ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

УДК 519.61

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ НЕУЛУЧШАЕМЫХ ОЦЕНКАХ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ ДИСКРЕТНОГО ЛАПЛАСИАНА

И.А. Блатов, Е.В. Китаева, М.Е. Эксаревская

Воронежский государственный университет

Рассматривается построение неполной блочной факторизации для решения дискретного Лапласиана. Получены двусторонние асимптотически неулучшаемые оценки числа обусловленности предобусловленной матрицы в зависимости от структуры допустимого заполнения.

В [1, с.267] В.П.Ильиным была поставлена задача получения оценок скорости сходимости итераций метода неполной факторизации (м.н.ф.), учитывающих повышение «степени неявности» алгоритма. Данная задача, в свою очередь, сводится [1] к оценке числа обусловленности предобусловленной матрицы. Частичное решение этой задачи было дано автором в [2] для дискретного уравнения Пуассона на квадрате в случае точечных и блочных м.н.ф. Однако, оставался открытым вопрос о точности полученных оценок в связи с наличием в них логарифмических множителей.

В настоящей статье для схем неполной факторизации получены более точные оценки, которые асимптотически неулучшаемы. Из них, в частности, вытекает экспериментально подтверждаемый факт, что оптимальное значение «цена× количество итераций» для м.н.ф. в сочетании с предобусловленным методом сопряженных градиентов достигается для небольших значений $k=O(1)$ ширины ленты в блоках предобуславливающих матриц.

Для доказательства основного результата в статье получены более точные, чем в [2] оценки элементов точных и неполных факторизаций дискретного лапласиана, представляющие самостоятельный интерес.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ

Рассмотрим краевую задачу

$$Mu \equiv -\Delta u = f(x,y), \quad u|_{\Gamma} = 0 \tag{1.1}$$

в единичном квадрате $\prod : [0,1]\times[0,1]$.

Здесь Г-граница П, $\Delta u \equiv \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, $f(x,y)$ - непрерывная функция. Пусть $n \geq 4$ натуральное число. Пусть $0 = x_0 < \ldots < x_{n+1} = 1$, $0 = y_o < \ldots < y_{n+1} = 1$, $x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i = h = 1/(n+1)$. Аппроксимируем оператор (1.1) выражением $(Mu)(x_i, y_i) \sim (-\mathrm{u}_{\mathrm{i-1,j}} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1})/h^2$. Перенумеруем компоненты сеточной функции:

$$u_{11} = u_1, u_{21} = u_2, \ldots, u_{n1} = u_n,\ u_{12} = u_{n+1},$$
$$u_{22} = u_{n+2}, \ldots, u_{1n} = u_{n(n-1)}, \ldots, u_{nn} = u_{n^2} \tag{1.2}$$

и умножим каждое разностное уравнение на h^2. Тогда получим с.л.а.у. $AU=F$, где

$$A = \begin{pmatrix} E_1 & -F_1 & \ldots & 0 \\ -D_2 & E_2 & -F_2 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -D_n & E_n \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

E_i, D_i, F_i - квадратные матрицы порядка $n, F_i = D_i = I$, I - единичная матрица. A является симметричной M-матрицей. Мы будем часто использовать известные свойства M-матриц (см. [3, §36]).

Введем обозначения. Символ $[a]$ обозначает целую часть числа a. Символом C будем обозначать положительные константы (вообще говоря, различные), не зависящие от номера n. Иногда для таких констант будем использовать обозначения $C_1, C_2, \ldots$. Если для γ имеют место оценки $|\gamma| \le C|\beta|$, то будем писать $\gamma = O(\beta)$, а если $0 < C_1|\beta| \le |\gamma| \le C_2|\beta|$ - то $\gamma = O^*(\beta)$. Пусть

$$t_+ = \begin{cases} t, t > 0 \\ 0, t \le 0 \end{cases}.$$

Через $\|\cdot\|_p$ будем, в зависимости от контекста, обозначать обычную норму вектора (евклидову при p=2) или согласованную с ней норму матрицы. Для векторов или матриц запись $A \le B$ означает, что $a_{ij} \le b_{ij}$ $(a_i \le b_i)$ для всех элементов. Символом *cond (K)* будем обозначать спектральное число обусловленности матрицы K. Символ I обозначает единичную матрицу.

