ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

УДК 517.91.5:515.127.1

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Б.Д. Гельман

Воронежский государственный университет

Доказанные в статье теоремы о топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений применяются для изучения глобальной и локальной размерности множества решений задачи Коши для дифференциальных включений.

Первой работой, посвященной вычислению топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений, была статья [13]. Некоторые другие результаты в этом направлении были доказаны в [5, 10, 14, 15].

В работе [10] была впервые получена оценка на глобальную размерность множества решений задачи Коши для дифференциальных включений. Однако, в этой работе были наложены слишком сильные ограничения на дифференциальное включение.

В настоящей работе доказываются некоторые общие теоремы о топологической размерности множества неподвижных точек многозначных отображений и даются приложения этих теорем к вычислению локальной и глобальной размерности множества решений задачи Коши для дифференциальных включений Каратеодоревского типа. Полученные теоремы являются новыми и уточняют результаты работы [10].

1. НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ ТЕОРИИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть Y - подмножество банахова пространства E, обозначим:

$K(Y)$ - множество всех непустых компактных подмножеств в Y;

$K_v(Y)$ - множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y.

Многозначное отображение (м-отображение) метрического пространства X в метрическое пространство Z - это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Z$, называемое образом точки x.

В дальнейшем, если образы м-отображения F являются компактами, то будем записывать это следующим образом, $F : X \to K(Z)$. Аналогично, обозначение $F : X \to K_v(Z)$ означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми компактными множествами.

Всюду в дальнейшем м-отображения обозначаются прописными, а однозначные - строчными буквами.

1.1. Определение. М-отображение $F : X \to K(Z)$ называется полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Z, V \supset F(x_\circ)$ существует открытая окрестность U точки $x_\circ$ такая, что $F(U) \subset V$.

Если F - полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным сверху.

1.2. Определение. М-отображение $F : X \to K(Z)$ называется полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Z$ такого, что $F(x) \cap V \neq \phi$ найдется открытая окрестность U точки $x_\circ$, такая, что $F(x_\circ) \cap V \neq \phi$ для любого $x \in U$. Если F - полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется полунепрерывным снизу.

1.3. Определение. М-отображение $F : X \to K(Z)$ называется непрерывным, если оно одновременно полунепрерывно сверху и снизу.

1.4. Определение. Непрерывное отображение $f : X \to Z$ называется непрерывным сечением м-отображения F, если для любой точки $x \in X$ выполнено включение $f(x) \in F(x)$.

1.5. Определение. М-отображение $F : X \to K(Z)$ называется вполне непрерывным, если:

1) F - полунепрерывно сверху;

2) множество $\overline{F(B)}$ является компактным в Z для любого ограниченного множества $B \subset X$.

1.6. Определение. М-отображение $F: X \to K(Z)$ называется усиленно вполне непрерывным, если:

1) F - непрерывное м-отображение;

2) множество $\overline{F(B)}$ является компактным в Z для любого ограниченного множества $B \subset X$.

Пусть E-банахово пространство, $X \subset E$, $F: X \to K(E)$ - некоторое м-отображение.

Точку $x_\circ$ будем называть неподвижной точкой м-отображения F, если $x_\circ \in F(x_\circ)$.

Приведем некоторые результаты о вращении вполне непрерывных многозначных векторных полей с выпуклыми компактными образами в банаховом пространстве.

Пусть U - ограниченное открытое множество в E, $F: \overline{U} \to K_V(E)$ - вполне непрерывное м-отображение. Вполне непрерывным многозначным векторным полем (мв-полем), порожденным F, назовем м-отображение $\Phi = i - F: \overline{U} \to K_V(E)$, определенное условием: $\Phi(x) = x - F(x)$.

Будем говорить, что мв-поле Φ невырождено на ∂U, если $0 \notin \Phi(x)$ для любого $x \in \partial U$.

Множество всех вполне непрерывных невырожденных на ∂U мв-полей обозначим $\Re(\overline{U}, \partial U)$.

1.7. Определение. Мв-поля $\Phi_0, \Phi_1 \in \Re(\overline{U}, \partial U)$ называются гомотопными $(\Phi_0 \sim \Phi_1)$, если существует вполне непрерывное отображение $\Psi: \overline{U} \times [0,1] \to Kv(E)$ такое, что:

а) $\Phi_0(x) = x - \Psi(x,0)$, $\Phi_1(x) = x - \Psi(x,1)$ для любого $x \in \overline{U}$;

б) $x \notin \Psi(x, \lambda)$ для любых $x \in \partial U, \lambda \in [0,1]$.

Пусть Z - группа целых чисел. Существует отображение $\gamma: \Re(\overline{U}, \partial U) \to Z$, удовлетворяющее условиям:

1) если $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$, то существует точка $x_\circ \in U$ такая, что $\Phi(x_\circ) \ni 0$;

2) если $\Phi(x) \ni x - x_0$ для любого $x \in \partial U$, то

$$\gamma(\Phi, \overline{U}) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x_\circ \in U, \\ 0, & \textit{если} \quad x_\circ \notin \overline{U}; \end{cases}$$

3) если $\Phi_0 \sim \Phi_1$, то $\gamma(\Phi_0, \overline{U}) = \gamma(\Phi_1, \overline{U})$;

4) если $\Phi_0(x) \subset \Phi_1(x)$ для любого $x \in \overline{U}$, то $\gamma(\Phi_0, \overline{U}) = \gamma(\Phi_1, \overline{U})$;

5) пусть $\{U_j\}_{j \in J}$ - семейство открытых непересекающихся подмножеств в U таких, что $\overline{U} = \bigcup_{j \in J} \overline{U_j}$; если $\Phi \in \Re(\overline{U_j}, \partial U_j)$ для любого $j \in J$, то $\gamma(\Phi, \overline{U_j}) \neq 0$ лишь для конечного числа $j \in J$ и $\gamma(\Phi, \overline{U}) = \sum_{j \in J} \gamma(\Phi, \overline{U_j})$.

