

КВАНТОВЫЙ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

С.Г. Кадменский

Воронежский государственный университет

Исследованы условия проявления нерегулярного поведения и хаотичности для автономных гамильтоновых классических и квантовых систем. Показано, что теорема Лиувилля-Арнольда, связывающая число степеней свободы с числом главных независимых интегралов движения системы, определяет необходимое условие проявления хаоса в системе. Продемонстрирован метод описания хаоса в квантовых системах на основе аппарата случайных матриц Вигнера. В качестве примеров проявления квантового хаоса проанализированы свойства нейтронных резонансов в атомных ядрах и диамагнитной задачи Кеплера.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование хаотических процессов в детерминированных системах является одним из важнейших направлений современного естествознания. Успехи этого направления для нелинейных классических систем, которые описываются на языке траекторий системы в фазовом пространстве, общепризнаны [1]. В то же время концепция детерминированного хаоса в квантовых системах, для которых в принципе неприменимо понятие траектории, до сих пор остается предметом серьезных дискуссий. В некоторых публикациях ставится под сомнение даже сама правомочность введения понятия квантового хаоса и предлагается лишь искать в квантовых системах «следы» классического хаоса. Подобная точка зрения, естественно, не может найти поддержки среди физиков, опирающихся на квантовые представления, поскольку квантовая теория является более общей, нежели классическая, и лишь в предельном случае, называемом квазиклассическим приближением, квантовое описание систем переходит в классическое. Целью настоящей работы является демонстрация представлений о квантовом хаосе, впервые возникших при анализе свойств нейтронных резонансов в атомных ядрах, и обзор новейших подходов к описанию квантового хаоса в квантовых гамильтоновых системах.

Детерминированный хаос в автономных классических гамильтоновых системах

В работе [1] были рассмотрены проблемы возникновения детерминированного хаоса в

классических диссипативных системах, которые относятся к классу неавтономных (незамкнутых) систем. Исследуем проявление хаоса в автономных классических гамильтоновых системах, используя методы, развитые в работах [2,3]. Сразу будем рассматривать нелинейные системы, поскольку, если уравнения движения системы являются линейными, то такая система имеет только регулярные (периодические) типы движений и в принципе не обладает хаотическими свойствами. Состояние автономной системы в момент времени t полностью определяется [2] заданием S обобщенных координат $q_i(t)$ (число S определяет число степеней свободы системы) и S обобщенных скоростей $\dot{q}_i = \frac{dq_i(t)}{dt}$ или S обобщенных импульсов $p_i(t)$, образующих $2S$ -мерное фазовое пространство. Эта система описывается гамильтонианом $H(q_i, p_i)$, не зависящим явно от времени t и совпадающим с полной энергией E системы. Уравнения движения системы определяются дифференциальными уравнениями Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1)$$

Поясним вышесказанное на примере движения точечной частицы во внешнем поле с потенциалом $V(\vec{r})$, где \vec{r} - трехмерный радиус-вектор, проекции которого x, y, z на декартовы оси координат задают три обобщенные координаты, так что число степеней свободы частицы $S = 3$. Гамильтониан частицы $H(q_i, p_i)$ в этом случае

равен сумме кинетической и потенциальной энергий частицы : $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$. Тогда первое уравнение Гамильтона (1) определяет связь импульса \vec{p} и скорости $\dot{\vec{r}}$ частицы: $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, а второе уравнение Гамильтона совпадает со вторым законом механики, связывающим ускоре-

ние частицы $\ddot{\vec{r}}$ с действующей на нее силой \vec{F} :

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\frac{dV(\vec{r})}{d\vec{r}}.$$

Интегрирование уравнений (1) при задании 2S- начальных условий $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$ позволяет найти траекторию движения системы:

$$q_i(t) = F_i(q_i(0), \dot{q}_i(0), t), \quad (2)$$

где функция F_i определяет закон, осуществляющий однозначное преобразование начального состояния системы $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$ в состояние системы при $t > 0$. Уравнение (2) полностью детерминировано и не содержит свойств хаоса, основными признаками которого являются случайность и непредсказуемость поведения системы и невозможность повторения эволюции системы при выходе ее из одного и того же стартового состояния.

Для того, чтобы можно было наблюдать нерегулярные движения системы, допустим, что в начальный момент времени система описывается не одной точкой с координатами $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$, а малой областью V_o в фазовом пространстве, все точки которой равновероятны. Эту область представим в виде сферы с центром в точке $q_i(0)$, $\dot{q}_i(0)$ и малым радиусом $D(0)$. По теореме Лиувилля [2] при движении системы в соответствии с уравнением (1) объем фазовой области $V(t)$, в которую переходит начальная область V_o , не меняется со временем. Если система устойчива к малым вариациям (малым возмущениям) начальных условий [1], форма области $V(t)$ как функция t будет приблизительно сохраняться, что соответствует регулярному поведению системы, при котором система имеет только периодические движения. Справедливо и обратное утверждение: если система регулярна, она является устойчивой к малым вариациям начальных условий. Для неустойчивых же систем при малых вариациях начальных условий происходит резкое отклонение траекторий движения от исходной траектории (2), то есть малые возмущения нарастают во времени. Математичес-