Рассмотрим блочную факторизацию матрицы A

$$A = (D+G)G^{-1}(G+F), \tag{1.4}$$

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -D_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -F_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -F_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

где $(n \times n)$ -матрицы G_i определяются с помощью метода матричной прогонки (см. [4])

$$G_1 = E_1, G_{s+1} = E_{s+1} - D_{s+1}G_s^{-1}F_s, \; s = 1,2,...,n-1 \tag{1.6}$$

Замечание 1. Для диагональных и блочно-диагональных матриц в дальнейшем будем применять обозначения вида $G = diag(G_1,...,G_n)$, а для трехдиагональных и блочно-трехдиагональных матриц вида (1.3) - обозначения $A = tridiag\{-D_p, E_p, -F_p\}$, $1 \le p \le n$, блоки D_1 и F_n отсутствуют.

Определим неполную блочную факторизацию матрицы A без диагональной компенсации формулами

$$\hat{A} = (D+\hat{G})\hat{G}^{-1}(\hat{G}+F), \tag{1.7}$$

где $\hat{G} = diag(\hat{G}_1,...,\hat{G}_n)$, D и F - матрицы (1.5), а $\hat{G}_i$ определяются формулами

$$\hat{G}_1 = E_1, \hat{G}_{s+1} = E_{s+1} - D_{s+1}\left(\hat{G}_s^{-1}\right)^{(k)}F_s,$$
$$s = 1,2,...,n-1 \tag{1.8}$$

Здесь символ (k) означает взятие ($2k+1$)-диагональной части матрицы, т.е. если $B = \{b_{ij}\}$, то $B^{(k)} = \{b_{ij,k}\}$, $b_{ij,k} = b_{ij}$ при $|i-j| \le k$, $b_{ij,k} = 0$ для $|i-j| > k$.

Пусть $K = \hat{A}^{-1}A$. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. Найдутся такие константы C_1>0,C_2>0, что при всех $n \ge 4, k \le n$ справедливы оценки

$$C_1\frac{n^2}{k^2} \le cond(K) \le C_2\frac{n^2}{k^2}. \tag{1.9}$$

Следующие три раздела посвящены доказательству теоремы 1.

2. ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ БЛОЧНЫХ ФАКТОРИЗАЦИЙ

2.1. Оценки элементов точных факторизаций

Теорема 2. В разложении (1.4)-(1.5) для элементов матриц $G_s^{-1} = \{g_{ij,s}^{(-1)}\}$ справедливы формулы

$$g_{ij,s}^{(-1)} = \begin{cases} O^*\left(\dfrac{\min\{i, s, 1+|i-j|\}}{(1+|i-j|)^3}(1-r_s/s)^{|i-j|}\right), \\ \quad 1 \le i, j \le 3n/4; \\ O^*\left(\dfrac{\min\{n+1-i, s, 1+|i-j|\}}{(1+|i-j|)^3}(1-r_s/s)^{|i-j|}\right), \\ \quad n/4 \le i, j \le n, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $r_s = r_s(i,j) = O^*(1)$.

Доказательству теоремы 2 предпошлем техническое.

Предложение 1. Пусть $q \in [1,n]$ и числа λ_ν, μ_ν определены формулами

$$\lambda_\nu = 4\sin^2\frac{\pi\nu}{2(q+1)}, \; \mu_\nu = 1 + \frac{\lambda_\nu}{2} - \sqrt{\lambda_\nu + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2},$$

$$1 \le \nu \le n. \tag{2.2}$$

Тогда справедливы следующие формулы

$$\lambda_\nu = \frac{(1-\mu_\nu)^2}{\mu_\nu}, \tag{2.3}$$

$$\mu_\nu = 1 - \frac{2\sin\frac{\pi\nu}{2(q+1)}}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi\nu}{2(q+1)}} + \sin\frac{\pi\nu}{2(q+1)}},\ 1 \le \nu \le q \le n,$$