Число $\gamma(\Phi, \overline{U})$ называется вращением вполне непрерывного мв-поля Φ на границе области U.

Доказательство существования такого отображения γ и изучение его свойств содержится, например, в работах [3],[4].

Доказательство этих и других свойств многозначных отображений можно найти в монографиях [4,8,9].

2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть E - банахово пространство, U -ограниченное открытое множество в E, $F: \overline{U} \to K\upsilon(E)$ - вполне непрерывное м-отображение, $\Phi = i - F \in \Re(\overline{U}, \partial U)$. Обозначим $N(\Phi, \overline{U})$ множество неподвижных точек F, т.е.

$$N(\Phi, \overline{U}) = \{x \in \overline{U} | x \in F(x)\} = \{x \in \overline{U} | 0 \in \Phi(x)\}.$$

Очевидно, что множество $N(\Phi, \overline{U})$ является компактом в E. Изучим размерность dim этого множества. Основные свойства размерности dim содержатся,например, в [1,6].

Имеет место следующее утверждение, играющее важную роль в дальнейших конструкциях.

2.1. Лемма. Пусть X - метрическое компактное пространство, $\dim(X) \leq n-1$. Если E - банахово пространство и $T: X \to K\upsilon(E)$ - полунепрерывное снизу м-отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $T(x) \ni 0$ для любого $x \in X$;

2) $\dim(T(x)) \geq n$ для любого $x \in X$;

то существует однозначное непрерывное отображение $f: X \to E$ такое,что $f(x) \neq 0, f(x) \in F(x)$ для любого $x \in X$.

Доказательство этой леммы содержится в [13].

Основываясь на этой лемме, докажем следующее утверждение.

2.2. Теорема. Пусть $F: \overline{U} \to K\upsilon(E)$ - вполне непрерывное м-отображение, $\Phi = i - F \in \Re(\overline{U}, \partial U)$.

Пусть выполнены следующие условия:

а) $\gamma(\Phi, \overline{U}) \neq 0$;

б) существует открытая окрестность V, $N(\Phi, \overline{U}) \subset V \subset U$, и полунепрерывное снизу м-отображение $G:V\to K\upsilon(E)$, $\dim(G(x))\ge n$, $G(x)\subset F(x)$, для любого $x\in V$.

Если $x\in G(x)$ для любого $x\in N(\Phi,\overline{U})$, то $\dim(N(\Phi,\overline{U}))\ge n$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $\dim(N(\Phi,\overline{U}))\le n-1$. Рассмотрим м-отображение $G_1=i-G:V\to K\upsilon(E)$. Сужение этого отображения $\hat{G}_1=G_1\big|_{N(\Phi,\overline{U})}$ удовлетворяет условиям леммы 2.1, следовательно, существует сечение $\hat{\varphi}=i-\hat{f}:N(\Phi,\overline{U})\to E$, $0\ne\hat{\varphi}(x)\in\hat{G}_1(x)$ для любого $x\in N(\Phi,\overline{U})$. В силу теоремы Майкла о непрерывном сечении (см.,например,[11]), существует непрерывное сечение $\varphi:V\to E,\varphi(x)\in G_1(x)$, для любого $x\in V$, $\varphi\big|_{N(\Phi,\overline{U})}=\hat{\varphi}$. Очевидно, что $\varphi(x)\ne 0$, для любого $x\in V$, т.к. $0\notin G_1(x)$, если $x\notin N(\Phi,\overline{U})$.

Для любого $x\in V$ имеем следующие включения:

$$\varphi(x)\in G_1(x)\subset\Phi(x).$$

Рассмотрим новое мв-поле $\Phi_1:\overline{U}\to K\upsilon(E)$, определенное условием:

$$\Phi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \textit{если} \quad x\in V,\\ \Phi(x), & \textit{если} \quad x\notin V.\end{cases}$$

Очевидно, что $0\notin\Phi_1(x)\subset\Phi(x)$ для любого $x\in\overline{U}$ и Φ_1 является вполне непрерывным мв-полем. Тогда, $\gamma(\Phi_1,\overline{U})=\gamma(\Phi(x),\overline{U})\ne 0$, следовательно, должна существовать точка x_0 такая, что $\Phi_1(x_0)\ni 0$. Однако, это противоречит построению м-отображения Φ_1. Полученное противоречие и доказывает теорему.

2.3. Следствие. Пусть $F:\overline{U}\to K\upsilon(E)$ - усиленно вполне непрерывное м-отображение. Если $\Phi=i-F\in\Re(\overline{U},\partial U)$, $\gamma(\Phi,\overline{U})\ne 0$ и $\dim(F(x))\ge n$ для любого $x\in U$, то $\dim(N(\Phi,\overline{U}))\ge n$.

Доказательство вытекает из теоремы 2.2.

3. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть G - открытая область в $R^1\times R^n$ такая, что $[t_0,t_0+h]\times B[x_0,r]\subset G$. Пусть $F:G\to K\upsilon(R^n)$ - м-отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $F(t,\cdot):B[x_0,r]\to K\upsilon(R^n)$ является непрерывным м-отображением для почти всех $t\in[t_0,t_0+h]$;

2) $F(\cdot,x):[t_0,t_0+h]\to K\upsilon(R^n)$ является измеримым для всех $x\in B[x_0,r]$;

3) существуют интегрируемые по Лебегу неотрицательные функции $a,b:[t_0,t_0+h]\to R^1$ такие, что для любого $x\in B[x_0,r]$ выполнено неравенство:

$$\max_{y\in F(t,x)}\|\ y\ \|\le a(t)+b(t)\|\ x\ \|$$

для почти всех $t\in[t_0,t_0+h]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x}\in F(t,x)$$
$$x(t_0)=x_0.$$

Решением этой задачи на промежутке $[t_0,t_0+d]$, $0<d\le h$, назовем абсолютно непрерывную функцию $x:[t_0,t_0+d]\to R^n$ такую, что $\dot{x}(t)\in F(t,x(t))$ почти всюду и $x(t_0)=x_0$.

Обозначим $\sum([t_0,t_0+d],x_0)$ множество решений этой задачи на промежутке $[t_0,t_0+d]$. Известно (см.,например,[4]), что $\sum([t_0,t_0+d],x_0)$ является непустым множеством для достаточно малых *d*.

Пусть $U\subset C_{[t_0,t_0+d]}$ - открытый шар, определенный условием:

$$U=\left\{\ x=x(\cdot)\in C_{[t_0,t_0+d]}\big|\ \ \|x_0-x\|<r\right\}.$$

Рассмотрим следующие м-отображения (интегральные операторы)

$$\Im_F(x)=\left\{y=y(\cdot)\in L^1_{[t_0,t_0+d]}\big|\quad y(t)\in F(t,x(t))\ \textit{при почти всех}\ t\in[t_0,t_0+d]\right\}$$

$$\Phi(x)(t)=\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}y(\tau)d\tau\big|\ \ y(\cdot)\in\Im_F(x)\right\}.$$

3.1. Предложение. М-отображение Φ на $\overline{U}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\Phi(x)\ne\varnothing$ для любого *x*;

б) $\Phi(x)\subset K\upsilon(C_{[t_0,t_0+d]})$;

в) функция $x=x(\cdot)\in\overline{U}$ является неподвижной точкой м-отображения Φ, тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши и $\| x_0 - x(\cdot) \| \le r$.

Доказательство этого утверждения хорошо известно и содержится, например, в [4].

Изучим непрерывность м-отображения Φ, для этого нам понадобится следующая лемма.

3.2. Лемма. Пусть м-отображение $F : G \to K\upsilon(R^n)$ удовлетворяет сделанным предположениям, тогда для любого $\delta > 0$, существует такой компакт $\Delta_\delta \subset [a,b]$, что $\mu([a,b] \setminus \Delta_\delta) \le \delta$ и сужение F на $\Delta_\delta \times B[x_0, r]$ является непрерывным м-отображением.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы из [12] (см. также [4]).

3.3. Теорема. Оператор Φ является усиленно вполне непрерывным м-отображением.

Доказательство. Так как F является непрерывным м-отображением по второму переменному, то, в частности, он является по этому переменному полунепрерывным сверху. Хорошо известно, что в этом случае, интегральный оператор Φ является полунепрерывным сверху. Нам остается доказать только полунепрерывность снизу этого оператора.

Пусть V - произвольное открытое множество в пространстве $C_{[a,b]}, \hat{x} = \hat{x}(t) \in \overline{U}$ и $\hat{y} \in V \cap \Phi(\hat{x})$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что открытая окрестность $U_{\varepsilon_0}(\hat{y}) \subset V$. По определению отображения Φ, $\hat{y}(t) = x_0 + \int_a^t u(s)ds$, где $u(s) \in F(s, \hat{x}(s))$ для почти всех $s \in [a,b]$.

Докажем, что существует положительное число η такое, что как только $\|x - \hat{x}\| < \eta$, то $V \cap \Phi(x) = \varnothing$.

Обозначим: $a_0 = \int_a^b a(s)ds, b_0 = \int_a^b b(s)ds$, $N = a_0 + b_0(r + \|x_0\|)$. Выберем теперь компакт Δ, удовлетворяющий лемме 2.5 так, чтобы $\mu([a,b] \setminus \Delta) < \dfrac{\varepsilon_0}{6N}$.

Обозначим $\hat{F}$ сужение м-отображения F на множество $\Delta \times B[x_0, r]$. Так как отображение $\hat{F}$ имеет компактные образы, то из непрерывности этого м-отображения вытекает его непрерывность как отображение в метрическое пространство $(K(R^n), h)$, где h - метрика Хаусдорфа (см., например, [4]). Так как любое непрерывное отображение компакта в метрическое пространство является равномерно непрерывным отображением, то существует такое число $\eta > 0$, что как только $|t_1 - t_2| < \eta$, $\|x_1 - x_2\| < \eta$, $(t_i, x_i) \in \Delta \times B[x_0, r]$, $i = 1,2$, то $h(F(t_1, x_1), F(t_2, x_2)) < \dfrac{\varepsilon_0}{3(b-a)}$.