ки это означает, что отклонения $D(t)$ от исходной траектории (2) по определенным направлениям в фазовом пространстве увеличиваются на начальном интервале времени по экспоненциальному закону Ляпунова [1]:

$$D(t) = D(0)\exp(\lambda t), \quad (3)$$

где константа λ является положительной. В дальнейшем в силу вступает механизм нелинейного ограничения процесса нарастания возмущения [1], и траектории снова начинают сближаться. В этом случае с ростом времени происходит сильная деформация области $V(t)$ при сохранении ее объема по отношению к начальной области V_o - по одним направлениям она расширяется, а по другим сжимается. Тогда траектории системы при достаточно высоком уровне ее нелинейности равномерно перемешаются в занятой ими области фазового пространства, что соответствует нерегулярному поведению системы и появлению в ней хаотических свойств, для описания которых можно использовать вероятностные представления.

Для оценки уровня хаотичности системы при переходе от малых масштабов нерегулярности движения, когда константа λ мала, к большим можно использовать безразмерный параметр стабильности системы χ , определяемый как $\chi = \lambda T$, где T - характерный период регулярного движения системы. Если значение $\chi \ll 1$, система является слабо возмущенной, то есть хаотические слои в фазовом пространстве системы имеют малый статистический вес, и система ведет себя почти как регулярная. Если $\chi = 1$, следы регулярных слоев в фазовом пространстве практически исчезают, и поведение системы становится хаотическим.

Нерегулярность движения и свойства симметрии классических систем

В качестве критерия перехода к хаосу в различных системах, включая и квантовые, в работе [4] было предложено использовать представление об интегрируемости уравнений движения системы, достаточно широко применяемое при описании механических систем [3]. Для автономных классических систем существуют такие функции $J = J(q_i(t), p_i(t))$ фазовых координат системы $q_i(t)$, $p_i(t)$, которые не зависят от времени и называются интегралами движения. Среди интегралов движения системы выделенную роль играют так называемые главные или первые интег-

ралы движения J_k , которые прямо связаны с пространственными и временными свойствами симметрии гамильтониана системы. Эту связь устанавливает теорема Неттер [3]. Так, если гамильтониан системы $H(q_i, p_i)$ не меняется при сдвиге времени, сдвигах начала системы координат, поворотах системы координат вокруг произвольной оси, то система обладает такими главными интегралами движения J_k , как энергия, импульс, момент количества движения системы. Существует теорема Лиувилля-Арнольда [3], согласно которой механическая система с S степенями свободы имеет только регулярные типы движений, если $M = S$, где M - число независимых главных интегралов движения J_k . Такие системы обладают свойством интегрируемости их уравнений движения (1), то есть траектории движения системы (2) можно выразить через интегралы от аналитических функций. Если же $M < S$, уравнения движения (1) в принципе становятся неинтегрируемыми, и движение системы при определенных условиях становится нерегулярным и система переходит в хаотический режим. Это утверждение является формулировкой необходимого условия появления в системе хаоса.

Классическая диамагнитная задача Кеплера

В качестве примера классической автономной нелинейной гамильтоновой системы, для которой достаточно подробно исследованы [5] режимы перехода от регулярности к хаосу, рассмотрим диамагнитную задачу Кеплера. В ней анализируется движение электрона в притягивающем кулоновском поле атома водорода с одновременным воздействием на электрон постоянного и однородного магнитного поля с напряженностью \vec{B} , направленной по оси Z . Гамильтониан электрона в этом случае представляется как:

$$H = H_o + V, \tag{4}$$

где H_o - гамильтониан задачи Кеплера :

$$H_o = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \tag{5}$$

а V - часть гамильтониана, связанная с воздействием на электрон магнитного поля :

$$V = \omega L_z + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2), \tag{6}$$

причем L_z - проекция момента количества движения электрона на ось Z , а частота $\omega = \frac{eB}{2mc}$. Для явной оценки масштабов влияния магнитного поля удобно ввести безразмерную энергию $\varepsilon = \frac{E}{E_o}$, где величина $E_o = (m\omega^2 e^4)^{1/3}$ соответствует кулоновской энергии электрона для таких значений r , когда эта энергия совпадает со связанной с магнитным полем энергией $\frac{mr^2\omega^2}{2}$. Для отрицательных значений полной энергии электрона E , при которых движение электрона происходит в ограниченной области фазового пространства, величина ε меняется от $-\infty$ для $B=0$ до 0 при $B=\infty$.

