ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 1999, в. 1

УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО НА ПРОДАКТ-МНОГООБРАЗИЯХ

Ю.Е. Гликлих, Л.А. Морозова

Воронежский государственный университет

Доказана теорема существования решения для стохастического дифференциального уравнения Ито с локально-липшицевыми (не обязательно гладкими) коэффициентами на бесконечном произведении некомпактных римановых многообразий (продакт-многообразий).

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве существования решения для стохастического дифференциального уравнения Ито на бесконечном произведении некомпактных римановых многообразий (продакт-многообразии) при некоторых естественных предположениях о геометрии многообразий и свойствах уравнений.

Этот результат важен для некоторых задач статистической механики, таких, как построение стохастической динамики, ассоциированной с мерами Гиббса, и вероятностного представления для соответствующей полугруппы Феллера. Мы отсылаем читателя к работам [I], [2] и [3], где указаны соответствующие физические модели и показано существование решений для уравнений Стратоновича на произведениях компактных групп Ли или компактных римановых многообразий. Для уравнений Ито (которые более просто связаны с полугруппами) на бесконечных произведениях компактных римановых многообразий существование решений показано в [5]. Здесь мы рассматриваем некомпактные римановы многообразия и уравнения Ито, которые локально липшицевы (не обязательно гладки, т.е переход к уравнениям в форме Стратоновича невозможен). Рассмотрение этого (существенно более общего) случая потребовало значительного изменения техники доказательства.

Пусть *M* - некомпактное риманово многообразие размерности *n* с метрическим тензором *g*. Рассмотрим бесконечное произведение $M \times Z$. Зададим следующие объекты: (*i*) отображение $a: M \times M \times M \to TM$, удовлетворяющее условию: $a(m, m_1, m_2) \in T_m M$; (*ii*) поле линейных операторов $A(t,m): R^n \to T_m M, t \in [0,l]$; (*iii*) последовательность независимых винеровских процессов $w_k(t)$ в $R^n, t \in [0,l], k \in Z$.

Рассмотрим на $M \times Z$ бесконечную систему стохастических дифференциальных уравнений Ито в форме Белопольской-Далецкого [6] такую, что для компоненты M_k имеет место уравнение вида:

$$d\xi_k(t) = \exp_{\xi_k(t)}\big(a(t, \xi_k(t), \xi_{k-1}(t), \xi_{k+1}(t))dt +$$
$$+ A(t, \xi_k(t))dw_k(t), \qquad (1)$$

где *exp* - экспоненциальное отображение связности Леви-Чивита метрики $g, \xi_i \in M_i, i = k-1, k, k+1$. Коэффициенты *a* и *A* от *k* не зависят, то есть уравнение инвариантно относительно сдвигов по номеру.

1. Определение. *[4] Атлас на многообразии M назовем равномерным римановым, если для любой точки* $m \in M$ *существует карта* U_α, $m \in U_\alpha$, *из этого атласа, такая, что* U_α *содержит метрический шар* $\Omega_m(r)$ *с центром в точке m фиксированного радиуса r > 0 относительно риманова расстояния на M.*

Напомним (см., например, [4]), что на любом конечномерном многообразии существует риманова метрика, обладающая римановым равномерным атласом. Нетрудно видеть, что подобные метрики являются полными, и поэтому по Теореме Хопфа-Ринова шары $\Omega_m(r)$ относительно компактны. Для простоты дальнейшего изложения мы будем считать, что все карты из указанного атласа также относительно компактны - мы всегда можем «уменьшить» карту, взяв из нее относительно компактную окрестность шара $\Omega_m(r)$.

Зафиксируем на каждой компоненте M_k произведения $M \times Z$ одну и ту же карту $\widetilde{U}$ из указанного атласа.

2. Теорема. *Пусть (i)* $a(t,m,m_1,m_2)$ *и* $A(t,m)$ *- локально липшицевы и ограничены по норме; (ii) существует равномерный риманов атлас на М такой, что в картах этого атласа выполняется оценка* $\|tr\Gamma_x(A,A)\| \le C$ *для некоторой положительной константы С, не зависящей от выбора карты (все нормы порождены римановой метрикой).*

Тогда уравнение (1) с начальными условиями

$$\xi_k(0) = m_k, m_k \in \widetilde{U} \subset M_k, \qquad (2)$$

имеет единственное сильное решение, определенное при $t \in [0,l]$.

