УДК 621.37:621.391

О КОМПОЗИЦИИ ГАММА-СТАТИСТИК

В.И.Костылев

Показано, что гиперэкспоненциальное и гиперэрланговское распределения воспроизводят себя при композиции. Получены новые формулы для плотностей вероятности и функций распределения сумм гамма-статистик.

ВВЕДЕНИЕ

Гамма-распределение [1,2] является одним из наиболее распространенных в статистической теории радиотехники [3,4] вероятностных распределений. В частности, гамма-распределения имеют выходные эффекты типовых радиотехнических систем обработки сигналов при приеме дискретных гауссовских процессов [4], многочастотных сигналов [5], излучений сложных радиоисточников [6] и т. д.

Статистические свойства гамма-распределения можно описать с помощью плотности вероятности

$$w_\gamma(x;a,A) = 1(x)a^{-A}x^{A-1}\exp(-x/a)/\Gamma(A), \qquad (1)$$

где a - первый [3] (масштабный [1]) параметр гамма-распределения; A - второй [3] (существенный [1]) параметр; $1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - единичная функция; $\Gamma(A) = \int_0^\infty y^{A-1}\exp(-y)dy$ - гамма-функция [7]. В общем случае оба параметра гамма-распределения вещественны.

Частным случаем (при $A = 1$) гамма-распределения является экспоненциальное (показательное) распределение. Плотность вероятности экспоненциального распределения имеет вид [2]

$$w_e(x;a) = 1(x)\exp(-x/a)/a. \qquad (2)$$

Распределение Эрланга с плотностью вероятности [3]

$$w_E(x;a,K) = 1(x)a^{-K}x^{K-1}\exp(-x/a)/(K-1)! \qquad (3)$$

есть не что иное, как гамма-распределение при целочисленном значении второго параметра. Распределению Эрланга подчиняются суммы квадратов модулей независимых комплексных гауссовских случайных величин (статистик [1]) с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями, поэтому распределение Эрланга достаточно часто встречается и в теории надежности [1,2].

Обобщением экспоненциального распределения является гиперэкспоненциальное распределение [2] с плотностью вероятности

$$W_e(x;M,\vec{\alpha},\vec{a}) = \sum_{m=1}^{M}\alpha_m w_e(x;a_m), \qquad (4)$$

где M - целый параметр гиперэкспоненциального распределения; $\vec{\alpha} = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M\}$ и $\vec{a} = \{a_1,a_2,\ldots,a_M\}$ - вещественные векторные параметры гиперэкспоненциального распределения. Очевидно, что аналогичным образом можно ввести понятия гипергамма- и гиперэрланговского распределений с плотностями вероятности

$$W_\gamma(x;M,\vec{\alpha},\vec{a},\vec{A}) = \sum_{m=1}^{M}\alpha_m w_\gamma(x;a_m,A_m) \qquad (5)$$

и

$$W_E(x;M,\vec{\alpha},\vec{a},\vec{K}) = \sum_{m=1}^{M}\alpha_m w_E(x;a_m,K_m) \qquad (6)$$

соответственно, где $\vec{A} = \{A_1,A_2,\ldots,A_M\}$ и $\vec{K} = \{K_1,K_2,\ldots,K_M\}$.

Известно, что некоторые статистические распределения (такие, как нормальное, хи-квадрат, биномиальное, Пуассона) воспроизводят себя при композиции. Гамма-распределение обладает воспроизводящим свойством только по второму параметру [3]: если две независимые гамма-статистики имеют одинаковые первые параметры, то их сумма также имеет гамма-распределение. Цель настоящей работы – определить статистические свойства сумм двух независимых гамма-статистик при произвольном значении параметров, а также некоторых связанных с ними сумм.

I. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ

Плотность вероятности $w_{ee}(x;a;b)$ суммы двух независимых экспоненциальных статистик с параметрами a и b можно найти как свертку двух плотностей вероятности вида (2). В результате получим

$$w_{ee}(x;a;b)=\frac{a}{a-b}w_e(x;a)+\frac{b}{b-a}w_e(x;b). \qquad (7)$$

Сравнивая (7) и (4), нетрудно заметить, что сумма двух независимых экспоненциальных статистик имеет гиперэкспоненциальное распределение.

