - это полиномы С.Н.Бернштейна, приближающие функцию f_a [12]. Полином m_N^a существует в силу леммы Рисса [11, с.92].

Замечание 2.1. *Нетрудно показать, что для любого* $K \in \mathbf{N}$ $\ B_{2K-1}^a = B_{2K}^a$.

Из (2.1) следует, что

$$|\ m_N^a(\omega)\ |^2 + |\ m_N^a(\omega+\pi)\ |^2 = 1. \tag{2.4}$$

Пусть $\{T(N)\}_{N=1}^{\infty}$ произвольная последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условиям (1.1) и (1.2).

Легко доказывается следующая

Лемма 2.1. *Бесконечные произведения*

$$G_j^a(\omega) := \prod_{N=j+1}^{\infty} m_{t(N)}^a(\omega 2^{-N}), \quad j \in N_0,$$

поточечно сходятся для всех $\omega \in R$. *Сходимость равномерная на компактных множествах.*

Для доказательства следующей леммы нам потребуются некоторые уточнения обозначений и оценок из [N2].

Пусть $b_N(a)$ корень уравнения

$$2^{a+2/N}(1-b)^{(1-a)/2}(1+b)^{(1+a)/2} = 1, \quad b \in (0,1). \tag{2.5}$$

Производная функции $(1-t)^{(1-a)/2}(1+t)^{(1+a)/2}$ равна $(a-t)(1-t)^{(-1-a)/2}(1+t)^{(-1+a)/2}$ и неположительна при $t \in [a,1]$. Так как $2^{-a-2/N}$ возрастает с ростом *N*, то $b_N(a)$ монотонно убывает при $N \to \infty$, стремясь к $b(a)$ - корню уравнения

$$2^a(1-b)^{(1-a)/2}(1+b)^{(1+a)/2} = 1, \quad b \in (0,1).$$

В [N2] доказано, что

$$\left(B_N^a(\cos\omega)\right)^{1/N} \le \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_N(a); \\ 2^{1+a+\frac{2}{N}} \cos^{1-a}(\omega/2) \, |\sin(\omega/2)|^{1+a}, & |\omega| \in (\omega_N(a), \pi]; \end{cases} \tag{2.6}$$

где $\omega_N(a) \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ и

$$\cos\omega_N(a) = -b_N(a).$$

Так как $b_N(a)$ монотонно убывает, то и $\omega_N(a)$ монотонно убывает при $N \uparrow \infty$, стремясь к $\omega(a)$, определяемому условиями $\omega_N(a) \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\cos\omega(a) = -b(a)$.

Докажем, что

$$\left(B_{N+1}^a(\cos\omega)\right)^{1/N} \le \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_N(a); \\ 2^{1+a+\frac{2}{N}} \cos^{1-a}(\omega/2) \, |\sin(\omega/2)|^{1+a}, & |\omega| \in (\omega_N(a), \pi) \end{cases} \tag{2.7}$$

Это очевидно для $|\omega| \le \omega_N(a)$, так как $\omega_{N+1}(a) < \omega_N(a)$. При $|\omega| \in (\omega_N(a), \pi] \subset (\omega_{N+1}(a), \pi]$

$$\left(B^a_{N+1}(\cos\omega)\right)\le 2^{(N+1)(1+a)+2}\left(\cos^{1-a}(\omega/2)\,|\sin(\omega/2)|^{1+a}\right)^{N+1}.$$

Поэтому

$$\left(B^a_{N+1}(\cos\omega)\right)^{1/N}\le 2^{1+a+\frac{2}{N}}\cos^{1-a}(\omega/2)\,|\sin(\omega/2)|^{1+a}\times$$
$$\times\left(2^{1+a}\cos^{1-a}(\omega/2)\,|\sin(\omega/2)|^{1+a}\right)^{1/N}.$$

Теперь (2.7) следует из того, что при $|\omega|\in(\omega_N(a),\pi]\subset(\omega(a),\pi]$

$$2^{1+a}\cos^{1-a}(\omega/2)\,|\sin(\omega/2)|^{1+a}\le 1.$$

Таким образом, при оценке B^a_{N+1} можно использовать такую же оценку, как и для B^a_N. Поэтому, рассуждая так же как при доказательстве (17) из [13], получаем, что

$$\left(B^a_{N+1}(\cos\omega)B^a_N(\cos 2\omega)\right)^{1/N}\le\alpha 2^{2\beta}(\cos\omega/2)^{\beta}|\cos\omega|^{\beta}, \quad (2.8)$$

где $\alpha\in(0,1)$ и $\beta:=1-a$.