Рассмотрим отображение $x = x(t) \in \overline{U}$ такое, что $\|x - \hat{x}\| < \eta$. Тогда множество

$$M(t) = \hat{F}(t, x(t)) \cap U_{\frac{\varepsilon_0}{3(b-a)}}(u(t)) \ne \varnothing$$

для почти всех $t \in \Delta$. Легко видеть, что м-отображение $M : \Delta \to R^n$ является измеримым отображением. Тогда M имеет измеримый селектор $\upsilon_0 = \upsilon_0(t)$, т.е. υ_0 является измеримым отображением и $\upsilon_0(t) \in M(t)$ для почти всех $t \in \Delta$.

Пусть $\upsilon_1 = \upsilon_1(t)$ - произвольное измеримое сечение м-отображения $P : ([a,b] \setminus \Delta) \to R^n$, $P(t) = F(t, x(t))$.

Рассмотрим измеримое отображение

$$\upsilon(t) = \begin{cases} \upsilon_0(t), & \text{когда} \quad t \in \Delta, \\ \upsilon_1(t), & \text{когда} \quad t \in [a,b] \setminus \Delta. \end{cases}$$

Очевидно, что $\upsilon(t) \in F(t, x(t))$ при почти всех $t \in [a,b]$. Пусть $y(t) = x_0 + \int_a^t v(s)ds$. Очевидно, что $y \in \Phi(x)$. Покажем теперь, что $y \in U_{\varepsilon_0}(\hat{y})$. Действительно:

$$\|y - \hat{y}\| \le \int_a^b \| u(s) - \upsilon(s) \| ds \le \int_\Delta \| u(s) - \upsilon(s) \| ds +$$

$$+ \int_{[a,b] \setminus \Delta} \| u(s) - \upsilon(s) \| ds \le \mu(\Delta) \frac{\varepsilon_0}{3(b-a)} + \mu([a,b] \setminus \Delta) 2N < \varepsilon_0.$$

Следовательно, $y \in (\Phi(x) \cap V)$, что и доказывает теорему.

3.4. Лемма. Пусть $F : [a,b] \to K\upsilon(R^n)$ - измеримое м-отображение, пусть существует измеримое множество $A \subset [a,b]$ такое, что для любого $t \in A, \dim(F(t)) \ge 1$. Если $\mu(A) > 0$, то для любого целого положительного числа m существуют измеримые сечения $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^m$ м-отображения F линейно независимые на $[a,b]$.

Доказательство. В силу свойства Скорца-Драгони измеримого м-отображения (см.,например,[4]) для любого $\delta > 0$ существует компактное подмножество $D \subset [a,b]$ такое, что $\mu([a,b] \setminus D) < \delta$ и $F|_D$ является полунепрерывным снизу м-отображением.

Рассмотрим м-отображение $\hat{F}:[a,b]\to Cv(R^n)$,

$$\hat{F}(t)=\begin{cases}F(t)\ , & для \quad t\in D,\\ R^n, & для \quad t\notin D.\end{cases}$$

Так как множество $[a,b]\ \setminus D$ открыто, то $\hat{F}$ является полунепрерывным снизу м-отображением.

Известно (см.,например,[7]), что почти все точки произвольного измеримого множества A являются точками плотности, т.е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu(A\cap[x_0-h,x_0+h]\ )}{2h}=1$$

для почти всех $x_0\in A$.

Пусть δ удовлетворяет неравенству, $0<\delta<\mu(A)$. Тогда $\mu(A\cap D)>0$. Пусть $\{t_i\}_{i=1}^m\in(A\cap D)$ и являются точками плотности этого множества. Тогда существует $\varepsilon_0>0$ такое, что $\mu[(t_i-\varepsilon_0,t_i+\varepsilon_0)\cap A\cap D]>0$ для i=1,2,...,m, и $[t_i-\varepsilon_0,t_i+\varepsilon_0]\cap[t_j-\varepsilon_0,t_j+\varepsilon_0]=\varnothing$ для $i\neq j$. Пусть g_0 - непрерывное сечение м-отбражения $\hat{F}$, которое существует в силу теоремы Майкла. Это отображение в точках $\{t_i\}_{i=1}^m$ принимает следующие значения $g_0(t_1),g_0(t_2),...,g_0(t_m)$. Для любого k=1,2,...,m обозначим g_k непрерывное сечение $\hat{F}$ такое,что $g_k(t_k)\neq g_0(t_k)$, $g_k(t_k)\neq 0$ и $g_k\big|_{[a,b]\setminus(t_k-\varepsilon_0,t_k+\varepsilon_0)}=g_0\big|_{[a,b]\ \setminus\ (t_k-\varepsilon_0,t_k+\varepsilon_0)}$. Такие сечения всегда существуют, т.к. $\dim(\hat{F}(t_k))=\dim(F(t_k))\geq 1$. Очевидно, что в пространстве непрерывных функций эти отображения $\{g_i\}_{i=1}^m$ линейно независимы.

Так как $\mu[(t_i-\varepsilon_0,t_i+\varepsilon_0)\cup A\cup D]>0$, $i=1,2,...,m$, то $\{g_i|_D\}_{i=1}^m$ также являются линейно независимыми, причем они являются сечениями м-отображения $F|_D$.

Рассмотрим произвольное измеримое сечение $z:[a,b]\to R^n$ м-отображения $F\big|_{[a,b]\ \setminus\ D}$. Тогда определены сечения

$$x_i(t)=\begin{cases}g_i(t)\ , & когда \quad t\in D,\\ z(t)\ , & когда \quad t\in[a,b]\ \setminus D.\end{cases}$$

Очевидно, что отображения $\{\ x_i(\cdot)\ \}_{i=1}^m$ образуют линейно независимое семейство измеримых сечений м-отображения F.