$$\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu = \frac{\mu_\nu\mu_{\nu+1} - 1}{\mu_\nu\mu_{\nu+1}}(\mu_{\nu+1} - \mu_\nu), \tag{2.4}$$

$$\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu = 4\sin\frac{\pi(\nu+1/2)}{q+1}\sin\frac{\pi}{q+1},$$

$$\mu_\nu \in \left(3-\sqrt{8}, 1 - O^*\left(\frac{1}{q}\right)\right),\ 1 \le \nu \le q \le n, \tag{2.5}$$

$$0 < \mu_\nu - \mu_{\nu+1} \le \mu_{\nu+1} - \mu_{\nu+2} = O\left(\frac{1}{q}\right),\ 1 \le \nu \le [q/2], \tag{2.6}$$

$$\mu_\nu - \mu_{\nu+1} = O^*\left(\frac{1}{q}\right),\ [q/2] \le \nu \le q \tag{2.7}$$

$$0 < \frac{1-\mu_\nu\mu_{\nu+1}}{1-\mu_\nu^2} = O^*(1),\ 1 \le \nu \le q \le n, \tag{2.8}$$

$$0 < \left(1 - \mu_\nu^{O^*(n)}\right) = O^*(1),\ 1 \le \nu \le q \le n, \tag{2.9}$$

$$\frac{\mu_\nu}{\mu_1} = 1 - O^*\left(\frac{\nu}{q}\right). \tag{2.10}$$

Действительно, формулы (2.3), (2.4) получаются из (2.2) прямой выкладкой, (2.5) и (2.6) следуют из (2.3) и того, что функция $\mu(y) = 1 - 2y/\left(\sqrt{(1+y^2)} + y\right)$ монотонно убывает на [0,4] вместе с производной, $\mu(0) = 1, \mu(4) = 3 - \sqrt{8}$; (2.7) и (2.10) получаются применением к (2.3) формулы Лагранжа, (2.9) следует из (2.5). Наконец, (2.8) следует из (2.5),(2.7).

Предложение доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2. В [2] для $g_{ij,q}^{-1}$ было получено представление

$$g_{ij,q}^{-1} = \frac{2}{q+1}\sum_{\nu=1}^{q}\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}\frac{\mu_\nu}{(1-\mu_\nu^2)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1)}\right)} \times$$
$$\times\left(\mu_\nu^{|i-j|} - \mu_\nu^{i+j}\right)\left(1 - \mu_\nu^{2(n+1-\max\{i,j\})}\right). \tag{2.11}$$

Пусть $j \ge i$. Тогда из (2.11),(2.2)-(2.4),(2.8), (2.9) следует, что

$$g_{ij,q}^{(-1)} = \frac{1}{2(q+1)\sin\frac{\pi}{2(q+1)}}\sum_{\nu=1}^{q}\frac{\sin^2\frac{\pi\nu}{q+1}}{\sin\frac{\pi(\nu+1/2)}{q+1}} \times$$
$$\times\left(4\sin\frac{\pi(\nu+1/2)}{q+1}\sin\frac{\pi}{2(q+1)}\right)\frac{\mu_\nu}{(1-\mu_\nu^2)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1)}\right)} \times$$
$$\times\left(\mu_\nu^{j-i} - \mu_\nu^{i+j}\right)\left(1 - \mu_\nu^{2(n+1-j)}\right) =$$
$$= O^*\Bigg(\sum_{\nu=1}^{q}\sin\frac{\pi\nu}{q+1}\frac{\mu_\nu\mu_{\nu+1}-1}{\mu_\nu\mu_{\nu+1}}\frac{\mu_\nu}{(1-\mu_\nu^2)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1)}\right)} \times$$
$$\times\left(\mu_\nu^{j-i} - \mu_\nu^{i+j}\right)\left(1 - \mu_\nu^{2(n+1-j)}\right)(\mu_{\nu+1} - \mu_\nu)\Bigg) =$$
$$= O^*\left(\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1-\mu_\nu}{\sqrt{\mu_\nu}}\sqrt{1 - \frac{(1-\mu_\nu)^2}{4\mu_\nu}}\frac{\mu_\nu\mu_{\nu+1}-1}{1-\mu_\nu^2} \times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\mu_{\nu+1}\left(1-\mu_\nu^{2(n+1)}\right)}\left(\mu_\nu^{j-i} - \mu_\nu^{i+j}\right)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1-j)}\right)(\mu_{\nu+1} - \mu_\nu)\right) =$$
$$= O^*\left(\sum_{\nu=1}^{q}\sqrt{6\mu_\nu - \mu_\nu^2 - 1}(1-\mu_\nu)\left(\mu_\nu^{j-i} - \mu_\nu^{i+j}\right) \times\right.$$
$$\left.\times\left(1 - \mu_\nu^{2(n+1-j)}\right)(\mu_{\nu+1} - \mu_\nu)\right). \tag{2.12}$$