Обозначим $I_r:=[2^{r-1}\pi,2^r\pi]$, $r\in\mathbf{N}$.

Лемма 2.2. *Пусть* $j\in\mathbf{N}_0$. *Если* $|\omega|\in I_r$ *с* $r>j$, $r\in\mathbf{N}$, *то*

$$\left|G^a_j(\omega)\right|\le\gamma_j\exp\left(-\mu\sum_{N=j+1}^{r}T(N)\right), \quad (2.9)$$

где константа $\mu>0$ *зависит только от a, а константы* $\gamma_j>0$ *- только от j и a.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное число r>j и положим

$$G^a_{jr}(\omega):=\prod_{N=j+1}^{r}m^a_{T(N)}\left(\omega 2^{-N}\right).$$

В силу (2.4) $\left|G^a_j(\omega)\right|\le\left|G^a_{jr}(\omega)\right|$. Пусть $r-j=2l$, $l\in\mathbf{N}$. Учитывая (2.8) и замечание 2.1, имеем

$$\left|G^a_{jr}(\omega)\right|^2=\prod_{N=j+1}^{r}\left|m^a_{T(N)}\left(\omega 2^{-N}\right)\right|^2=$$

$$=\prod_{N=1}^{l}B_{2T(j+2N-1)}\left(\cos\omega 2^{-j-2N+1}\right)B_{2T(j+2N)}\left(\cos\omega 2^{-j-2N}\right)\le$$

$$\le\prod_{N=1}^{l}\left(\alpha 2^{2\beta}\right)^{2T(j+2N-1)}\left|\cos\omega 2^{-j-2N}\cos\omega 2^{-j-2N-1}\right|^{2\beta T(j+2N-1)}.$$

Определим последовательность $T'(N)$ следующим образом: $T'(j+2N-1):=T'(j+2N):=T(j+2N-1)$. Тогда, используя (2.10) из [N1], имеем при $|\omega|\in I_r$

$$\prod_{N=1}^{l}\left|\cos\omega 2^{-j-2N}\cos\omega 2^{-j-2N-1}\right|^{2T(j+2N-1)}=$$

$$=\prod_{N=j+1}^{r}\left|\cos\omega 2^{-N-1}\right|^{2T'(N)}\le 2^{-2\sum_{N=j+1}^{r}T'(N)+T'(r)}=$$

$$=2^{-4\sum_{N=1}^{l}T(j+2N-1)+T(r-1)}.$$

Окончательно получаем

$$\left|G^a_{jr}(\omega)\right|^2\le\alpha^{2\sum_{N=1}^{l}T(j+2N-1)}2^{4\beta\sum_{N=1}^{l}T(j+2N-1)}\times$$
$$\times 2^{-4\beta\sum_{N=1}^{l}T(j+2N-1)}2^{\beta T(r-1)}=\alpha^{2\sum_{N=1}^{l}T(j+2N-1)}2^{\beta T(r-1)}, \quad (2.10)$$

откуда следует (2.9).

Случай $r-j=2l-1, l\in\mathbf{N}$ тоже следует из (2.10) и очевидного в силу (2.4) неравенства

$$\left|G^a_{jr}(\omega)\right|\le\left|G^a_{j+1,r}(\omega/2)\right|. \quad (2.11)$$

□

Из леммы 2.2 получаем

Следствие 2.1. *Функции* $G^a_j, j\in\mathbf{N}_0$, *убывают на бесконечности быстрее любой степени.*

Определим последовательность функций $\{\varphi^a_{j,k}\}_{j,k\in Z,j\ge 0}$ через преобразование Фурье

$$\hat\varphi^a_j(\omega):=2^{-j/2}G^a_j(\omega),\ j\in\mathbf{N}_0, \quad (2.12)$$
$$\varphi^a_{jk}(t):=\varphi^a_j\left(t-k2^{-j}\right),k\in Z.$$

Функции $\psi^a_{jk}, j\in\mathbf{N}_0,k\in Z$ определяются равенствами

$\hat{\psi}_j^a(\omega) := 2^{1/2}\exp\left(-i\omega 2^{-j-1}\right)\ m_{T(j+1)}^a\left(-\omega 2^{-j-1}-\pi\right)\hat{\varphi}_{j+1}^a(\omega)$,

$\omega \in R$

$\psi_{jk}^a(t) := \psi_j^a\left(t-k2^{-j}\right)$.