Проанализируем эту задачу с позиций интегрируемости уравнений движения. При отсутствии внешнего магнитного поля гамильтониан электрона совпадает с гамильтонианом H_o (5) задачи Кеплера. В этом случае существуют главные интегралы движения, определяемые свойствами симметрии гамильтониана H_o , который не меняется во времени (с этим связана энергия E) и обладает пространственной сферической симметрией (с этим связан вектор \vec{L} момента количества движения электрона). Среди этих главных интегралов движения можно найти три главных независимых интеграла - энергию E , квадрат момента количества движения электрона \vec{L}^2 и его проекцию L_z на ось Z . Поскольку в этом случае $M = S = 3$, то уравнения движения электрона интегрируемы, а движение электрона является регулярным. При включении внешнего магнитного поля потенциал V (6) сохраняет в качестве главных независимых интегралов движения только энергию и проекцию L_z , но разрушает интеграл движения \vec{L}^2 . Поэтому в этом случае $M=2 < S=3$, и в системе могут появиться хаотические моды движений, связанные с возникновением в фазовом пространстве стохастических слоев. Для малых значений напряженности магнитного поля B интеграл движения \vec{L}^2 приближенно сохраняется, поэтому стохастические слои в фазовом пространстве еще достаточно тонки, так что регулярное движение преобладает. При увеличении напряженности B величина \vec{L}^2 перестает быть интегралом движения. Тогда нарастает нерегулярность движения электрона и оно приближается к режиму полного хаоса.

В работе [5] с использованием быстродействующих компьютеров был проведен расчет

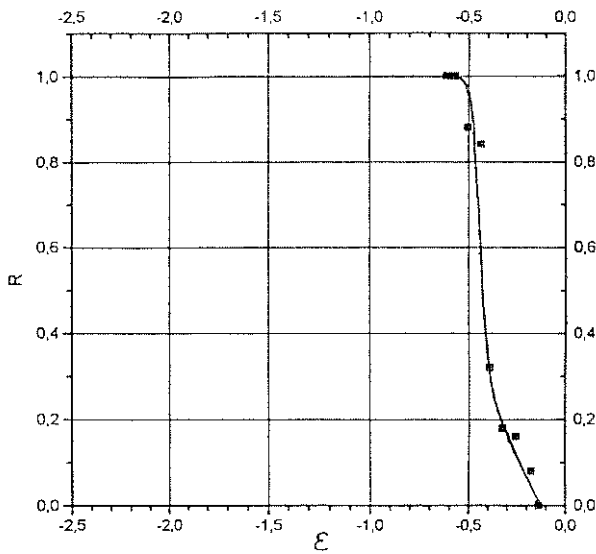


Рис.1. Зависимость доли R фазового пространства, покрываемого регулярными траекториями, от энергии ϵ для классической диамагнитной задачи Кеплера.

доли R фазового пространства, покрываемого регулярными траекториями электрона, в зависимости от величины ϵ для случая связанных состояний электрона ($\epsilon < 0$). Результаты этого расчета представлены на рис.1. Видно, что величина R близка к 1 для $\epsilon \leq -0,48$, а затем при увеличении ϵ быстро падает до нуля в области $-0,48 \leq \epsilon \leq -0,125$, что соответствует переходу движения электрона в хаотический режим.

Описание квантовых автономных гамильтоновых систем

Для перехода от классического к квантовому описанию автономной гамильтоновой механической системы необходимо [2] выполнить две процедуры. Во-первых, в классическом гамильтониане $H(q_i, p_i)$ следует сохранить все S обобщенных координат q_i , а обобщенные импульсы p_i заменить на операторы $\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$, где \hbar - постоянная Планка, то есть вместо классического гамильтониана $H(q_i, p_i)$ следует использовать его квантовый аналог - оператор Гамильтона $\hat{H} \equiv H(q_i, \hat{p}_i)$. Аналогично все главные независимые интегралы движения $J_{\bar{k}} = J_{\bar{k}}(q_i, p_i)$ классической системы, не совпадающие с гамильтонианом системы, следует заменить на операторы $\hat{J}_{\bar{k}} = J_{\bar{k}}(q_i, \hat{p}_i)$. Заметим, что при описании квантовых систем частиц, обладающих внутренними степенями свободы, связанными, например, с их спином, требуется

учет соответствующих дополнительных обобщенных внутренних координат частиц в операторах всех независимых главных интегралов, число которых по сравнению с аналогичной классической системой увеличивается. Во-вторых, необходимо найти волновую функцию системы $\Psi_\lambda(q_i)$, квадрат модуля которой $|\Psi_\lambda(q_i)|^2$ определяет плотность вероятности найти систему в состоянии с обобщенными координатами q_i . Для автономной системы волновая функция системы $\Psi_\lambda(q_i)$ является решением стационарного уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\Psi_\lambda(q_i) = E_\lambda \Psi_\lambda(q_i), \quad (7)$$

которое с математической точки зрения представляет собой уравнение на собственные функции $\Psi_\lambda(q_i)$ оператора Гамильтона системы \hat{H} с собственными значениями E_λ , которые определяют возможные значения энергии системы. Наличие в системе независимых первых интегралов движения $\hat{J}_{\bar{k}}$ приводит к тому, что волновая функция системы $\Psi_\lambda(q_i)$ является также собственной функцией и операторов $\hat{J}_{\bar{k}}$ с собственными значениями $J_{\bar{k}}$:

$$\hat{J}_{\bar{k}}\Psi_\lambda(q_i) = J_{\bar{k}}\Psi_\lambda(q_i). \quad (8)$$

Отметим, что уравнения (7-8) не зависят от времени и являются линейными, в отличие от уравнений движения (1) для классической системы, а их решения дают [2] однозначное и детерминированное описание волновой функции системы $\Psi_\lambda(q_i)$ во всем пространстве ее обобщенных координат. Как и в случае классических систем, этот вывод означает, что уравнения (7-8) полностью детерминированы и не содержат свойств хаоса, основными признаками которого являются случайность и непредсказуемость поведения системы. Когда же в квантовых системах можно наблюдать их нерегулярное поведение и квантовый хаос?

