ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 1999, в. 1

УДК 515.122.55

ОБОБЩЕННАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И РАЗРЕШИМОСТЬ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ю.Г. Борисович, О.В. Осинцева

Воронежский государственный университет

В статье определяется обобщенная топологическая характеристика Кронекера-Пуанкаре-Красносельского относительно множества $\Gamma \subset R^n$ для векторного поля $f: S^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma,\ n \geq 2$, где Γ состоит из непересекающихся подмногообразий размерностей $0 \leq q \leq n$, путем интегрирования специальной 2-формы, задаваемой на $R^n \setminus \Gamma$. Исследована разрешимость включения $F(x) \in \Gamma$, где F - продолжение поля f на диск $\overline{D}^{n+1}$.

В работах Кронекера, Брауэра, Хопфа, М.А. Красносельского были заложены основы теории «топологической характеристики», «топологической степени», «вращения» для некоторых классов непрерывных отображений конечномерных многообразий, получивших эффективные приложения в исследованиях решений нелинейных уравнений (см. [1], [3], [4], [5]).

В данной работе предложено обобщение топологической характеристики, связанное со структурой множества решений конечномерного включения

$$f(x) \in A,$$

где $A \subset R^n$ - некоторое фиксированное множество.

В работе предлагается подход к указанной задаче, основанный на использовании дифференциальных форм.

Отправляясь от классической формулы потока векторного поля через замкнутую поверхность и от физических представлений в электростатике, определяется дифференциальная 2-форма ω^2 на R^n / A, интегрирование которой позволяет ввести обобщенную топологическую характеристику $\chi(f, A)$ векторного поля $f: S^{n-1} \to R^n \setminus A$ на (n-1)-мерной сфере в R^n. Вводится понятие особых точек поля f, определяются их топологические индексы, обобщается классическая формула алгебраической суммы индексов особых точек, доказываются теоремы о сохранении обобщенной характеристики при гомотопиях, теорема о существовании решений указанного выше включения. В итоге построена систематическая теория, обобщающая классическую теорию вращения векторного поля и совпадающая с ней, когда множество A состоит из одной точки (например, нуля в R^n).

1. Дифференциальные формы и определение обобщенной топологической характеристики

Здесь будут использованы понятия дифференциальных форм, когомологий де Рама, сингулярной теории гомологий; роль сингулярных цепей и циклов будут играть параметрически заданные ориентируемые поверхности в эвклидовом пространстве $R^{n \geq 3}$, в частности, *(n-1)*-мерная ориентированная сфера. Случай *n=2* также охватывается развиваемой ниже схемой, но более беден с геометрической точки зрения.

Пусть задано гладкое отображение

$$f: S^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma, \tag{1.1}$$

где $\Gamma = \bigcup_1^k \Gamma_i^{q_i}, \Gamma_i^{q_i} - q_i$ -мерная поверхность $(i = 1, \ldots, k, 0 \leq q_i \leq n, n \geq 3)$, заданная параметрически, $x_i = \varphi_i(u_i)$, при этом $x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n)$; $u_i = (u_i^1, \ldots, u_i^{q_i})$; $\varphi_i : \overline{\Omega}_i \to R^n$, где $\overline{\Omega}_i$ - замкнутая гладкая компактная область в R^{q_i} (в случае $q_i = 0 : \overline{\Omega}_i -$ точка и Γ_i^0 - точка-образ). Граница цепи $\Gamma_i^{q_i}$ есть образ границы области $\overline{\Omega}_i$, то есть $\partial \Gamma_i^{q_i} = \varphi(\partial \overline{\Omega}_i),\ i = 1, \ldots, k$. Пусть $\Gamma_i^{q_i} \bigcap \Gamma_j^{q_j} = \emptyset, i \neq j$.