Таким образом, построение системы Ψ^a завершено. Мы полагаем

$$\Psi^a := \left\{\varphi_{0k}^a, \psi_{jk}^a,\ j\in \mathbf{N}_0, k\in Z\right\}.$$

3. Свойства системы Ψ^a

Свойства системы Ψ^a аналогичны свойствам Ψ (см. [N1]).

Лемма 3.1. *Функции* φ_{jk}^a *и* ψ_{jk}^a, $j\in \mathbf{N}_0, k\in Z$ *бесконечно дифференцируемы.*

Доказательство. Утверждение следует из следствия 2.1. □

Аналогично леммам 3.2, 3.3, 3.4 из [9] доказываются следующие леммы.

Лемма 3.2. *Для любых* $j\in \mathbf{N}_0, k, k'\in Z$

$$\left\langle \varphi_{jk}^a, \varphi_{jk'}^a \right\rangle = \delta_{k,k'} \tag{3.1}$$

$$\left\langle \psi_{jk}^a, \psi_{jk'}^a \right\rangle = \delta_{k,k'},\ \left\langle \varphi_{jk}^a, \psi_{jk'}^a \right\rangle = 0, \tag{3.2}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *обозначает скалярное произведение в* $L^2(R)$.

Рассмотрим подпространства

$\upsilon_j^a := \left[\varphi_{jk}^a\right]_{k\in Z}, w_j^a := \left[\psi_{jk}^a\right]_{k\in Z}, j\in \mathbf{N}_0$.

По лемме 4.2 системы $\left\{\varphi_{jk}^a\right\}_{k\in Z}$ и $\left\{\psi_{jk}^a\right\}_{k\in Z}$ являются ортонормированными базисами в υ_j^a и w_j^a, соответственно, $j\in \mathbf{N}_0$.

Лемма 3.3. Для любых $j\in \mathbf{N}_0$

$$\upsilon_j^a \subset \upsilon_{j+1}^a,\quad \upsilon_j^a \oplus w_j^a = \upsilon_{j+1}^a, \tag{3.3}$$

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} \upsilon_j^a} = L^2(R). \tag{3.4}$$

Лемма 4.4. *Функции* φ_j^a *и* ψ_j^a, $j\in \mathbf{N}_0$, *имеют компактный носитель:*

$$\operatorname{supp}\ \varphi_j^a \subset \left[0, (2T(j+1)+1)2^{-j}\right], \tag{3.5}$$

$$\operatorname{supp}\ \psi_j^a \subset \left[-(T(j+2)+1)2^{-j}, (T(j+1)-1)2^{-j}\right] \tag{3.6}$$

4. Константы неопределенности для Ψ^a

Пусть Φ_j^a - автокорреляционная функция φ_j^a. Тогда

$$\hat{\Phi}_j^a(\omega) := 2^{-j}\prod_{N=j+1}^{\infty} B_{2T(N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right).$$

Мы снова будем оценивать константы неопределенности автокорреляционных функций, приведенных к нулевому масштабу:

$\Phi_j^{a,0}(t) := \Phi_j^a\left(2^{-j}t\right)$.

Тогда

$$\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega) := \prod_{N=1}^{\infty} B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right).$$

Пусть φ^M обозначает масштабирующую функцию Мейера [7], определяемую в образах Фурье как

$$\hat{\varphi}^M(\omega) := \sqrt{f_a(\cos(\omega/2))}\chi_{[-2\pi,2\pi]}(\omega), \tag{4.1}$$

а Φ^M - ее автокорреляционную функцию.