3.5. Т е о р е м а. Пусть F удовлетворяет условиям 1,2,3. Пусть множество

$$A=\{t\in[t_0,t_0+h]\ \mid\ \dim(F(t,x))\geq 1,\ \ \text{для любого}\ \ x\in B[x_0,r]\}$$

измеримо и

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu(A\cap[t_0,t_0+h]\ )}{h}>0\,.$$

Тогда существует такое число β_0, что для любого β, 0<β≤β_0 множество $\Sigma=\Sigma(\ [t_0,t_0+\beta]\ ,x_0)\neq\varnothing$, размерность dim(Σ) = ∞.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\hat{a}(t)=\int_{t_0}^t a(s)ds$ и $\hat{b}(t)=\int_{t_0}^t b(s)ds$. Это непрерывные, неотрицательные, монотонно возрастающие функции и $\hat{a}(t_0)=\hat{b}(t_0)=0$. Выберем $\beta_1>0$ столь малым, что $\dfrac{\hat{a}(\beta_1)}{1-\hat{b}(\beta_1)}<r$. Пусть $U\subset C_{[t_0,t_0+\beta]}$, $0<\beta\leq\beta_1$ - множество, определенное условием:

$$U=\{\ x=x(\cdot)\ \mid\ \|\ x_0-x(\cdot)\ \|<r\}.$$

Рассмотрим интегральный оператор $\Phi:\overline{U}\to$ $\to K\upsilon(C_{[t_0,t_0+\beta]})$. Если $z(\cdot)\in\Phi(x)$, то $z(t)=x_0+\int_{t_0}^t y(s)ds$, где $y(s)\in F(s,x(s))$ при почти всех $s\in[t_0,t_0+\beta]$. Тогда

$$\|z-x_0\|=\|\ \int_{t_0}^{t}y(s)ds\ \|\leq\int_{t_0}^{\beta_1}a(s)ds+r\int_{t_0}^{\beta_1}b(s)ds<r\,.$$

Следовательно, $\Phi:\overline{U}\to K\upsilon(U)$ и не имеет неподвижных точек на ∂U.

Так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu(A\cap[t_0,t_0+h]\ )}{h}>0\,,$$

то существует такое число β_2 >0, что для любого β, $0<\beta\leq\beta_2$, $\mu(A\cap[t_0,t_0+\beta]\ )>0$.

Пусть $\beta_0=\min\{\ \beta_1,\beta_2\}$, $0<\beta\leq\beta_0$. Тогда $\Phi:\overline{U}\subset C_{[t_0,t_0+\beta]}\to K\upsilon(U)$ является усиленно вполне непрерывным м-отображением.

Покажем, что для любого натурального числа m, топологическая размерность $\dim(\Phi(x)) \ge m$ для любого $x \in \overline{U}$. Для этого, в силу выпуклости множества $\Phi(x)$, достаточно доказать существование $m+1$ линейно независимой точки $z_0(\cdot), \ldots, z_m(\cdot) \in \Phi(x)$.

Так как в силу леммы 3.4 м-отображение $F_x(\cdot) = F(\cdot, x(\cdot)) : [t_0, t_0 + \beta] \to K\upsilon(R^n)$ имеет $m+1$ линейно независимое сечение $\{y_i(\cdot)\}_{i=0}^{m}$, то $z_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} y_i(s)ds$, $i=0,1, \ldots ,m$, лежат в образе $\Phi(x)$ и являются линейно независимыми.

Тогда, в силу следствия 2.3, имеем:

$$\dim\left(N\left(i - \Phi, \overline{U}\right)\right) \ge \dim(\Sigma) \ge m$$

для любого m. Следовательно, $\dim(\Sigma) = \infty$, что и требовалось доказать.

4. ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим локальные свойства размерности множества $N\left(\Phi, \overline{U}\right)$. Пусть U - ограниченная открытая область в E, $\Phi = i - F \in \Re\left(\overline{U}, \partial U\right)$.

4.1. Л е м м а. Пусть X - метрическое пространство, $F : X \to K\upsilon(E)$ - полунепрерывное снизу м-отображение. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любого целого числа $n \le \dim(F(x_0))$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполнено неравенство: $\dim(F(x)) \ge n$.

Доказательство вытекает из теоремы Майкла.

4.2. Т е о р е м а. Пусть $F : \overline{U} \to K\upsilon(E)$ - усиленно вполне непрерывное м-отображение, $x_0 \in U$ - неподвижная точка м-отображения F. Если существует открытая окрестность $W \subset U$ точки x_0 и вполне непрерывное сечение $f : W \to E$ м-отображения F такие, что:

1) точка x_0 является единственной особой точкой вполне непрерывного поля $\varphi = i - f$;

2) $ind(\varphi, x_0) \ne 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ размерность $\dim\left(N_{x_0,\varepsilon}\left(i - F, \overline{U}\right)\right) \ge \dim(F(x_0))$, где $N_{x_0,\varepsilon}\left(i - F, \overline{U}\right) = \left\{ x \in N\left(i - F, \overline{U}\right) \mid \|x - x_0\| \le \varepsilon \right\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как размерность dim является монотонной (см.,например,[1]), то достаточно доказать это неравенство только для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Заметим, что в силу полунепрерывности снизу м-отображения F, для любого числа $n \le \dim(F(x_0))$, существует $\varepsilon_0 > 0$ и окрестность $U_{\varepsilon_0}(x_0) \subset \overline{U_{\varepsilon_0}(x_0)} \subset W$ такие, что для любого $x \in U_{\varepsilon_0}(x)$ размерность $\dim(F(x)) \ge n$.