Образом ориентированной сферы S^{n-1} при гладком отображении f будет ориентированная поверхность $f(S^{n-1})$ без границы $(\partial f(S^{n-1}) = \emptyset)$, не пересекающая ни одну из поверхностей $\Gamma_i^{q_i}, i = 1,...,k$. Можно считать, что поверхность $f(S^{n-1})$ находится внутри шара $\bar{D}_R^n$ достаточно большого радиуса R, а поверхности $\Gamma_i^{q_i}$ содержатся в $\bar{D}_R^n \setminus f(S^{n-1})$ с некоторыми открытыми ε_i-окрестностями $T_{\varepsilon_i}(\Gamma_i^{q_i}) = \{x \in \bar{D}_R^n : |\bar{x} - \bar{x}_i(u_i)| < \varepsilon_i\}$. То есть возможно рассматривать отображение

$$f : S^{n-1} \to \bar{D}_R^n \setminus \{T_{\varepsilon_*}(\Gamma_1^{q_1}),...,T_{\varepsilon_*}(\Gamma_k^{q_k})\} \qquad (1.1')$$

где $\varepsilon_* < \min \varepsilon_i$, и где $T_{\varepsilon_*}(\Gamma_i^{q_i}) \cap T_{\varepsilon_*}(\Gamma_j^{q_j}) = \emptyset$ при $i \neq j, i = 1,...,k; j = 1,...,k$.

В области $R^n \setminus \Gamma$, а следовательно, и в области $\bar{D}_R^n \setminus \{T_{\varepsilon_*}(\Gamma_1^{q_1}),...,T_{\varepsilon_*}(\Gamma_k^{q_k})\}$ определена дифференциальная (n-1)-форма

$$\omega^{n-1} = \sum_{i=1}^{k} \omega_i^{n-1} \qquad (1.2)$$

где форма ω_i^{n-1} определена в области $R^n \setminus \Gamma_i^{q_i}$ (следовательно, и в $\bar{D}_R^n \setminus T_{\varepsilon_*}(\Gamma_i^{q_i})$) и имеет вид:

$$\omega_i^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_i^j dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n, \qquad (1.3)$$

где $b_i = (b_i^j)$ - напряженность электростатического поля в точке $\bar{x}$, создаваемая электрическими зарядами, распределенными на поверхности $\Gamma_i^{q_i}$ с единичной плотностью [6]; при $q_i > 0$ коэффициенты $b_i^j(\bar{x})$ формы ω_i^{n-1} определяются по формуле

$$b_i^j(\bar{x}) = \int_{\Gamma_i^{q_i}} \frac{x^j - x_i^j(u_i)}{|\bar{x} - \bar{x}_i(u_i)|^n} d\sigma_i,\ j = 1,...,n; \qquad (1.4)$$

при $q_i = 0$ $b_i(\bar{x}) = (\bar{x} - \bar{x}_{0i}) / |\bar{x} - \bar{x}_{0i}|^n$, если $\Gamma_i^0 = \bar{x}_{0i}$. Здесь $d\sigma_i$ - элемент площади поверхности $\Gamma_i^{q_i}$, $x_i(u_i) \in \Gamma_i^{q_i}$.

Лемма 1.1. *Форма (1.2) замкнута.*

Доказательство. Нужно показать, что $d\omega^{n-1} = 0$. Сначала покажем, что $d\omega_i^{n-1} = 0$ $\forall i = 1,...,k$:

$$d\omega_i^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial b_i^j}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{\partial b_i^j}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge ... \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge ... \wedge dx^n =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_i^j}{\partial x^j} dx^1 \wedge ... \wedge dx^j \wedge ... \wedge dx^n.$$

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком суммы:

$$\frac{\partial b_i^j}{\partial x^j} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n =$$

$$= \left(\int_{\Gamma_i^{q_i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{x^j - x_i^j(u_i)}{|\bar{x} - \bar{x}_i(u_i)|^n} \right) d\sigma_i \right) dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

(ввиду гладкости интегрируемой функции возможно переставлять операции интегрирования и дифференцирования). Следовательно,

$$d\omega_i^{n-1} = \left(\int_{\Gamma_i^{q_i}} \sum_{j=1}^{n} \frac{|\bar{x} - \bar{x}_i(u_i)|^2 - n(x^j - x_i^j(u_i))^2}{|\bar{x} - \bar{x}_i(u_i)|^{n+2}} d\sigma_i \right) \times$$

$$\times dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = 0$$

Таким образом, $d\omega^{n-1} = \sum_{i=1}^{k} d\omega_i^{n-1} = 0$. Лемма доказана. □

Для дальнейшего наложим на поверхности $\Gamma_i^{q_i}$ **условие** (α_0): *для достаточно малого ε_* открытая ε-окрестность $T_\varepsilon(\Gamma_i^{q_i})$ поверхности $\Gamma_i^{q_i}$ гомеоморфна открытому n-мерному шару при* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$.