Теорема 4.1. *Если функция* f_a *удовлетворяет условиям*

$(f_a)''(t)\geq 0$, *если* $t\leq 0$, $(f_a)''(t)\leq 0$, *если* $t>0$, (4.2)

$(f_a)'(t)\leq C\sqrt{(f_a)(t)}$ *для некоторой константы* C,(4.3)

то

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\hat{\Phi}_j^{a,0}-\hat{\Phi}^M\right\|_{L_p}=0,\qquad 1\leq p<\infty;$$

$$\lim_{j\to\infty}\Delta\left(\hat{\Phi}_j^{a,0}\right)=\Delta\left(\hat{\Phi}^M\right);$$

$$\lim_{j\to\infty}\Delta\left(\Phi_j^{a,0}\right)\le\frac{4C}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left\|\Phi^M\right\|_2}; \tag{4.4}$$

и, следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\Delta\left(\hat{\Phi}_j^{a,0}\right)\Delta\left(\Phi_j^{a,0}\right)\le\frac{4C}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left\|\hat{\Phi}^M\right\|_2}\Delta\left(\hat{\Phi}^M\right)<\infty.$$

Разобьем доказательство на следующие леммы.

Лемма 4.1.

$$\lim_{j\to\infty}\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)=f_a(\cos(\omega))\chi_{[-2\pi,2\pi]}(\omega). \tag{4.5}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 1.5. Зафиксируем ω и выберем $L\in N$ так, чтобы $|\omega|<2^{L-1}\pi$. Тогда

$$f_a(\cos(\omega/2))\chi_{[-2\pi,2\pi]}(\omega)=\prod_{l=1}^{L}f_a\left(\cos\left(\omega 2^{-l}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)-f_a(\cos(\omega/2))\chi_{[-2\pi,2\pi]}(\omega)=$$

$$=\left\{\left(\prod_{N=1}^{L}B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)-\prod_{N=1}^{L}f_a\left(\cos\left(\omega 2^{-l}\right)\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{N=L+1}^{\infty}B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right\}-$$

$$-\left\{\left(1-\prod_{N=L+1}^{\infty}B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times f_a(\cos(\omega/2))\chi_{[-2\pi,2\pi]}(\omega)\right\}:=I_{j,1}+I_{j,2}.$$

Очевидно, что $0\le\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)\le 1$. В силу свойств полиномов Бернштейна

$$\lim_{K\to\infty}B_K^a(\cos\omega)=f_a(\cos\omega). \tag{4.6}$$

Поэтому $\left|I_{j,1}\right|\to 0$ при $j\to\infty$.

Для оценки $I_{j,2}$ воспользуемся неравенствами: $1-e^{-t}\le t$ при $t\ge 0$ и $-\ln(1-t)\le\frac{t}{1-t}$ при $0<t<1$. Тогда имеем

$$\left|I_{j,2}\right|\le\sum_{l=L+1}^{\infty}\frac{1-B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)}{B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)}.$$

Так как $|\omega|<2^{L-1}\pi$, то $\left|\frac{\omega}{2^N}\right|\le\frac{\pi}{4}$ для любого $N>L$. Поэтому

$$\left|B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right|\ge\frac{1}{2},\ N>L. \tag{4.7}$$

Используя (3.4) и (3.6), имеем

$$\left|1-B_{2T(j+N)-1}^a\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right)\right|\le K\sin^{(2T(j+N)-1)(1-a)}\left(\omega 2^{-N-1}\right). \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) следует, что $\left|I_{j,2}\right|\to 0$ при $j\to\infty$.

□

Лемма 4.2. *Для любого* $p\in[1,\infty)$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\hat{\Phi}_j^{a,0}-\hat{\Phi}^M\right\|_{L_p}=0.$$

Доказательство. В силу теоремы Лебега из (4.5) следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi}f_a(\cos(\omega/2))d\omega=1.$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_R\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)d\omega=\Phi_j^{a,0}(0)=1,$$

то

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\{|\omega|\ge 2\pi\}}\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)d\omega=0.$$

Так как $\left|\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)\right|\le 1$, то $\left|\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)\right|^p\le\left|\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)\right|$, и

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\{|\omega|\geq 2\pi\}}\left|\hat{\Phi}_j^{a,0}(\omega)\right|^p d\omega=0$$

для любого $p\in[1,\infty)$. □

Лемма 4.3.

$$\lim_{j\to\infty}\Delta_{\hat{\Phi}_j^{a,0}}=\Delta_{\hat{\Phi}^M}\ . \qquad (4.9)$$

Доказательство. В силу (2.4) для любого $L\in N$

$$\left|\Phi_j^{a,0}(\omega)\right|\leq\prod_{N=1}^{2L}B^a_{2T(j+N)-1}\left(\cos\left(\omega 2^{-N}\right)\right). \qquad (4.10)$$