Заметим далее, что из (2.3) следует, что $\sqrt{6\mu_\nu - \mu_\nu^2 - 1} = O^*(1)$ при $\nu \le [q/2] + 1$, т.к. при этих ν имеем

$$\mu_\nu \ge 1 - \max\left\{\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi}{4}} + \sin\frac{\pi}{4}}, \frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi}{3}} + \sin\frac{\pi}{3}}\right\} =$$
$$= 2 - \sqrt{3},$$

а $6\mu_\nu-\mu_\nu^2-1\geq C>0$ при $\mu\in\left[2-\sqrt{3},1\right]$. Поэтому из (2.12) вытекает, что

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)\left(\mu_\nu^{j-i}-\mu_\nu^{i+j}\right)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1-j)}\right)(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)\right), \quad (2.13)$$

если только в (2.13)

$$\sum_{\nu=[q/2]+2}^{q}(\ldots)=O\left(\sum_{\nu=1}^{[q/2]+1}(\ldots)\right),\ 1\leq q\leq n\,. \quad (2.14)$$

Оценим правую часть (2.13) и покажем, что выполняется (2.14). Пусть $1\leq i,j\leq 3n/4$. Тогда в силу (2.9) $\left(1-\mu_\nu^{2(n+1-j)}\right)=O^*(1)$, и мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)\left(\mu_\nu^{j-i}-\mu_\nu^{i+j}\right)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1-j)}\right)(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)=$$

$$=O^*\left(\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)\left(\mu_\nu^{j-i}-\mu_\nu^{i+j}\right)(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)\right)=$$

$$=O^*\left(\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)\left(\mu_\nu^{j-i}\right)\left(1-\mu_\nu^{2i}\right)\right)=$$

$$=O^*\left(\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)^2\sum_{s=j-i}^{j+i}\mu_\nu^s(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)\right)=$$

$$=O^*\left(\sum_{s=j-i}^{j+i}\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)^2\mu_\nu^s(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)\right). \quad (2.15)$$

Изучим сумму $\sum_{s,q}=\sum_{\nu=1}^{q}(1-\mu_\nu)^2\mu_\nu^s(\mu_{\nu+1}-\mu_\nu)$. Это есть частичная сумма для интеграла $I_s=\int_{\mu_q}^{\mu_1}(1-\mu)^2\mu^s d\mu$. Рассмотрим два случая: $s\leq q$ и $s>q$.

Пусть $s\leq q$. Тогда поскольку в силу (2.5),(2.6) любой частичный отрезок $[\mu_\nu,\mu_{\nu+1}]$ имеет длину $O(1/q)$, а $1-\mu_\nu\geq 3-\sqrt{8}$, то