Пусть z_{n-1} - цикл, порожденный поверхностью $f(S^{n-1})$. В области $\bar{D}_R^n \setminus \{T_\varepsilon(\Gamma_1^{q_1}),...,T_\varepsilon(\Gamma_k^{q_k})\}$, $\varepsilon < \varepsilon_*$, цикл z_{n-1} гомологичен циклу $\sum_{j=1}^{k} m_j P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})$, где $m_j \in Z, P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j}) = \partial T_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})$, граница $P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})$ гомологична сфере и имеет ту же ориентацию, что и S^{n-1}. В силу гомологичности циклов и леммы 1.1 имеем (по теореме де Рама):

$$\int\limits_{z_{n-1}} \omega^{n-1} = \sum_{j=1}^{k} m_j \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})} \omega_i^{n-1}.$$

Лемма 1.2. При $i \neq j$ $\int\limits_{P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})} \omega_i^{n-1} = 0$.

Доказательство.

Форма ω_i^{n-1} замкнута в области $R^n \setminus \Gamma_i^{q_i}$, а цикл $P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})$ при $i \neq j$ гомологичен нулю в этой области.

Из формулы Стокса следует, что

$$\int\limits_{P_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})} \omega_i^{n-1} = \int\limits_{\partial T_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})} \omega_i^{n-1} = \int\limits_{T_\varepsilon(\Gamma_j^{q_j})} d\omega_i^{n-1} = 0.$$

Лемма доказана. □

Из леммы 1.2 следует, что

$$\int\limits_{z_{n-1}} \omega^{n-1} = \sum_{i=1}^{k} m_i \int\limits_{P_\varepsilon(\Gamma_i^{q_i})} \omega_i^{n-1}. \tag{1.5}$$

Обозначая $\int\limits_{z_{n-1}} \omega^{n-1}$ через $\tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma)$, $\int\limits_{P_\varepsilon(\Gamma_i^{q_i})} \omega_i^{n-1}$ через æ$_i$, приходим к формуле

$$\tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma) = \sum_{i=1}^{k} m_i æ_i. \tag{1.6}$$

Определение 1.1. *Целое число* m_i *обозначим* $\chi(f, \Gamma_i^{q_i})$*:*

$$\chi(f, \Gamma_i^{q_i}) = m_i,$$

и назовем индексом векторного поля f *относительно поверхности* $\Gamma_i^{q_i}, i = 1,\dots,k$.

Определение 1.2. *Величину*

$$\chi(f, S^{n-1}, \Gamma) = (m_1, \dots, m_k) \tag{1.7}$$

назовем обобщенной топологической характеристикой отображения f *относительно системы поверхностей* Γ.

Очевидно, биективное соответствие между величинами $\tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma)$ и $\chi(f, S^{n-1}, \Gamma)$.

Если рассматривать $\int\limits_{z^{n-1}} \omega_i^{n-1}$ как $\tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma_i^{q_i})$, то получим формулу:

$\tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma) = \sum\limits_{i=1}^{k} \tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma_i^{q_i})$, характеризующую аддитивность $\tilde{\chi}$ относительно Γ.

Замечание. Понятие «характеристики» $\chi(f, S^{n-1}, \Gamma)$ естественно расширяется, если вместо S^{n-1} рассмотреть случай ориентированного гладкого подмногообразия M^{n-1}, диффеоморфного S^{n-1}, а также случай несвязного многообразия $Q^{n-1} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} M_i^{n-1}$, состоящего из непересекающихся подмногообразий M_i^{n-1}, $i = 1,\dots,r$, диффеоморфных S^{n-1}. Для отображения $f: Q^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma$ определяется характеристика χ равенством

$$\chi(f, Q^{n-1}, \Gamma) = \sum_{i=1}^{r} \chi(f, M_i^{n-1}, \Gamma) = (\sum m_1^i, \dots, \sum m_k^i), \tag{1.8}$$

где справа — сумма векторов $(m_1^i, \dots, m_k^i), i = 1,2,\dots,r$, - обобщенных топологических характеристик $\chi(f, M_i^{n-1}, \Gamma)$ вида (1.7).

Обратим внимание, что случай размерности $q_i = 0$ (когда $\Gamma_i^{q_i}$ - изолированная точка) намечен в [7], но мы не выписываем классические аналитические представления топологического индекса относительно точки.