Рассмотрим вначале случай квантовой системы, в которой число уравнений (7-8), равное числу M главных независимых интегралов движения, совпадает с числом S обобщенных координат q_i , от которых зависит волновая функция системы, то есть с числом степеней свободы системы. В этом случае уравнения (7-8) являются интегрируемыми, то есть волновая функция системы $\Psi_\lambda(q_i)$ может быть представлена в виде интегралов от аналитических функций.

Такая волновая функция описывает регулярное поведение системы. Если же квантовая система имеет число $M < S$, то уравнения (7-8) являются неинтегрируемыми, и в этом случае (при определенном способе описания системы!) в ней можно наблюдать нерегулярное поведение и хаос. Этот вывод, сделанный в работах [4], фактически представляет собой обобщение теоремы Лиувилля-Арнольда на случай квантовых систем и формулирует необходимое условие нерегулярного поведения указанных систем. При каком же способе описания квантовых систем и в каких терминах можно обнаружить их нерегулярное поведение и проявление в них детерминированного квантового хаоса?

Случайные матрицы Вигнера и детерминированный квантовый хаос

Еще в начале 20-х годов Гейзенбергом была предложена матричная формулировка квантовой механики, которая полностью эквивалентна по результатам формулировке, обсуждавшейся выше и основанной [2] на использовании понятия волновой функции. Продемонстрируем особенности матричного подхода на примере автономной нерегулярной квантовой системы, описываемой волновой функцией $\Psi_\lambda(q_i)$, удовлетворяющей уравнениям (7-8), когда $M < S$. Разложим функцию $\Psi_\lambda(q_i)$ в ряд по известным волновым функциям $\phi_k(q_i)$ для интегрируемой и поэтому регулярной квантовой системы с тем же самым числом степеней свободы:

$$\Psi_\lambda(q_i) = \sum_k c_k^\lambda \phi_k(q_i), \tag{9}$$

где коэффициенты c_k^λ , взятые по модулю в квадрате, определяют вероятность найти изучаемую систему в состоянии, описываемом волновой функцией $\phi_k(q_i)$, и поэтому удовлетворяют условиям нормировки:

$$\sum_k |c_k^\lambda|^2 = 1, \quad \sum_\lambda |c_k^\lambda|^2 = 1. \tag{10}$$

Если подставить разложение (9) в уравнение Шредингера(7), то для коэффициентов c_k^λ можно получить [2] матричное уравнение:

$$\sum_{k_1} H_{kk_1} c_{k_1}^\lambda = E_\lambda c_k^\lambda, \tag{11}$$

где элементы матрицы H_{kk_1} определяются интегралами вида:

$$H_{kk_1} = \int \phi_k^*(q_i) \hat{H}(q_i) \phi_{k_1}(q_i) \prod_i dq_i, \tag{12}$$

причем звездочка над волновой функцией соответствует ее комплексному сопряжению. В квантовой механике [2] показывается, что ряд (9) точно сходится к функции $\Psi_\lambda(q_i)$, если в сумме по k учитывается полный (бесконечный) набор функций $\phi_k(q_i)$. Однако определенную группу волновых функций $\Psi_\lambda(q_i)$ с индексами λ , лежащими в некоторой компактной области, можно с достаточно высокой степенью точности описать разложениями вида (9) при использовании конечного числа N состояний $\phi_k(q_i)$. Эти состояния называют главными компонентами анализируемых волновых функций $\Psi_\lambda(q_i)$. В этом случае матрица H_{kk_1} становится квадратной матрицей с числом элементов N^2 . Зная эту матрицу, можно с помощью уравнения (11) рассчитать энергии E_λ и коэффициенты c_k^λ для N состояний $\Psi_\lambda(q_i)$, а затем с помощью разложения (10) восстановить и волновые функции этих состояний. Но если состояние системы $\Psi_\lambda(q_i)$ описывается конечной суперпозицией (9) регулярных состояний $\phi_k(q_i)$, то состояние $\Psi_\lambda(q_i)$ также является регулярным. Как же тогда быть с нерегулярным поведением системы? Ситуация в этом случае полностью аналогична ситуации с полной детерминированностью любой конкретной траектории (2) в классической системе. Выход из этой ситуации в квантовой системе аналогичен выходу из подобной ситуации в классической системе, когда необходимо перейти от наблюдения одной траектории к рассмотрению всех траекторий, связанных с малым начальным фазовым объемом системы V_o . Для возможности наблюдения нерегулярного поведения квантовой системы необходимо рассматривать не одно состояние $\Psi_\lambda(q_i)$, а достаточно большую группу (ансамбль) подобных состояний и анализировать проявление нерегулярности свойств системы в нерегулярном поведении коэффициентов c_k^λ в разложениях типа (9) для всего рассматриваемого ансамбля.