$\max\limits_{\mu\in[\mu_{\nu+1},\mu_\nu]}(1-\mu)^2\mu^s=O^*\left(\min\limits_{\mu\in[\mu_{\nu+1},\mu_\nu]}(1-\mu)^2\mu^s\right)$. Отсюда получаем

$$\sum_{s,q}=O^*(I_s),\qquad s\leq q\,. \quad (2.16)$$

Пусть $s>q$. В силу (2.3),(2.6),(2.10) с учетом того, что $\nu\leq q\leq s$

$$\frac{(1-\mu_\nu)^2\mu_\nu^s(\mu_\nu-\mu_{\nu+1})}{(1-\mu_1)^2\mu_1^s(\mu_1-\mu_2)}\leq\frac{(1-\mu_\nu)^2\mu_\nu^s}{(1-\mu_1)^2\mu_1^s}=$$

$$=O\left(\nu^2\left(\frac{\mu_\nu}{\mu_1}\right)^s\right)=O\left(\nu^2\left(1-\frac{C\nu}{q}\right)^s\right)=O\left(\left(1-\frac{C\nu}{2q}\right)^s\right),$$

$C=O^*(1)$.

Отсюда, поскольку $\left(1-\frac{C\nu}{2q}\right)^s\leq e^{-C_1\nu}$, имеем

$$\sum_{s,q}=O^*\left((1-\mu_1)^2\mu_1^s(\mu_1-\mu_2)\left(1+\sum_{\nu=2}^{q}\left(1-\frac{C\nu}{2q}\right)^s\right)\right)=$$

$$=O^*\left((1-\mu_1)^2\mu_1^s(\mu_1-\mu_2)\right)=O^*\left(\frac{1}{q^3}\left(1-\frac{C}{2q}\right)^s\right). \quad (2.17)$$

Замечание 2. Отметим, что и в случае (2.16) и в случае (2.17) для сумм $\sum_{s,q,1}$ и $\sum_{s,q,2}$ слагаемых с номерами $\nu\in[1,[q/2]+1]$ и $\nu\in[[q/2]+1,q]$ выполняется условие $\sum_{s,q,2}=O\left(\sum_{s,q,1}\right)$, т.е. для суммы (2.13) выполняется условие (2.14).

Интегрируя по частям, получаем, что

$$I_s=O^*\left((s+1)^{-3}\left(1-\frac{C}{q}\right)^s\right). \quad (2.18)$$

Далее при $j-i\geq q$ из (2.3), (2.13), (2.15)-(2.17) имеем для некоторой $C_1=O^*(1)$

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\frac{1}{q^3}\sum_{s=j-i}^{j+i}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^s\right)=$$

$$=O^*\left(\frac{1}{q^3}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{j-i}\sum_{s=j-i}^{j+i}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{s-(j-i)}\right). \quad (2.19)$$

Отсюда при $i\leq q$, поскольку все слагаемые в правой части (2.19) есть величины $O^*(1)$, имеем

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\frac{i}{q^3}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{j-i}\right), \quad (2.20)$$

а при $i>q$ получаем из (2.19)

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\frac{1}{q^2}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{j-i}\left(1-\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{2i}\right)\right)=$$

$$=O^*\left(\frac{1}{q^2}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{j-i}\right). \qquad (2.21)$$

Из (2.20),(2.21) вытекают оценки (2.1) при $j\ge i, 1\le i, j\le 3n/4, 1+j-i\ge q$. Пусть $j-i<q$. Тогда из (2.3),(2.13),(2.15)-(2.19) имеем

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\sum_{s=j-i}^{\min\{q,i+j\}}\frac{1}{(s+1)^3}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^s+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{q^3}\sum_{s=\min\{q,i+j\}+1}^{i+j}\left(1-\frac{C_2}{q}\right)^s\right). \qquad (2.22)$$

(вторая сумма равна нулю, если $i+j=O(q)$).

Пусть $j-i<i\le q$. Тогда $i+j=O(q)$ и из (2.22) имеем

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\sum_{s=j-i}^{i+j}\frac{1}{(s+1)^3}\right)=O^*\left(\frac{i}{(1+j-i)^3}\right)=$$

$$=O^*\left(\frac{i}{(1+j-i)^3}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^{j-i}\right),$$

т.е. (2.1) при $0\le j-i<i\le q$.