Доказательство. Везде далее мы будем рассматривать карты из равномерного атласа, указанного в формулировке теоремы. Перейдем от уравнения (1) к эквивалентному уравнению в локальных координатах:

$$d\xi_k(t) = a(t,\xi_k(t),\xi_{k-1}(t),\xi_{k+1}(t))dt -$$
$$-\frac{1}{2}tr\Gamma_{\xi_k(t)}(A(t,\xi_k(t),A(t,\xi_k(t)))dt +$$
$$+ A(t,\xi_k(t))dw_k(t), \qquad (3)$$

где $\Gamma(\cdot,\cdot)$ - локальный коэффициент связности.

Вложим изометрично многообразие M в R^N достаточно высокой размерности. Отметим, в частности, что как следствие мы получим вложение $M \times Z$ в $R^N \times Z$.

Зафиксируем на всех M_k одну и ту же карту U из заданного атласа. Рассмотрим трубчатую окрестность V над картой U. Как известно, эту окрестность локально можно представить в виде прямого произведения $U \times K$, где K - открытый шар в пространстве R^{N-n}.

Определим на V новую риманову метрику g_1 такую, что $T_{(u,w)}K$ ортогонально $T_{(u,w)}U$, скалярное произведение на $T_{(u,w)}U$ задается римановым скалярным произведением в $T_{\rho(u,w)}M$, где ρ - ретракция V на M, а на $T_{(u,w)}K$ скалярное произведение индуцируется скалярным произведением в R^N. Подчеркнем, что по построению сужение g_1 на U совпадает с римановой метрикой g.

Выберем окрестность O шара $\Omega_m(r) \subset U$ в V, такую, что замыкание $\overline{O} \subset V$. Пусть $\varphi: R^N \to R$ - гладкая функция, такая, что $0 \le \varphi \le 1, \varphi(x) = 1$ при $x \in \overline{O} \subset V$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin V$ (функция Урысона). Обозначим через h евклидову метрику на R^N. Зададим на R^N новый риманов метрический тензор $\widetilde{g}$ следующим образом:

$$\widetilde{g} = \varphi g_1 + (1\text{-}\varphi)h.$$

Эту конструкцию можно провести над каждой картой.

3. Лемма. *Подмногообразие U с метрикой g является вполне геодезическим в* R^N *с метрикой* $\widetilde{g}$.

Лемма 3 вытекает из леммы 5 работы [5].

Разложение V в виде прямого произведения дает разложение касательного пространства $T_{(m,k)}R^N = T_m U \times T_k R^{N-n}$. Определим коэффициенты $\hat{a}$ и $\hat{A}$ как вектор в R^N и линейный оператор $\hat{A}: R^n \to TR^N$, которые на V задаются формулами:

$$\hat{a} = (\varphi(m,k)a, 0),$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \varphi(m,k)A \\ 0 \end{pmatrix}$$

и продолжаются на все R^N нулем.

Рассмотрим в $R^N \times Z$ бесконечную систему уравнений, каждая компонента которой в глобальной системе координат (карте) на R^N задается формулой:

$$d\xi_k(t) = \hat{a}(t,\xi_k(t),\xi_{k-1}(t),\xi_{k+1}(t))dt -$$
$$-\frac{1}{2}tr\,{}^2\Gamma_{\xi_k(t)}(\hat{A}(t,\xi_k(t),\hat{A}(t,\xi_k(t)))dt + \hat{A}(t,\xi_k(t))dw_k(t), \qquad (4)$$

где ${}^2\Gamma_{\xi_k}$ - символы Кристоффеля связности Леви-Чивита метрики $\widetilde{g}$ на R^N в указанной глобальной карте.

Рассмотрим гильбертово пространство $l_{2,p}(Z \to R^N)$, норма в котором задается следующим соотношением:

$$\|x\|_{2,p} = \left(\sum_{i \in Z} |x_i|^2 p_{|i|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $|x_i|$ - евклидова норма x в R^N; $p = \{p_s\}_{s=0}^{\infty}$ - положительная убывающая последовательность из l_1, такая, что

$$p_0 = 0, \sum_{s=0}^{\infty} p_s = \frac{1}{2} \quad (5)$$

Заметим, что U и V относительно компактны, откуда следует ограниченность коэффициентов уравнения и символов Кристоффеля, а также вложение: $U \times Z \subset l_{2,p}(Z \to R^N)$. С другой стороны $l_{2,p}(Z \to R^N) \subset R^N \times Z$.