Следуя Вигнеру, допустим, что свойства хаоса в квантовой системе проявляются в том, что матрица H_{kk_1} является случайной матрицей, все элементы которой являются случайными величинами. В этом случае можно показать [6], что элементы этой матрицы подчиняются нормальному распределению, хорошо известному в теории вероятности. Тогда из решения уравнения (11), в котором фигурирует случайная матрица H_{kk_1} , можно рассчитать для N состояний $\Psi_\lambda(q_i)$ рас-

пределения энергий E_λ и коэффициентов c_k^λ , которые становятся также случайными величинами. Используя найденное распределение энергий E_λ , можно найти распределение расстояний D между соседними по величине энергии уровнями E_λ , называемое распределением Вигнера:

$$P(x) = \frac{\pi}{2} x \exp\left\{-\frac{\pi}{4} x^2\right\}, \quad (13)$$

где $x = D/D_0$, а D_0 - среднее расстояние между соседними уровнями.

В свою очередь распределение случайных коэффициентов c_k^λ при различных значениях k и λ определяется только условиями их нормировки (10). Поэтому, если число главных компонент N в разложении (11) значительно больше единицы, то любой из коэффициентов c_k^λ подчиняется нормальному распределению вида:

$$P(c_k^\lambda) = \left(\frac{N}{2\pi}\right) \exp\left\{-\frac{N}{2}(c_k^\lambda)^2\right\}, \quad (14)$$

для которого среднее значение $\langle (c_k^\lambda)^2 \rangle$ величины $(c_k^\lambda)^2$ равно $1/N$. Используя распределение коэффициентов c_k^λ , можно найти функцию распределения $P_v(f)$ величины $f = \sum_k (c_k^\lambda)^2 \beta_k$, где β_k - положительно определенные величины:

$$P_v(f) = B_v y^{\frac{v}{2}-1} \exp\left\{-\frac{vy}{2}\right\}, \quad (15)$$

где $y = \left(\frac{f}{\langle f \rangle}\right)$, B_v - нормировочная константа, а

$$v = \left(\sum_k \beta_k\right)^2 \left(\sum_k \beta_k^2\right)^{-1}. \quad (16)$$

Распределение (15) совпадает с хорошо известным в теории вероятности распределением χ^2 с v степенями свободы. В случае $v = 1$ это распределение переходит в распределение Портера-Томаса. Масштаб флуктуаций случайной величины f в общем случае определяется ее дисперсией $D(f) = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$, которая для распределения (15) оказывается равной $\frac{2}{v} \langle f \rangle^2$. Видно, что для случая $v = 1$ эти флуктуации велики, однако при $v \gg 1$ величина f практически не флуктуирует.

Нейтронные резонансы и квантовый хаос в атомных ядрах

В сечениях ядерных реакций, индуцируемых падающими на ядро-мишень с атомным весом A медленными нейтронами, наблюдается [6] в зависимости от энергии нейтронов E_n большое число хорошо разделенных узких пиков, положение которых не меняется при переходе от одной реакции к другой и которые соответствуют нейтронным резонансам. Каждый из этих резонансов однозначно связан с определенным возбужденным состоянием составного ядра с атомным весом $(A+1)$, которое образуется при слиянии налетающего нейтрона с ядром-мишенью, и характеризуется волновой функцией $\Psi_\lambda(q_i)$, определяемой решением уравнений (7-8) и индексом λ , который, помимо энергии E_λ , характеризуется еще и набором квантовых чисел, связанных с первыми независимыми интегралами движения ядра $J_{\bar{k}}$. К таким квантовым числам относятся полный момент количества движения составного ядра (его называют спином ядра) J , проекция спина m на ось Z и четность π . Четность системы частиц в квантовой механике характеризуется квантовым числом π , которое может принимать значения $+1(-1)$, если волновая функция системы не меняет знака (меняет знак) при отражении пространственных координат частиц, то есть является четной (нечетной). Для систем с ядерными и электромагнитными взаимодействиями четность является интегралом движения, и только учет слабых взаимодействий, проявляющихся, например в бета-распаде, приводит к несохранению четности. Нейтронный резонанс характеризуется также шириной $\Gamma_\lambda = \sum_s \Gamma_{\lambda s}$, которая при делении на \hbar дает полную вероятность распада резонанса в единицу времени, причем величины $\Gamma_{\lambda s}$ определяют парциальные ширины распада нейтронного резонанса λ в различные каналы s , причем значения $s = n$, $s = \alpha$, $s = \gamma$ и $s = f$ отвечают соответственно каналам распада с испусканием нейтрона, альфа-частицы, гамма-кванта и каналу деления ядра. В настоящее время накоплена богатая экспериментальная информация об энергиях, спинах и четностях нейтронных резонансов, их полных и парциальных ширинах и, наконец, об эффектах несохранения четности в нейтронных резонансах. Обработка этой информации [6,7] позволила впервые получить представления о природе целого ряда фундаментальных динамических и статистических характеристик ядер, включая представления о квантовом хаосе.