2. Свойства характеристик $\chi(f, S^{n-1}, \Gamma)$, $\chi(f, M^{n-1}, \Gamma)$

Теорема 2.1. (гомотопическая инвариантность) *Рассмотрим два гладких гомотопных отображения:*

$$f: S^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma, \; g: S^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma.$$

Пусть $F(\xi, t)$ - связывающая их гомотопия $(\xi \in S^{n-1}, t \in [0,1])$, такая, что

$$\forall (\xi, t) \in S^{n-1} \times [0,1] \;\; F(\xi, t) \cap \Gamma = \varnothing$$

Тогда $\chi(f, S^{n-1}, \Gamma) = \chi(g, S^{n-1}, \Gamma)$.

Доказательство. Пусть z_{n-1}^1 и z_{n-1}^2 - циклы, порожденные поверхностями $f(S^{n-1})$ и $g(S^{n-1})$ соответственно. Цикл z_{n-1}^1 - z_{n-1}^2 является границей *n*-мерной поверхности $F=\{x\in R^n : x=F(\xi,t),\xi\in S^{n-1},t\in[0,1]\}$. Следовательно, имеем гомологию $z_{n-1}^1 \sim z_{n-1}^2$. Действительно, гомотопные отображения f и g порождают один и тот же гомоморфизм групп гомологий [2]: $f_* = g_*$, поэтому цикл S^{n-1} при отображениях f и g переходит в гомологичные циклы z_{n-1}^1 и z_{n-1}^2. Следовательно, они гомологичны циклу $\sum_{i=1}^{k} m_i P_\varepsilon(\Gamma_i^{q_i})$, откуда следует

$$\chi(f,S^{n-1},\Gamma)=(m_1,...,m_k)=\chi(g,S^{n-1},\Gamma),$$

что и требовалось доказать. □

Заметим, что теорема 2.1 естественно обобщается на случай ориентируемого многообразия M^{n-1}, а также несвязного многообразия Q^{n-1}.

3. Индексы «особых точек». Аналог теоремы о сумме индексов

Пусть $\tilde{f}$ - гладкое продолжение отображения $f : S^{n-1} \to \overline{D}_R^n \setminus \{\Gamma_1^{q_1},...,\Gamma_k^{q_k}\}$ на шар $\overline{D}^n, \partial D^n = S^{n-1}$: $\tilde{f} : \overline{D}^n \to \overline{D}_R^n$, $\left.\overline{f}\right|_{S^{n-1}} \equiv f$.

Определение 3.1. *Точку* $x\in D^n$ *назовем особой относительно множества* Γ, *если* $\tilde{f}(x)\in\Gamma$; *точку* $x\in D^n$ *назовем особой относительно множества* $\Gamma_i^{q_i}$, *если* $\tilde{f}(x)\in\Gamma_i^{q_i}$.

Предположим, что:

1) поверхность $\Gamma_i^{q_i}$ является гладким подмногообразием в $\overline{D}_R^n, i=1,...,k$;

2) $\tilde{f} : \left(\overline{D}^n\right) \cap \Gamma_i^{q_i} \neq \varnothing$ и отображение $\tilde{f}$ трансверсально к $\Gamma_i^{q_i}(\tilde{f}\cap\Gamma_i^{q_i}), i=1,...,k$.

Тогда $\tilde{f}^{-1}(\Gamma_i^{q_i})$ - гладкое подмногообразие в $\overline{D}^n$ ([3]), и $\dim \tilde{f}^{-1}(\Gamma_i^{q_i}) = q_i$.

Так как множество $\Gamma_i^{q_i}$ компактно, то $\tilde{f}^{-1}(\Gamma_i^{q_i})$ компактно, поэтому $\tilde{f}^{-1}(\Gamma_i^{q_i})$ состоит из конечного числа связных компонент размерности q_i:

$$\tilde{f}^{-1}(\Gamma_i^{q_i}) = \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{ij},\ j=1,...,s_i\ .$$

Предположим далее, что каждое множество $X_{ij}\ (j=1,...,s_i)$ возможно окружить поверхностями $P_\delta(X_{ij})$ размерности *n-1*, такими, что:

а) $P_\delta(X_{ij})$ имеет ту же ориентацию, что и $S^{n-1} = \partial\overline{D}^n$;

б) $P_\delta(X_{ij}) \cap P_\delta(X_{iq}) = \varnothing$ при $j\neq q, j=1,...,s_i$, $q=1,...,s_i$;

в) $\forall j=1,...,s_i$ $\tilde{f}(P_\delta(X_{ij}))\cap\Gamma_l^{q_l} = \varnothing$ при $i\neq l, l=1,...,k$.