Пусть $j-i<q\le i$. Тогда из (2.22) получаем

$$g_{ij,q}^{(-1)}=O^*\left(\sum_{s=j-i}^{q}\frac{1}{(s+1)^3}\left(1-\frac{C_1}{q}\right)^s+\frac{1}{q^3}\sum_{s=q+1}^{j+i}\left(1-\frac{C_2}{q}\right)^s\right)=$$

$$=O^*\left(\sum_{s=j-i}^{q+j-i}\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{1}{q^3}\sum_{s=q+j-i+1}^{j+i}\left(1-\frac{C_2}{q}\right)^s\right). \qquad (2.23)$$

При $j-i<q\le i$ первая сумма в правой части (2.23) есть

$$O^*\left(\frac{1}{(1+j-i)^2}\right)=O^*\left(\frac{1+j-i}{(1+|j-i|)^3}\left(1-\frac{C}{q}\right)^{|i-j|}\right),$$ а вторая оценивается аналогично (2.19), (2.21) величиной $$O\left(\frac{1}{q^2}\left(1-\frac{C}{q}\right)^{q+j-i+1}\right)=O\left(\frac{1+j-i}{(1+j-i)^3}\left(1-\frac{C}{q}\right)^{|i-j|}\right).$$

Тем самым оценки (2.1) полностью доказаны при $j\ge i, 1\le i, j\le 3n/4$. При других *i,j* доказательство аналогично. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Для элементов $g_{ij,q}$ матриц G_q^{-1} имеют место неравенства $0<g_{ij,q}^{(-1)}\le g_{i+1,j+1,q}^{(-1)}$, если $i+1<n+1$ и $g_{ij,q}^{(-1)}\ge g_{i+1,j+1,q}^{(-1)}>0$, если $i+j\ge n+1$. Для строчных сумм $\sigma_{i,q}$ элементов *i*-й строки матрицы G_q^{-1} имеем $\sigma_{i,q}\le\sigma_{i+1,q}$, если $1\le i\le[n/2]$, и $\sigma_{iq}\ge\sigma_{i+1,q}$, если $[n/2]+1\le i\le n$.

Действительно, элементы и строчные суммы матриц N_ν с элементами $n_{ij,\nu}=\left(\mu_\nu^{|i-j|}-\mu_\nu^{i+j}\right)\left(1-\mu_\nu^{2(n+1-\max\{i,j\})}\right)$ удовлетворяют таким оценкам в силу условия $|\mu_\nu|<1$, а матрицы G_q^{-1} есть линейные комбинации N_ν с неотрицательными коэффициентами (см. (2.11)).

Лемма 1 (см. [5]). Матрицы в (1.5), (1.9) являются *M*-матрицами, и справедливы оценки

$$\left\|G_i^{-1}\right\|_\infty\le\frac{i}{i+1}, G_i e\ge\left(1+\frac{1}{i}\right)e, i=1,2,\dots,n \qquad (2.24)$$

и аналогичные оценки для $\hat{G}_i$.

2.2. Некоторые свойства бесконечных теплицевых матриц

Символами вида $BI=\{bI_{ij}, -\infty<i,j<+\infty\}$ будем обозначать бесконечные теплицевы матрицы $(bI_{ij}=bI_{i-j})$. Арифметические операции над этими матрицами будем понимать в смысле операций над соответствующими операторами в l_p.

Рассмотрим матрицы, определяемые соотношениями (1.6), (1.8). Учитывая, что $E_s=E_q=E=tridiag\{-1,4,-1\}$, а $F_s=D_s=I$, запишем (1.6) и (1.8) в виде

$$G_1=\hat{G}_1=E, G_{s+1}=E-G_s^{-1}, \hat{G}_{s+1}=E-\left(\hat{G}_s^{-1}\right)^{(k)}.$$

Рассмотрим соответствующие итерационные процессы над бесконечными теплицевыми матрицами. Пусть

$$GI_1=\hat{G}I_1=EI, GI_{s+1}=EI-GI_s^{-1}, \hat{G}I_{s+1}=EI-\left(\hat{G}I_s^{-1}\right)^{(k)} \qquad (2.25)$$