Поскольку в тяжелых ядрах число S обобщенных координат q_i , входящих в $\Psi_\lambda(q_i)$, очень велико, а число M независимых первых интегралов движения для нейтронных резонансов мало ($M \ll S$), то можно ожидать в соответствии с теоремой Лиувилля-Арнольда проявления нерегулярностей в свойствах ансамбля нейтронных резонансов.

Статистический анализ распределения энергетических расстояний между соседними нейтронными резонансами с фиксированными значениями J , m и π для широкой области ядер продемонстрировал [6] хорошее согласие этих распределений с распределением Вигнера (13), что иллюстрируется рисунком 2. Для проверки свойств распределений коэффициентов c_k^λ в разложениях типа (9) для волновых функций $\Psi_\lambda(q_i)$ ансамбля нейтронных резонансов можно рассмотреть свойства нейтронных ширин $\Gamma_{\lambda n}$ нейтронных резонансов, которые представляются [7] как $\Gamma_{\lambda n} = (c_{k_0}^\lambda)^2 \Gamma_n^0$, где индекс k_0 отвечает в разложении (9) волновой функции ϕ_{k_0} ядра $(A+1)$, которая соответствует квазистационарному состоянию нейтрона с шириной распада Γ_n^0 в потенциальном поле ядра-мишени. Тогда, приравняв введенную выше величину f величине $\Gamma_{\lambda n}$, приходим к заключению, что ширины $\Gamma_{\lambda n}$ ансамбля нейтронных резонансов подчиняются распределению (15) с $\nu=1$, то есть распределению Портера-Томаса, что иллюстрируется ри-

сунком 3 [6]. Альфа-ширины $\Gamma_{\lambda\alpha}$ нейтронных резонансов можно представить как [7]

$$\Gamma_{\lambda\alpha} = \sum_r \Gamma_{\lambda\alpha r} = \sum_r (c_r^\lambda)^2 \Gamma_{\alpha r}^0, \text{ где } \Gamma_{\alpha r}^0 - \text{ ширина распада}$$

состояния, описывающего движение альфа-частицы в потенциальном поле дочернего ядра, находящегося в состоянии r . Приравняв величину $\Gamma_{\lambda\alpha}$ величине f , можно сделать заключение, что альфа-ширины нейтронных резонансов подчиняются распределению χ^2 с ν степенями свободы (15), где ν определяется формулой (16) при замене индекса i на индекс r , а величин α_i на $\Gamma_{\alpha r}^0$. Сравнение экспериментальных распределений полных альфа-ширин нейтронных резонансов с распределением χ^2 демонстрирует их хорошее соответствие [7]. Экспериментальные гамма-ширины $\Gamma_{\lambda\gamma}$ нейтронных резонансов практически не испытывают флуктуаций при переходе от одного нейтронного резонанса к другому [6]. Этот факт хорошо понятен с точки зрения распределения (15), поскольку имеется много каналов гамма-распада нейтронного резонанса с переходом на низколежащие состояния составного ядра, так что величина ν в этом случае принимает большое значение $\nu \gg 1$. Особенно драматическая картина возникает с делительными ширинами $\Gamma_{\lambda f}$ нейтронных резонансов. В этом случае можно было бы рассчитывать на ситуацию, аналогичную ситуации с гамма-ширинами, когда $\nu \gg 1$, поскольку число наблюдаемых каналов деления ядра с появлением ядер-осколков с различным составом и в различных энергетических состояниях исключительно велико. Однако экспериментальные делительные ширины $\Gamma_{\lambda f}$ очень сильно флуктуируют при переходе от одного нейтронного резонанса к другому, что соответствует экспериментальным значениям ν , не сильно отличающимся от 1. Интерпретация этого удивительного результата была дана О. Бором [6], который предположил, что деление составного ядра из нейтронных резонансов протекает через небольшое число определенных переходных состояний, описываемых волновыми функциями ϕ_p . Тогда, представляя $\Gamma_{\lambda f}$ формулой, аналогичной формуле для полной альфа-ширины нейтронного резонанса при замене альфа-частичных ширин $\Gamma_{\alpha r}^0$ на делительные ширины Γ_{fp} из переходных состояний p , и используя распределение (15) с $f = \Gamma_{\lambda f}$, можно объяснить сильные флуктуации делительных ширин для ансамбля нейтронных резонансов. Заметим, что представление о переходных состояниях оказалось

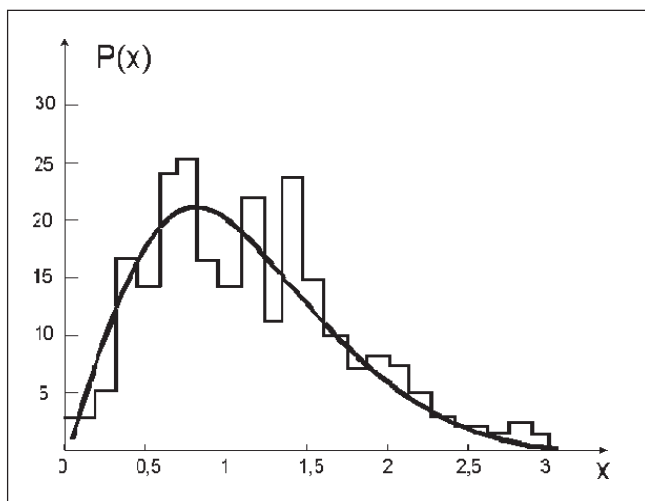


Рис.2. Распределение расстояний $x = \frac{D}{D_0}$ между соседними нейтронными резонансами, наблюдающимися в реакции $n = Th^{232}$. Сплошная кривая соответствует распределению Вигнера $P(x)$, нормированному на число (223) анализируемых нейтронных резонансов.