Условия типа а)-в) рассматривались в [1], [4]. Здесь мы не приводим подробных рассуждений.

Отображение $\tilde{f}$ переводит цикл $P_\delta(X_{ij})$ в цикл $z_{n-1}^{ij} = \tilde{f}(P_\delta(X_{ij}))$, «окружающий» поверхность $\Gamma_i^{q_i}$. Можно считать, что z_{n-1}^{ij} окружает поверхность $P_\varepsilon(\Gamma_i^{q_i})$, поскольку, в силу условий на $\Gamma_i^{q_i}$, можно выбрать подходящее ε.

В области $\overline{D}_R^n \setminus \{T_\varepsilon(\Gamma_1^{q_1}),...,T_\varepsilon(\Gamma_k^{q_k})\}$ цикл z_{n-1}^{ij} гомологичен циклу $N_{ij}P_\varepsilon(\Gamma_i^{q_i})$, где $N_{ij}\in Z$, поэтому

$$\int_{z_{n-1}^{ij}} \omega_i^{n-1} = N_{ij} \int_{P_\varepsilon\left(\Gamma_i^{q_i}\right)} \omega_i^{n-1} = N_{ij}æ_i$$

откуда целое число N_{ij} выражается формулой

$$N_{ij} = \frac{1}{æ_i}\int_{z_{n-1}^{ij}} \omega_i^{n-1}, \tag{3.9}$$

где $i=1,...,k, j=1,...,s_i$.

Определение 3.2. *Число* N_{ij} *назовем обобщенным индексом точек* $x\in X_{ij}$, *особых относительно множества* $\Gamma_i^{q_i}\ (i=1,...,k, j=1,...,s_i)$.

Теорема 3.1. (о сумме индексов) Если цикл $\sum_{j=1}^{s_i} P_\delta(X_{ij})$ гомологичен S^{n-1} в области $\overline{D}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{ij}$, то верно равенство

$$\sum_{j=1}^{s_i} N_{ij} = \chi\left(f, \Gamma_i^{q_i}\right) = m_i . \tag{3.10}$$

Доказательство.

Пользуясь определением индекса N_{ij} и свойствами интеграла, получим следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^{s_i} N_{ij} = \frac{1}{æ_i} \sum_{j=1}^{s_i} \int_{z_{n-1}^{ij}} \omega_i^{n-1} = \frac{1}{æ_i} \sum_{j=1}^{s_i} \int_{P_\delta(X_{ij})} \tilde{f}^* \omega_i^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{æ_i} \int_{\sum_{j=1}^{s_i} P_\delta(X_{ij})} \tilde{f}^* \omega_i^{n-1} .$$

Так как цикл $\sum_{j=1}^{s_i} P_\delta(X_{ij})$ гомологичен S^{n-1} в области $\overline{D}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{ij}$, а форма $\tilde{f}^* \omega_i^{n-1}$ замкнута в этой области ($d\tilde{f}^* \omega_i^{n-1} = \tilde{f}^* d\omega_i^{n-1} = 0$), то имеем:

$$\sum_{j=1}^{s_i} N_{ij} = \frac{1}{æ_i} \int_{S^{n-1}} \tilde{f}^* \omega_i^{n-1} = \frac{1}{æ_i} \int_{\tilde{f}(S^{n-1})} \omega_i^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{æ_i} \int_{f(S^{n-1})} \omega_i^{n-1} = \frac{1}{æ_i} \int_{z_{n-1}} \omega_i^{n-1} .$$

Из гомологичности цикла z_{n-1} циклу $\sum_{j=1}^{k} m_j P_\varepsilon\left(\Gamma_j^{q_j}\right)$ и из леммы 1.2 следует, что

$$\int_{z_{n-1}} \omega_i^{n-1} = m_i \int_{P_\varepsilon\left(\Gamma_i^{q_i}\right)} \omega_i^{n-1} = m_i æ_i .$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{s_i} N_{ij} = m_i = \chi\left(f, \Gamma_i^{q_i}\right).$$

Теорема доказана. □

Теперь можно доказать окончательную теорему о сумме индексов, обобщающую теорему 3.1. Предполагаем, что множество $X_{ij} \subset \tilde{f}^{-1}(\Gamma)$ $(i = 1,...,k;\ j = 1,...,s_i)$ окружены поверхностями $P_\delta(X_{ij})$, удовлетворяющими условиям а)-в) и условию: $P_\delta(X_{ij}) \cap P_\delta(X_{lq}) = \varnothing$ при $i \neq l, i = 1,...,k; j = 1,...,s_i$; $l = 1,...,k; q = 1,...,s_i$.