Учитывая (2.8) и замечание 2.1, имеем для любого натурального L

$$\prod_{N=1}^{L}B_{2T(j+2N-1)}\left(\cos\left(\omega 2^{-2N+1}\right)\right)B_{2T(j+2N-1)}\left(\cos\left(\omega 2^{-2N}\right)\right)\leq$$

$$\leq\prod_{N=1}^{L}\left(\alpha 2^{2\beta}\right)^{2T(j+2N-1)}\left|\cos\omega 2^{-2N}\cos\omega 2^{-2N-1}\right|^{\beta 2T(j+2N-1)}. \qquad (4.11)$$

Используя (2.10) из [N1], получаем

$$\prod_{N=1}^{L}\left|\cos\omega 2^{-2N}\cos\omega 2^{-2N-1}\right|^{2T(j+2N-1)}\leq$$

$$\leq 2^{-4\sum_{N=1}^{L}T(j+2N-1)}\left|\sin\omega 2^{-2L-1}\right|^{-2T(j+2N-1)}. \qquad (4.12)$$

Так как $\left|\sin\omega 2^{-2L-1}\right|\geq\sin(\pi/8)$ при $|\omega|\in\left[2^{2L-2}\pi,2^{2L}\pi\right]$, то, продолжая (4.12), имеем

$$\prod_{N=1}^{L}\left|\cos\omega 2^{-2N}\cos\omega 2^{-2N-1}\right|^{2T(j+2N-1)}\leq$$

$$\leq 2^{-4\sum_{N=1}^{L}T(j+2N-1)}\left|\sin(\omega/8)\right|^{-2T(j+2N-1)}. \qquad (4.13)$$

Объединяя (4.12), (4.11) и (4.13), получаем для $|\omega|\in\left[2^{2L-2}\pi,2^{2L}\pi\right]$ следующее неравенство

$$\left|\Phi_j^{a,0}(\omega)\right|\leq\alpha^{2\beta\sum_{N=1}^{L}T(j+2N-1)}\left(\sin(\omega/8)\right)^{-2\beta T(j+2L-1)}. \qquad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что существуют такие натуральные числа N_0 и L_0, что при любых $N>N_0$ и $L\geq L_0$

$$\int_{\{|\omega|\in[2^{2L-2}\pi,2^{2L}\pi]\}}\omega^2\left|\Phi_j^{a,0}(\omega)\right|^2 d\omega \ll \alpha^{T(j+1)}2^{-L}\ . \qquad (4.15)$$

Из этой оценки очевидным образом получаем

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\{|\omega|\geq[2^{L_0}\pi]\}}\omega^2\left|\Phi_j^{a,0}(\omega)\right|^2 d\omega=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{\{|\omega|\geq[2^{L_0}\pi]\}}\left|\Phi_j^{a,0}(\omega)\right|^2 d\omega=0\ . \qquad (4.16)$$

Используя теперь (4.16), (4.5) и теорему Лебега, получаем (4.9). □

Оценка (4.4) получается из следующих лемм.

Лемма 4.4.

$$\left|\left(B_N^a\right)'(\cos\omega)\sin(\omega)\right|\leq 2\sqrt{2}C\ . \qquad (4.17)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой для производной полиномов Бернштейна

$$\left(B_N^a(t)\right)'=\sum_{l=0}^{N-1}\frac{N}{2}\partial\left(f_a(t_{Nl})\right)b_l^{N-1}(t), \qquad (4.18)$$

где $\partial c_l:=c_{l+1}-c_l$. Из свойств функции f_a (10) имеем

$$\left|\left(B_N^a(t)\right)'\right|=\sum_{l=l_N(a)-1}^{N-l_N(a)}\frac{N}{2}\partial\left(f_a(t_{Nl})\right)b_l^{N-1}(t), \qquad (4.19)$$

где $l_N(a):=\left[\frac{N(1-a)}{2}\right]+1$. Здесь $[t]$ - целая часть числа t. В силу (4.2)

$$\partial\left(f_a(t_{Nl})\right)\leq\frac{2}{N}\left(f_a\right)'\left(t_{N,l+1}\right)\text{ при } l<\frac{N}{2}; \qquad (4.20)$$

$$\partial\left(f_a(t_{Nl})\right)\leq\frac{2}{N}\left(f_a\right)'\left(t_{N,l}\right)\text{ при } l\geq\frac{N}{2}. \qquad (4.21)$$