Несложно также показать, что плотности вероятности (7) соответствует функция распределения

$$f_{ee}(x;a,b)=1-\frac{a^2}{a-b}w_e(x;a)-\frac{b^2}{b-a}w_e(x;b). \qquad (8)$$

II. ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ

Очевидно, что плотность вероятности $W_{ee}\left(x;M,\vec{\alpha},\vec{a};N,\vec{\beta},\vec{b}\right)$ суммы двух независимых гиперэкспоненциальных статистик с параметрами $\{M,\vec{\alpha},\vec{a}\}$ и $\{N,\vec{\beta},\vec{b}\}$ представляет собой гиперэкспоненциальную плотность вероятности, а именно

$$W_{ee}\left(x;M,\vec{\alpha},\vec{a};N,\vec{\beta},\vec{b}\right)=\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\sum_{n=1}^{N}\beta_n w_{ee}(x;a_m,b_n)=$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \mathrm{A}_m w_e(x;a_m) + \sum_{n=1}^{N} \mathrm{B}_n w_e(x;b_n), \tag{9}$$

где $\mathrm{A}_m = \alpha_m a_m \sum_{n=1}^{N} \beta_n / (a_m - b_n)$ и $\mathrm{B}_n = \beta_n b_n \sum_{m=1}^{M} \alpha_m / (b_n - a_m)$. Т. о., можно утверждать, что множество гиперэкспоненциальных плотностей вероятности замкнуто относительно операции свертки. Это означает, что гиперэкспоненциальное распределение вероятностей воспроизводит себя при композиции.

III. ЭРЛАНГОВСКАЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СТАТИСТИКИ

Вычисляя свертку плотностей вероятности (3) и (2), можно получить выражение для плотности вероятности $w_{Ee}(x;a,K;b)$ суммы независимых эрланговской и экспоненциальной статистик в виде

$$w_{Ee}(x;a,K;b) = \left(\frac{b}{b-a}\right)^K \left[w_e(x;b) + \frac{a}{a-b} \sum_{l=1}^{K} \left(\frac{b-a}{b}\right)^l w_E(x;a,l) \right], \tag{10}$$

где a и K - параметры эрланговской статистики; b - параметр экспоненциальной статистики. Сравнивая (10) и (6), видим, что сумма эрланговской и экспоненциальной статистик имеет гиперэрланговское распределение.

Соответствующая плотности вероятности (10) функция распределения имеет вид

$$f_{Ee}(x;a,K;b) = 1 - \left(\frac{b}{b-a}\right)^K \Bigg\{ b w_e(x;b) +$$

$$+ a \sum_{l=1}^{K} \left[\left(\frac{b-a}{b}\right)^K - \left(\frac{b-a}{b}\right)^{l-1} \right] w_E(x;a,l) \Bigg\}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что формулы (7) и (8) могут быть получены из (10) и (11) как частный случай при $K = 1$.

Используя (10) и (11), не представляет труда получить выражения для плотности вероятности и функции распределения суммы гиперэрланговской и гиперэкспоненциальной статистик.

IV. ГАММА- И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАТИСТИКИ

Плотность вероятности суммы независимых гамма-статистики с параметрами a и A и экспоненциальной статистики с параметром b может быть найдена (как свертка плотностей вероятности (1) и (2)) в виде

$$w_{\gamma e}(x;a,A;b)=\left(\frac{b}{b-a}\right)^{A} w_e(x;b) f_\gamma\left(x;\frac{ab}{a-b},A\right), \tag{12}$$

где

$$f_\gamma(x;a,A)=1(x)\mathrm{P}(A,x/a) - \tag{13}$$

функция распределения, соответствующая плотности вероятности (1);

$$\mathrm{P}(t,z)=\int_0^z y^{t-1}\exp(-y)dy/\Gamma(t)\ - \tag{14}$$

нормированная неполная гамма-функция [7].

Функция распределения, соответствующая (12), может быть представлена в виде

$$f_{\gamma e}(x;a,A;b)=f_\gamma(x;a,A)-bw_{\gamma e}(x;a,A;b). \tag{15}$$

Нетрудно также получить, что

$$W_{\gamma e}\left(x;M,\vec{\alpha},\vec{a},\vec{A};N,\vec{\beta},\vec{b}\right)=\sum_{n=1}^{N}\beta_n w_e(x;b_n)\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\left(\frac{b_n}{b_n-a_m}\right)^{A_m} f_\gamma\left(x;\frac{a_m b_n}{b_n-a_m},A_m\right)- \tag{16}$$

плотность вероятности, а

$$F_{\gamma e}\left(x;M,\vec{\alpha},\vec{a},\vec{A};N,\vec{\beta},\vec{b}\right)=\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\left[f_\gamma(x;a_m,A_m)-\sum_{n=1}^{N}\beta_n b_n w_{\gamma e}(x;a_m,A_m;b_n)\right] - \tag{17}$$

функция распределения суммы независимых гипергамма-статистик с параметрами $M,\vec{\alpha},\vec{a},\vec{A}$ и гиперэкспоненциальной статистики с параметрами $N,\vec{\beta},\vec{b}$.