Теорема 3.2. *Пусть цикл* $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} P_\delta(X_{ij})$ *гомологичен* S^{n-1} *в области* $\overline{D}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{ij}$. *Тогда*

$$\tilde{\chi}\left(f, S^{n-1}, \Gamma\right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} N_{ij} æ_i . \tag{3.11}$$

Доказательство.

Так как цикл $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} P_\delta(X_{ij})$ гомологичен S^{n-1}, то имеем серию равенств:

$$\tilde{\chi}\left(f, S^{n-1}, \Gamma\right) = \int_{z_{n-1}} \omega^{n-1} = \int_{S^{n-1}} \tilde{f}^* \omega^{n-1} = \int_{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} P_\delta(X_{ij})} \tilde{f}^* \omega^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} \int_{\tilde{f}(P_\delta(X_{ij}))} \omega^{n-1} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} \int_{N_{ij} P_\varepsilon\left(\Gamma_i^{q_i}\right)} \omega_i^{n-1} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} N_{ij} æ_i ,$$

что и доказывает теорему. □

Замечание к теоремам 3.1 и 3.2: если множества X_{ij} можно окружить непересекающимися сферами $S_\delta^{n-1}(X_{ij})$, то цикл $\sum_{j=1}^{s_i} S_\delta^{n-1}(X_{ij})$ будет гомологичен S^{n-1} в области $\overline{D}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{ij}$, а цикл $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} S_\delta^{n-1}(X_{ij})$ гомологичен S^{n-1} в области $\overline{D}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{s_i} X_{ij}$. Этот случай служит примером выполнения условий теорем 3.1 и 3.2.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, в частности, существование решения включения $\tilde{f}(x) \in \Gamma$, если $\tilde{\chi}(f, S^{n-1}, \Gamma) \neq 0$. Однако, имеет место более точная теорема существования:

Теорема 3.3. *Пусть* $\tilde{f} : \overline{D}^n \to \overline{D}_R^n$ *- гладкое отображение,* $\Gamma_i^{q_i}$ *- гладкая поверхность в* $\overline{D}_R^n (i = 1,...,k)$. *Тогда, если* $\tilde{\chi}\left(f, S^{n-1}, \Gamma_i^{q_i}\right) \neq 0$*, то* *включение $\tilde{f}(x) \in \Gamma_i^{q_i}$ имеет решение внутри шара $\overline{D}^n$.*

Доказательство. Предположив, что $\tilde{\chi}\left(f, S^{n-1}, \Gamma_i^{q_i}\right) \neq 0$, но соответствующее включение не имеет решений внутри $\overline{D}^n$; тогда будем иметь цикл $z_{n-1} = \tilde{f}\left(S^{n-1}\right)$, гомологичный нулю в области $\overline{D}_R^n \setminus \Gamma_i^{q_i}$. Следовательно,

$$\int_{\tilde{f}\left(S^n\right) = z_{n-1}} \omega^{n-1} = 0,$$

что противоречит условию теоремы. □

В заключение отметим, что теоремы 3.1-3.3 остаются в силе, если вместо сферы S^{n-1} рассматривать многообразия M^{n-1} или Q^{n-1} (см. замечание в конце §1) и отображения $f : M^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma$, $f : Q^{n-1} \to R^n \setminus \Gamma$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. - М.: Наука, 1995. - 416 с.
2. Ботт Р., Ту Л.В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. - М.: Наука, 1989. - 336с.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука, 1979. - 760 с.
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975. - 512 с.
5. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. - М.: Мир, 1977. - 230с.
6. Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. - М.: Высшая школа, 1990. - 351с.
7. Шварц А.С. Квантовая теория поля и топология. - М.: Наука, 1989. - 400 с.