Рассмотрим ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Пусть $V = U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $\hat{F} : \overline{V} \to K\upsilon(E)$ определено условием:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } \|x - x_0\| < \varepsilon, \\ \dfrac{\|x - x_0\| - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon} f(x) + \dfrac{\varepsilon_0 - \|x - x_0\|}{\varepsilon_0 - \varepsilon} F(x), & \text{если } \varepsilon \le \|x - x_0\| \le \varepsilon_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\hat{F}(x) \subset F(x)$, для любого $x \in \overline{V}$, $\hat{F}$ - вполне непрерывное м-отображение, и выполнено включение:

$$N\left(i - \hat{F}, \overline{V}\right) \subset N\left(i - F, \overline{V}\right) \subset N_{x_0,\varepsilon_0}\left(i - F, \overline{U}\right).$$

Заметим также, что $\dim\left(\hat{F}(x)\right) = \dim(F(x))$ для любого $x \in V$. Так как $\hat{F}(x) = f(x) \ne x$ для любого $x \in \partial V$, то выполнены все условия следствия 2.3. Следовательно,

$$\dim\left(N_{x_0,\varepsilon_0}\left(i - F, \overline{U}\right)\right) \ge \dim\left(N\left(i - \hat{F}, \overline{V}\right)\right) \ge n ,$$

что и доказывает теорему, т.к. число n было взято произвольно.

4.3. С л е д с т в и е. Пусть F - усиленно вполне непрерывное м-отображение, пусть существует такая открытая окрестность W точки $x_0 \in N\left(i - F, \overline{U}\right)$, $W \subset U$, что для любого $x \in W$ точка $x_0 \in F(x)$. Тогда

$$\dim\left(N_{x_0,\varepsilon}\left(i - F, \overline{U}\right)\right) \ge \dim(F(x_0))$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве сечения f возьмем отображение $f : W \to E$, $f(x) = x_0$. Очевидно, что x_0 - единственная неподвижная точка f и $ind\,(i - f, x_0) = 1$. Теперь справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 4.2.

Пусть $\Phi = i - F : \overline{U} \to K\upsilon(E)$ - усиленно вполне непрерывное мв-поле, $x_0 \in N\left(\Phi, \overline{U}\right) \subset U$.

Рассмотрим функцию $\beta(x) = \rho(x_0, F(x))$.

4.4. Т е о р е м а. Если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in \overline{U}$, $\|x - x_0\| < \varepsilon_0$, справедливо неравенство

$$\beta(x) \le k\|x - x_0\|, \quad k \in [0,1),$$

то $\dim N_{x_0,\varepsilon}(\Phi, B) \ge \dim(F(x_0))$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

4.5. Л е м м а. Пусть выполнены условия теоремы 4.4, тогда для любого числа k_1, $k<k_1<1$, существует непрерывное отображение $f: U_{\varepsilon_0}(x_0) \to E$, удовлетворяющее условиям:

а) *f* является непрерывным сечением *F*;

б) $\|x_0 - f(x)\| \le k_1\|x - x_0\|$ для любого $x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть число k_1 удовлетворяет неравенству $k<k_1<1$. Рассмотрим число $\lambda \in \left(0, \dfrac{k_1 - k}{k}\right)$ и функцию $\alpha(x) = (1+\lambda)\beta(x)$.

Тогда определено м-отображение $F_1 : U_{\varepsilon_0}(x_0) \to K\upsilon(E)$,

$$F_1(x) = \{y \in F(x) \mid \|y - x_0\| \le \alpha(x)\}.$$

Очевидно, что $F_1(x) \ne \varnothing$ для любого x и является выпуклым замкнутым множеством. Нетрудно доказать также, что м-отображение F_1 является полунепрерывным снизу. Следовательно, у него существует непрерывное сечение *f*.

Тогда для любого $x \in U_{\varepsilon_0}(x_0)$ справедливо неравенство:

$$\|x_0 - f(x)\| \le \alpha(x) = (1+\lambda)\beta(x) \le k_1\|x - x_0\|.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о (теоремы 4.4). Для доказательства достаточно проверить выполнение условий теоремы 4.2, где *f* удовлетворяет условиям леммы 4.5.

Очевидно, что $\varphi(x) = x - f(x) \ne 0$ для любого $x \ne x_0$, а $\varphi(x_0) = 0$. Причем, $\|\varphi(x)\| \ge (1-k_1)\,\|x - x_0\|$ для любого x. Заметим, что $ind(\varphi, x_0) = 1$, т.к. *f* отображает шар $B[x_0, \varepsilon]$ в себя. Следовательно, все условия теоремы 4.2 выполнены, что и доказывает теорему.