Система (4) превращается в $l_{2,p}(Z \to R^N)$ в уравнение:

$$d\xi(t) = b(t,\xi(t))dt - \frac{1}{2} tr {}^*\Gamma_\xi (B(t,\xi(t), B(t,\xi(t)))dt +$$

$$+ B(t,\xi(t))dw(t), \quad (6)$$

где $x \in l_{2,p}(Z \to R^N), x = (..., x_1, x_2, ..., x_n, ...); b(t,x)$ - последовательность $b_k = \hat{b}(t, x_k, x_{k-1}, x_{k+1})$, то есть векторное поле на $l_{2,p}(Z \to R^N); B(t,x)$ - блочно-диагональная матрица с ненулевыми блоками $B_{kk} = \hat{A}(t,x_k)$, то есть $B(t,x): l_{2,p}(Z \to R^n) \to l_{2,p}(Z \to R^N)$ - линейный оператор; ${}^*\Gamma_x(B(t,x)B(t,x))$ - билинейный оператор, определяемый блочно-диагональной матрицей с ненулевыми элементами ${}^*\Gamma_{kk} = {}^2\Gamma_{x_k}(\hat{A}(t,x_k), \hat{A}(t,x_k)); w(t) = (..., w_k(t), ...)$ - последовательность независимых винеровских процессов *в* R^n. Легко видеть, что $w(t)$ можно рассматривать как винеровский процесс в $l_{2,p}(Z \to R^n)$.

Зададим в карте U последовательность точек $\overline{m}_0 = ... \overline{m}_k ...$

4. Теорема. *Задача Коши для уравнения (6) с начальным условием*

$$\xi(0) = \overline{m}_0 \quad (7)$$

имеет единственное решение.

Теорема 4 вытекает из общей теоремы существования решения для уравнений Ито в форме Белопольской-Далецкого, полученной в [6].

Отметим, что последовательность $...m_k...$ из (2) удовлетворяет условию Теоремы 4.

Итак, пусть $\xi(t)$ - решение задачи (6)-(7), $\xi(t) = (..., \xi_i(t), ...)$, где компоненты ξ_i удовлетворяют уравнению:

$$d\xi_i(t) = \hat{a}(t,\xi_i(t))dt - \frac{1}{2} tr {}^2\Gamma_{\xi_i(t)}(\hat{A}(t,\xi_i(t), \hat{A}(t,\xi_i(t)))dt +$$

$$+ \hat{A}(t,\xi_i(t))dw_i(t). \quad (8)$$

Отметим, что ξ_{i-1} и ξ_{i+1} известны и мы принимаем их за параметры.

В трубчатой окрестности V над рассматриваемой картой U уравнение (8) распадается в систему:

$$d\xi_i(t) = a(t,\xi_i(t))dt - \frac{1}{2} tr\Gamma_{\xi_i(t)}(A(t,\xi_i(t), A(t,\xi_i(t)))dt +$$

$$+ A(t,\xi_i(t))dw_i(t) \quad при \quad i = 1, ..., n,$$

$$d\xi_i(t) = 0 \quad при \quad i = n+1, ..., N,$$

то есть ξ_i - является локальным решением уравнения (3), а так как (3) эквивалентно (1), то ξ_i является локальным решением (1). Очевидно, что $\xi_i(t) \in U \subset M_i$.

Перебирая все карты из заданного атласа на M_k, получим множество локальных решений $\{\xi_i(t)\}$. Склеим из них нелокальное решение $\Xi_k(t)$ на M_k (см. [6]).

Последовательность $\Xi(t) = (..., \Xi_k(t), ...) \in M \times Z$ и является решением задачи (1) - (2). Доказательство Теоремы 2 завершено.

Исследование частично поддержано грантом РФФИ 99-01-00819 и грантом INTAS 94-378

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Albeverio S., Daletskii A. and Kondratiev Yu. A stochastic differential equation approach to some lattice models on compact Lie qroups // Random Operators and Stochastic Equations. 1996. V. 4, N 3.- P. 227-237.

2. Albeverio S., Daletskii A. and Kondratiev Yu. Infinite systems of stochastic differential equations and some lattice models on compact Riemannian manifolds. // Украинский математический журнал. 1997. Т. 49, N 3.- С. 326-338.

3. Albeverio S., Daletskii A. and Kondratiev Yu. Stochastic evolution on product manifolds // Generalized Functions, Operator Theory and Dynamical Systems (ed. Antoniou I. and Lumer G.). Pitman Research Notes, Math. Series. 1998. V. 399.- P. 1-35.

4. Гликлих Ю.Е. Анализ на римановых многообразиях и задачи математической физики. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989.- 189 с.

5. Гликлих Ю.Е., Морозова Л.А. О стохастических дифференциальных уравнениях Ито на бесконечных произведениях римановых многообразий // Известия РАЕН, Серия МММИУ. 1998. Т. 2, N 1.- С. 71-79.

6. Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия. Киев: Выща школа, 1989.- 295 с.