V. ЭРЛАНГОВСКИЕ СТАТИСТИКИ

Известно [3] выражение для характеристической функции распределения Эрланга

$$\theta_E(\eta;a,K)=(1-i\eta a)^{-K}, \tag{18}$$

где $i=\sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Характеристическая функция суммы двух независимых статистик с параметрами a,K и b,L есть произведение двух характеристических функций типа (18), т. е.

$$\theta_{EE}(\eta;a,K;b,L)=(1-i\eta a)^{-K}(1-i\eta b)^{-L}. \tag{19}$$

В частном случае $a=b$ из (19) получаем

$$\theta_{EE}(\eta;a,K;a,L)=(1-i\eta a)^{-(K+L)}=\theta_E(\eta;a,K+L), \tag{20}$$

что означает воспроизводимость распределения Эрланга по второму параметру.

В общем случае правую часть (19) можно [8] представить в виде суммы простых дробей, а именно

$$\theta_{EE}(\eta;a,K;b,L)=(-1)^L\frac{a^Lb^K}{(L-1)!(b-a)^{K+L}}\sum_{l=1}^{K}\frac{(K+L-l-1)!}{(K-l)!}\left[\frac{b-a}{b(1-i\eta a)}\right]^l+$$

$$+\left(-1\right)^{K}\frac{a^{L}b^{K}}{\left(K-1\right)!\left(a-b\right)^{K+L}}\sum_{l=1}^{L}\frac{\left(K+L-l-1\right)!}{\left(L-l\right)!}\left[\frac{a-b}{a\left(1-i\eta b\right)}\right]^{l}. \qquad (21)$$

Преобразуем (21) в

$$\theta_{EE}\left(\eta;a,K;b,L\right)=C\left(a,K;b,L\right)\left[\sum_{l=1}^{K}I_{l}\left(a,K;b,L\right)\theta_{E}\left(\eta;a,l\right)+\sum_{l=1}^{L}J_{l}\left(a,K;b,L\right)\theta_{E}\left(\eta;b,l\right)\right], \qquad (22)$$

используя обозначения

$$C\left(a,K;b,L\right)=\left(\frac{a}{a-b}\right)^{L}\left(\frac{b}{b-a}\right)^{K}\frac{\left(K+L-2\right)!}{\left(K-1\right)!\left(L-1\right)!}\ ; \qquad (23)$$

$$I_{l}\left(a,K;b,L\right)=\left(\frac{b-a}{b}\right)^{l}\frac{\left(1-K\right)_{l-1}}{\left(2-K-L\right)_{l-1}}\ ; \qquad (24)$$

$$J_{l}\left(a,K;b,L\right)=\left(\frac{a-b}{a}\right)^{l}\frac{\left(1-L\right)_{l-1}}{\left(2-K-L\right)_{l-1}}\ ; \qquad (25)$$

$\left(a\right)_{m}=a\left(a+1\right)\ldots\left(a+m-1\right)$ - символ Похгаммера [7].

Воспользовавшись свойством линейности преобразования Фурье, из (22) легко получить общее выражение для плотности вероятности суммы двух независимых эрланговских статистик

$$w_{EE}\left(x;a,K;b,L\right)=C\left(a,K;b,L\right)\left[\sum_{l=1}^{K}I_{l}\left(a,K;b,L\right)w_{E}\left(x;a,l\right)+\sum_{l=1}^{L}J_{l}\left(a,K;b,L\right)w_{E}\left(x;b,l\right)\right]. \qquad (26)$$

Сравнивая (26) и (6) видим, что сумма двух независимых эрланговских статистик имеет гиперэрланговское распределение. Отсюда следует, что сумма двух гиперэрланговских статистик также имеет гиперэрланговское распределение, т. е. гиперэрланговское распределение воспроизводит себя при композиции.