4.6. С л е д с т в и е. Пусть вполне непрерывное мв-поле $\Phi = i - F : \overline{U} \to K\upsilon(E)$ невырождено на ∂U и удовлетворяет условиям:

а) $N(\Phi, \overline{U}) \ne \varnothing$;

б) F является сжимающим, т.е. для любых $x, y \in \overline{U}$ выполнено неравенство:

$$h(F(x), F(y)) \le k\|x - y\|, \quad 0 \le k < 1.$$

Тогда для любой точки $x_0 \in N(\Phi, \overline{U})$ и любого числа ε>0 имеем:

$$\dim\left(N_{x_0,\varepsilon}(\Phi, \overline{U})\right) \ \ge\ \dim(F(x_0)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in N(\Phi, \overline{U})$, т.е. x_0 - неподвижная точка м-отображения *F*. Имеет место следующее неравенство:

$$\rho(x_0, F(x)) \le h(F(x_0), F(x)) \le k\|x - x_0\|$$

для любого $x \in \overline{U}$. Так как поле Φ является непрерывным и вполне непрерывным, то справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 4.4.

5. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Применим доказанные в предыдущем параграфе теоремы для изучения локальной размерности множества решений задачи Коши для одного класса дифференциальных включений.

Пусть *G* - открытая область в $R^1 \times R^n$, такая, что $[t_0, t_0 + h] \times B[x_0, r] \subset G$. Пусть $F : G \to K\upsilon(R^n)$ - м-отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $F(t,\cdot): B[x_0, r] \to K\upsilon(R^n)$ является липшицевым с константой α для почти всех $t \in [t_0, t_0 + h]$;

2) $F(\cdot, x): [t_0, t_0 + h] \to K\upsilon(R^n)$ является измеримым для всех $x \in B[x_0, r]$;

3) существуют интегрируемые по Лебегу функции $a, b: [t_0, t_0 + h] \to R^1$, такие, что для любого $x \in B[x_0, r]$ выполнено неравенство:

$$\max_{y \in F(t,x)} \|y\| \le a(t) + b(t)\|x\|$$

для почти всех $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Обозначим $\sum([t_0, t_0 + d], x_0)$ множество решений этой задачи на промежутке $[t_0, t_0 + d]$. Пусть $U \subset C_{[t_0, t_0 + d]}$ - открытый шар, определенный условием:

$$U = \left\{ x = x(\cdot) \in C_{[t_0, t_0 + d]} \mid \|x_0 - x\| < r \right\}.$$

Как и в разделе 3, рассмотрим следующие интегральные операторы:

$\Im_F(x)=\{\ y=y(\cdot)\in L^1_{[t_0,t_0+d]}\ \mid\ y(t)\in F(t,x(t))$ *при п.в.* $t\in[t_0,t_0+d]\}$

$$\Phi(x)(t)=\left\{x_0+\int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau\ \mid\ y(\cdot)\in \Im_F(x)\right\}.$$

5.1. П р е д л о ж е н и е. М-отображение Φ на $\overline{U}$ является липшицевым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению метрики Хаусдорфа имеем:

$$h(\Phi(x),\Phi(y))=\inf\{\varepsilon|\Phi(x)\subset U_\varepsilon(\Phi(y)),\Phi(y)\subset U_\varepsilon(\Phi(x))\}.$$

Рассмотрим $\varepsilon>\alpha d\|x-y\|$, где α - константа Липшица для *F*, *x* и *y* - произвольные функции из *U*.

Пусть $z=z(\cdot)\in\Phi(x)$, тогда $z(t)=x_0+\int_{t_0}^t\hat{x}(s)ds$, $\hat{x}(s)\in F(s,x(s))$ при почти всех $s\in[t_0,t_0+d]$.

В силу липшицевости м-отображения *F* по второму переменному, имеем включение

$$\hat{x}(s)\in F(s,x(s))\subset U_\beta(F(s,y(s)))$$

для любого β, удовлетворяющего неравенству $\alpha\|x-y\|<\beta$.

Рассмотрим измеримое м-отображение $\Psi_\beta(s)=B[x(s),\beta]\cap F(s,y(s))$. Тогда существует измеримое сечение $\hat{y}_\beta(s)\in\Psi_\beta(s)$ на $[t_0,t_0+d]$.

Имеем:

$$\hat{y}_\beta(s)\in F(s,y(s)),\ \|\ \hat{y}_\beta(s)-\hat{x}(s)\ \|\le\beta$$

для почти всех $s\in[t_0,t_0+d]$. Тогда, если

$$\upsilon_\beta(t)=x_0+\int_{t_0}^t\hat{y}_\beta(s)ds,$$

то

$$\|z-\upsilon_\beta\|=\max_{t\in[t_0,t_0+d]}\left\|\int_{t_0}^t(\hat{x}(s)-\hat{y}(s))ds\right\|\le\beta d.$$

Если выполнено неравенство $\alpha\|x-y\|<\beta<\dfrac{\varepsilon}{d}$, то $\|z-\upsilon_\beta\|<\varepsilon$. Тогда $\Phi(x)\subset U_\varepsilon(\Phi(y))$.

Аналогично докажем включение $\Phi(y)\subset U_\varepsilon(\Phi(x))$. Тогда $h(\Phi(x),\Phi(y))<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>\alpha d\|x-y\|$. Следовательно, $h(\Phi(x),\Phi(y))\le\alpha d\|x-y\|$.