весьма продуктивным и при описании процессов деления атомных ядер из основных и низколежащих возбужденных состояний, весьма далеких по свойствам от нейтронных резонансов.

Таким образом представление матрицы оператора Гамильтона (12) как случайной матрицы не только блестяще подтвердилось при анализе статистических характеристик ансамбля нейтронных резонансов, но и позволило сделать весьма продуктивные предсказания .

Квантовая диамагнитная задача Кеплера и квантовый параметр стабильности

Вернемся к квантовой задаче Кеплера. Рассмотрим разложение (9) волновой функции $\Psi_\lambda(\vec{r})$, являющейся решением уравнений (7-8) с точным оператором Гамильтона $\hat{H}(\vec{r})$, соответствующим классическому гамильтониану (4), по волновым функциям $\phi_k(\vec{r})$, являющимся решением уравнений (7-8) с оператором Гамильтона $\hat{H}_0(\vec{r})$, соответствующим классическому гамильтониану задачи Кеплера (5). Индекс k в волновой функции $\phi_k(\vec{r})$ полностью определяется заданием трех чисел n, l, m , которые по терминологии Н.Бора называются главным, орбитальным и магнитным квантовыми числами и определяют собственные значения трех независимых первых интегралов движения - энергии электрона в кулоновском поле $E_n = -\frac{R}{n^2}$, где величина $R = \frac{me^4}{2\hbar^2}$ называется постоянной Ридберга, оператора квадрата момента количества движения электрона \hat{L}^2 и оператора проекции орбитального момента электрона \hat{L}_Z на ось Z . В свою очередь, волновая функция $\Psi_\lambda(\vec{r})$ определяется собственными значениями двух независимых главных интегралов - энергией \tilde{E}_S и магнитным квантовым числом m . Таким образом при включении магнитного поля сохраняется вырождение энергии по m , но исчезает ее вырождение по индексу l . В этом случае уравнения (7-8) становятся неинтегрируемыми, а их решения уже могут описать нерегулярное поведение ансамбля состояний $\Psi_\lambda(\vec{r})$ квантовой системы.

Используя методы работ [8], можно рассчитать энергетическую функцию распределения квадрата коэффициента c_k^λ разложения (9) для

фиксированного состояния k с характеристиками n, l, m , где $n \gg 1$, в зависимости от характеристик состояний λ с тем же значением m . При усреднении этой функции распределения по достаточно широкому энергетическому интервалу Δ , внутри которого имеется много состоя-

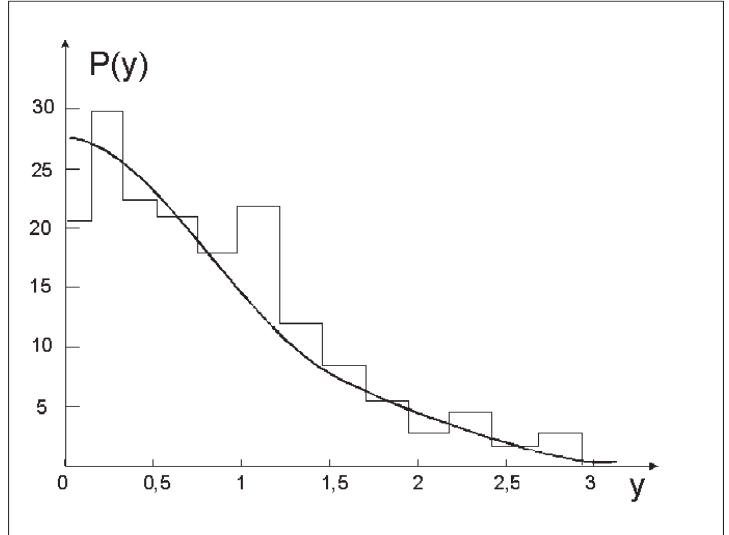


Рис.3. Распределение нейтронных ширин для $y = \left(\frac{\Gamma_{\lambda n}}{\langle \Gamma_{\lambda n} \rangle} \right)^{1/2}$, наблюдавшихся в реакции $n = Th^{232}$. Сплошная кривая соответствует распределению Портера-Томаса $P(y)$, нормированному на число анализируемых нейтронных резонансов.