Простые вычисления показывают, что

$$b_l^{N-1}(\cos\omega)\sin^2(\omega)\leq 4b_{l+1}^N(\cos\omega),$$

$$b_l^{N-1}(\cos\omega)\sin^2(\omega)\leq 4b_l^N(\cos\omega).$$

Поэтому из неравенств (4.20-4.21), условия (4.3) и неравенства Коши следует, что

$$\left(\left(B_N^a\right)'(\cos\omega)\right)^2 \sin^2\omega \le C^2\left(\sum_{l=l_N(a)-1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}\sqrt{f_a\left(t_{N,l+1}\right)}\,b_l^{N-1}(\cos\omega)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N-l_N(a)}\sqrt{f_a\left(t_{N,l}\right)}\,b_l^{N-1}(\cos\omega)\right)^2 \sin^2\omega \le$$

$$\le C^2\left(\sum_{l=l_N(a)-1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} f_a\left(t_{N,l+1}\right) b_l^{N-1}(\cos\omega)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N-l_N(a)} f_a\left(t_{N,l}\right) b_l^{N-1}(\cos\omega)\right)\sin^2\omega \sum_{l=l_N(a)-1}^{N-l_N(a)} b_l^{N-1}(\cos\omega) \le$$

$$\le 4C^2\left(\sum_{l=l_N(a)-1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} f_a\left(t_{N,l+1}\right) b_{l+1}^{N}(\cos\omega)+\sum_{l=\left[\frac{N}{2}\right]}^{N-l_N(a)} f_a\left(t_{N,l}\right) b_l^{N}(\cos\omega)\right) \le$$

$$\le 8C^2 \sum_{l=l_N(a)-1}^{N-l_N(a)} f_a\left(t_{N,l}\right) b_l^{N}(\cos\omega) = 8C^2 B_N^a(\cos\omega). \quad (4.22)$$

Так как $0 \le B_N^a(\cos\omega) \le 1$, то из (4.22) следует (4.17). □

Лемма 4.5.

$$\left(\int_R \left| t\Phi_j^{a,0}(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \le \frac{4C}{\sqrt{2}-1}. \quad (4.23)$$

Доказательство. В силу леммы 1.5, замечания 2.1 и (4.17)

$$\left(\int_R \left| t^2\Phi_j^{a,0}(t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(B_{2T(j+l)}^a\right)'(\cos\omega)\sin\omega\right|^2 d\omega\right)^{1/2} \le \frac{4C}{\sqrt{2}-1}.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Daubechies I. *Ten lectures on wavelets.* CBMS Lecture Notes, 61. SIAM, Philadelphia. 1992.
2. MeyerY. *Ondelettes et operateurs.* Hermann, Paris. vol.1. 1990.
3. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основы теории всплесков. *Успехи матем. наук.* 1998. Т.53, N 6. С.53-128.
4. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков. *Фундаментальная и прикладная математика.* 1997. Т.3, N.4. С.999-1028.
5. Берколайко М.З., Новиков И.Я. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем. *Докл.РАН.* 1992. Т.326, 6. С. 935-938.
6. C.de Boor, R.A.DeVore, A.Ron. On the construction of multivariate (pre)wavelets. *Constr.Approx.* 1993. V.9. P.123-166.
7. Meyer Y. Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs. *Seminaire Bourbaki.* 1985-86. nr.662.
8. G.Lemarie-Rieusset. Existence de «fonction-pere» pour le ondelettes a support compact. *C.R.Acad.Sci.Paris I.* 1992. V.314. P.17-19.
9. Novikov I.Ya. On the construction of nonstationary orthonormal infinitely differentiable compactly supported wavelets. *Functional Differential Equations.* 1994. V.2. P.145-156.
10. Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm.Pure Appl.Math.* 1988. V.41. P.909-996.
11. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа, Т.II.* М.: Наука. 1978.
12. Бернштейн С. Demonstration de theoréme de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilities. *Сообщ. Харьковского мат. общ. сер. 2.* 23,1.
13. Novikov I.Ya. Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness. *East J. Approximation.* 1995. V.1, N3. PP.341-348.