5.2. Т е о р е м а. Пусть *F* удовлетворяет условиям 1,2,3. Пусть множество

$A=\{t\in[t_0,t_0+h]\ \mid\ \dim\ (F(t,x))\ge1,$ *для любого* $x\in B[x_0,r]\}$

измеримо и

$$\lim_{h\to0}\frac{\mu(A\cap[t_0,t_0+h]\ )}{h}>0.$$

Тогда существует такое число β_0, что для любого β, $0<\beta\le\beta_0$, множество $\Sigma=\Sigma(\ [t_0,t_0+\beta]\ ,x_0)\ne\varnothing$, и для любого $\varepsilon>0$, и любого решения $y\in\sum$ размерность $\dim(\sum_{y,\varepsilon})=\infty$, где

$$\sum_{y,\varepsilon}=\{\ z\in\Sigma\ \mid\ \|\ z-y\ \|\le\varepsilon\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\hat{a}(t)=\int_{t_0}^t a(s)ds$ и $\hat{b}(t)=\int_{t_0}^t b(s)ds$. Это непрерывные, неотрицательные, монотонно возрастающие функции и $\hat{a}(t_0)=\hat{b}(t_0)=0$. Выберем $\beta_1>0$ столь малым, что

$$\frac{\hat{a}(\beta_1)}{1-\hat{b}(\beta_1)}<r.$$

Пусть $U\subset C_{[t_0,t_0+\beta]}$, $0<\beta\le\beta_1$ - множество, определенное условием:

$$U=\{x=x(\cdot)\ \mid\ \|x_0-x(\cdot)\ \|<r\}.$$

Рассмотрим интегральный оператор $\Phi:\overline{U}\to K\upsilon(C_{[t_0,t_0+\beta]})$. Если $z(\cdot)\in\Phi(x)$, то

$$z(t)=x_0+\int_{t_0}^t y(s)ds,$$

где $y(s)\in F(s,x(s))$ при почти всех $s\in[t_0,t_0+\beta]$. Тогда

$$\|z-x_0\|=\left\|\int_{t_0}^t y(s)ds\right\|\le\int_{t_0}^{\beta_1}a(s)ds+r\int_{t_0}^{\beta_1}b(s)ds<r.$$

Следовательно, $\Phi:\overline{U}\to K\upsilon(U)$ и не имеет неподвижных точек на ∂U.

Выберем β_2 столь малым, чтобы $\alpha\beta_2<1$, где α - константа Липшица м-отображения *F*. Так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu(A\cap[t_0,t_0+h]\ )}{h}>0\,,$$

то существует такое число β_3 >0, что для любого β, $0<\beta\le\beta_3$, $\mu(A\cap[t_0,t_0+\beta]\ )>0$.

Пусть $\beta_0=\min\{\ \beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, $0<\beta\le\beta_0$. Тогда $\Phi:\overline{U}\subset C_{[t_0,t_0+\beta]}\to K\upsilon(U)$ является вполне непрерывным сжимающим м-отображением.

Покажем, что для любого натурального числа m, топологическая размерность $\dim(\Phi(x))\ge m$ для любого $x\in\overline{U}$. Для этого, в силу выпуклости множества $\Phi(x)$, достаточно доказать существование m+1 линейно независимой точки $z_0(\cdot), \ \dots\ , z_m(\cdot)\in\Phi(x)$.

Так как в силу леммы 3.4 м-отображение $F_x(\cdot)=F(\cdot,x(\cdot)):[t_0,t_0+\beta]\to K\upsilon(R^n)$ имеет m+1 линейно независимое сечение $\{y_i(\cdot)\ \}_{i=0}^m$, то

$$z_i(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}y_i(s)ds\,,\quad i=0,1,\ \dots\ ,m,$$

лежат в образе $\Phi(x)$ и являются линейно независимыми.

Тогда, в силу следствия 4.6, имеем:

$$\dim\left(N_{y,\varepsilon}\left(i-\Phi,\overline{U}\right)\right)=\dim\left(\sum\nolimits_{y,\varepsilon}\right)\ge\dim(\Phi(y))\ge m$$

для любого m. Следовательно, $\dim\left(\sum\nolimits_{y,\varepsilon}\right)=\infty$, что и требовалось доказать.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований: грант № 99-01-00333.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С.,Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М: Наука, 1973.

2. Благодатских В.И.,Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление// Тр. мат. ин-та АН СССР. 1985. т.169. С.194-252.

3. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных точек многозначных отображений// Успехи мат. наук. 1980. т.35, N 1. С. 59-126.

4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.

5. Гельман Б.Д. О структуре множества решений включений с многозначными операторами// Глобальный анализ и матем. физика. Воронеж, ВГУ. 1987. С.26-41.

6. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М: Иностранная литература, 1948.

7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М: Наука, 1974.

8. Обэн Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М: Мир. 1988.

9. Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. Grundlehren math. Wiss. 1984. v.264, N 14.

10. Dzedzej Z., Gelman B.D. Dimension of solution set for differential inclusions// Demonstratio Math. 1993. v.26, N 1. p.149-158.

11. Michael E. Continuous selections,1// Ann. of Math. 1956. v.63, N 2. p.361-382.

12. Kikuchi N. On contingent equations satisfying the Caratheódory type conditions// Pub. Res. Inst. Math. Sci. 1968. N 3, p.361-371.

13. Saint Raymond J. Points fixes des multiapplications a valeurs convexes// C. R. Acad.Sci., Paris. 1984. t.298. p.71-74.

14. Saint Raymond J. Points fixes des contractions multivoques// Fix. Point Theory and Appl. Pitman Res. Not. in Math. v.252. p.359-375.

15.Ricceri B. On the topological dimension of the solution set of a class of nonlinear equations// C. R. Acad. Sci. Paris, 1997, t.325, Serie 1, p.65-70.