ний λ , для усредненной величины $(c_k^\lambda)^2$ возникает Брейт-Вигнеровская формула :

$$\frac{(c_k^\lambda)^2}{D_0^\lambda} = \frac{\Gamma_k}{2\pi[(\tilde{E}_k - E_\lambda)^2 + \Gamma_k^2/4]}, \tag{17}$$

которая имеет форму пика с максимумом при $E_\lambda = \tilde{E}_k$ и шириной на полувысоте, равной ширине фрагментации Γ_k состояния k по состояниям λ , причем $\tilde{E}_k = E_{k\hat{\lambda}} + V_{kk}$, V_{kk} - матричный элемент потенциала $V = \hat{H} - \hat{H}_0$ (6), а D_0^λ - среднее энергетическое расстояние между уровнями λ с фиксированным значением m . Теперь можно ввести [4] величину $\chi = \frac{\Gamma_k}{D_0^k}$, где D_0^k - разность значений \tilde{E}_k для соседних уровней k , отличающихся по n на 1, которую можно рассматривать как квантовый аналог классического

параметра стабильности χ , рассмотренного выше. При значениях $\chi \geq 1$ квантовый ансамбль состояний λ обладает заметной нерегулярностью, поскольку в них уже смешиваются состояния k с разными значениями не только l , но и n . Результаты расчета [4] параметра стабильности χ для квантовой диамагнитной задачи Кеплера в зависимости от безразмерной энергии ε представлены на рисунке 4. Видно, что критическое значение параметра стабильности $\chi = 1$ достигается при значении энергии $\varepsilon = -0,45$, которое находится в согласии с классическим критическим значением энергии $\varepsilon = -0,48$ [5], начиная с которой, как видно из рис.1, происходит заметное отклонение от регулярности движений в классической диамагнитной задаче Кеплера.

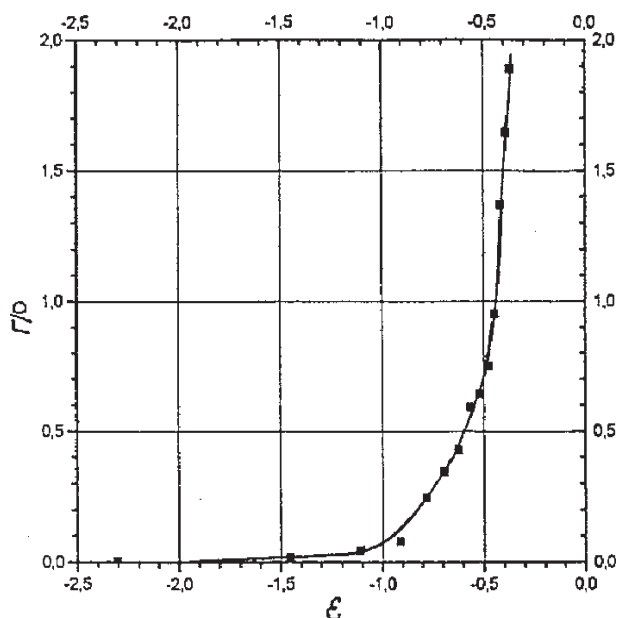


Рис. 4. Зависимость квантового параметра стабильности $\chi = \frac{\Gamma^k}{D}$ в зависимости от энергии ε для диамагнитной задачи Кеплера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный выше обзор продемонстрировал возможность последовательного описания свойств хаоса не только в классических, но и в

квантовых системах. Этот хаос называется детерминированным, или динамическим. Однако, следует обратить внимание на то обстоятельство, что природа этого хаоса не совсем динамическая. Действительно, в классических нелинейных системах для проявления хаоса требуется введение начального фазового объема V_0 , все точки которого считаются равновероятными. Аналогично в квантовых системах требуется перейти от рассмотрения одного квантового состояния к исследованию ансамбля, содержащего достаточно много квантовых состояний, что эквивалентно рассмотрению квантовой системы в определенном интервале ее энергий возбуждения, в котором все состояния снова рассматриваются как равновероятные. Другими словами, хаос возникает лишь при введении элемента вероятности в способ наблюдения детерминированных квантовых и классических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анищенко В.С. Детерминированный хаос. // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 6. С.70-76.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика. М.: Физматгиз.1973; Квантовая механика. М.: Физматгиз.1974.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Физматгиз.1974.
4. Бунаков В.Е. // Материалы XXX Зимней школы СПб. ИЯФ, 1996. С.135.; Bunakov V.E. et al. // Phys. Lett. 1998. V. A243. P.288; Бунаков В.Е. и др. //Препринт С.-Птб. ИЯФ, ТН-41-1998.
5. Hasegawa H., Robnik M, Wunner G. // Prog. Theor.Phys.Suppl.1989. V.98.P.198.
6. Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. М.: Мир.1971.
7. Кадменский С.Г., Фурман В.И. Альфа-распад и родственные ядерные реакции. М.: Энергоатомиздат.1985; Кадменский С.Г. // Физика элемент. частиц и атомного ядра. 1997. Т.28. В.2. С.391.
8. Кадменский С.Г. // Физика элемент. частиц и атом. ядра. 1997. Т. 28. вып. 2. С. 391-448; ЯФ. 1999. Т. 62. № 2. С. 1-11.