Из (26) нетрудно получить выражение для функции распределения суммы двух независимых эрланговских статистик

$$f_{EE}(x;a,K;b,L)=C(a,K;b,L)\left[\sum_{l=1}^{K} I_l(a,K;b,L) f_E(x;a,l)+\sum_{l=1}^{L} J_l(a,K;b,L) f_E(x;b,l)\right], \tag{27}$$

где

$$f_E(x;a,K)=1-\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\sum_{l=0}^{K-1}\frac{(x/a)^l}{l!} \text{ -} \tag{28}$$

эрланговская функция распределения, соответствующая плотности вероятности (3). С учетом (28) выражение (27) можно преобразовать в

$$f_{EE}(x;a,K;b,L)=1(x)\left\{1-C(a,K;b,L)\left[\exp\left(-\frac{x}{a}\right)\sum_{l=1}^{K} I_l(a,K;b,L)\sum_{m=0}^{l-1}\frac{(x/a)^m}{m!}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\exp\left(-\frac{x}{b}\right)\sum_{l=1}^{L} J_l(a,K;b,L)\sum_{m=0}^{l-1}\frac{(x/b)^m}{m!}\right]\right\}. \tag{29}$$

VI. ГАММА- И ЭРЛАНГОВСКАЯ СТАТИСТИКИ

Плотность вероятности суммы двух независимых статистик, одна из которых имеет гамма-распределение с параметрами a, A , а другая – эрланговское распределение с параметрами b, B , есть свертка плотностей вероятности (1) и (3). После несложных, но громоздких, преобразований можно получить

$$w_{\gamma E}(x;a,A;b,L)=\left(\frac{a}{b}\right)^L w_\gamma(x;a,A+L)\ {}_1F_1\left(L;A+L;\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right), \tag{30}$$

где

$${}_1F_1(\alpha;\beta;z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m z^m}{(\beta)_m m!} \text{ -} \tag{31}$$

вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера) [3].

Соответствующую (30) функцию распределения можно представить в виде конечной суммы

$$f_{\gamma E}(x;a,A;b,L)=f_{\gamma}(x;a,A)-b\sum_{l=1}^{L}w_{\gamma E}(x;a,A;b,l)\ . \qquad (32)$$

В частном случае $L=1$ из (30) можно получить выражение (12), а из (32) – формулу (15). Соответственно, выражение для функции распределения суммы гипергамма- и гиперэрланговской статистик обобщает формулу (17).

VII. ГАММА-СТАТИСТИКИ

Плотность вероятности суммы двух независимых гамма-статистик определяется формулой, аналогичной (30), а именно

$$w_{\gamma\gamma}(x;a,A;b,B)=\left(\frac{a}{b}\right)^{B}w_{\gamma}(x;a,A+B)\ {}_1F_1\left(B;A+B;\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right). \qquad (33)$$

Поскольку ${}_1F_1(\alpha;\beta;0)=1$ независимо от α и β, из (33) следует

$$w_{\gamma\gamma}(x;a,A;a,B)=w_{\gamma}(x;a,A+B). \qquad (34)$$

Смысл (34) аналогичен смыслу (20): в частном случае $a=b$ (и только в этом случае) сумма двух гамма-статистик имеет гамма-распределение.

Для функции распределения суммы двух независимых гамма-статистик удалось получить только интегральное представление

$$f_{\gamma\gamma}(x;a,A;b,B)=\frac{w_{\gamma}(x;a,A)}{a}\int_{0}^{1}(1-y)^{A-1}f_{\gamma}(xy;b,B)\exp\left(\frac{xy}{b}\right)dy\ . \qquad (35)$$

Пределы интегрирования и подынтегральная функция в (35) таковы, что численный расчет по этой формуле не представляет затруднений.

Таким образом, в работе получены новые выражения для сумм двух независимых случайных величин, которые могут иметь гамма-, экспоненциальное или эрланговское распределение. Показано, что множество гиперэкспоненциальных плотностей вероятности и множество гиперэрланговских плотностей вероятности замкнуты относительно операции свертки, а множество гипергамма-плотностей вероятности - нет

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Мир, 1984. Т.2.
2. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1984.
3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.- М.: Радио и связь, 1982.
5. Вопросы статистической теории радиолокации / П. А. Бакут, И. А. Большаков, Б. М. Герасимов и др.; Под ред. Г. П. Тартаковского.- М.: Сов. радио, 1963. Т.1.
6. Костылев В. И. Обнаружение протяженного радиоисточника в шуме // Изв. вузов- Радиофизика.- 1999.- Т. 42.- № 4.- С. 394-399.
7. Дэвис Ф. // Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука, 1979. –С. 80 - 118.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.- М.: Наука, 1974