Лемма 2. Существуют пределы $GI = \lim_{s\to\infty} GI_s$ (понимаемые в смысле сходимости по операторной норме в l_p), для элементов gI_{ij} которых справедливы формулы

$$gI_{ij} = O^*\left((1-|i-j|)^{-2}\right), \quad 0 \le |i-j| < +\infty, \tag{2.26}$$

$$gI_{ij} = \frac{1}{\pi}(1-|i-j|)^{-2}\left(1+O\left((1+|i-j|)^{-1}\right)\right), \quad 0 \le |i-j| < +\infty, \tag{2.27}$$

Доказательство. Аналогично формулам (2.11) для элементов $gI_{ij,q}^{-1}$ матриц GI_q^{-1} справедливы представления

$$gI_{ij,q}^{(-1)} = \frac{2}{q+1}\sum_{\nu=1}^{q}\sin^2\frac{\pi}{q+1}\frac{\mu_\nu}{1-\mu_\nu^2}\mu_\nu^{|j-i|}.$$

Переходя здесь к пределу при $q\to\infty$, получаем, что

$$gI_{ij,q}^{(-1)} = 2\int_0^1 \sin^2 \pi x \frac{\mu(x)}{1-\mu(x)^2}\mu(x)^{|j-i|}dx,$$

$$\mu(x) = 1+\frac{\lambda(x)}{2}-\sqrt{\lambda(x)+\frac{\lambda(x)^2}{2}}, \quad \lambda(x) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Делая в интеграле замену $\mu(x) = z$ и интегрируя по частям, получим, что при $|i-j| \ge 2$

$$gI_{ij}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{3-\sqrt{8}}^1 \sqrt{6z-z^2-1}(1-z)z^{|i-j|-2}dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{3-\sqrt{8}}^1 (1-z)z^{|i-j|-2}dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{3-\sqrt{8}}^1 \frac{5-z}{2+\sqrt{6z-z^2-1}}(1-z)^2 z^{|i-j|-2}dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(|i-j|-1)|i-j|} - \frac{\sqrt{8}-2}{\pi}\frac{\left(3-\sqrt{8}\right)^{|i-j|-1}}{(|i-j|-1)} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\left(3-\sqrt{8}\right)^{|i-j|}}{(|i-j|-1)\ |i-j|} + O\left(\int_0^1 (1-z)^2 z^{|i-j|-2}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(1-|i-j|)^{-2}\left(1+O\left((1+|i-j|)^{-1}\right)\right),$$

и формула (2.27) доказана при $|i-j| \ge 2$. Но при $|i-j| \le 1$ из последнего представления gI_{ij}^{-1} в виде интеграла следует, что $gI_{ij} = O^*(1)$, т.е. (2.27) также имеет место. Лемма доказана.

Пусть $\Delta G_s = \hat{G}_s - G_s$, $\Delta GI_s = \hat{G}I_s - GI_s$, $G_s^{-1} - \left(G_s^{-1}\right)^{(k)} =^{(k)} G_s^{-1}$, $GI_s^{-1} - \left(GI_s^{-1}\right)^{(k)} =^{(k)} GI_s^{-1}$. Тогда имеем

$$\Delta G_{s+1} = \hat{G}_s^{-1}\Delta G_s G_s^{-1} +^{(k)} G_s^{-1}, \tag{2.28}$$

$$\Delta GI(s+1) = \hat{G}I_s^{-1}\Delta GI_s^{-1} +^{(k)} GI_s^{-1}.$$

Следующие факты были установлены в [2, предложения 7-9,13,15].

Лемма 3. Для любых s справедливы неравенства

$$GI_{s+1}^{-1} \ge GI_s^{-1} \ge 0, \hat{G}I_{s+1}^{-1} \ge \hat{G}I_s^{-1} \ge 0, \quad GI_{s+1} \le GI_s,$$

$$\hat{G}I_{s+1} \le \hat{G}I_s, \quad \Delta GI_{s+1} \ge \Delta GI_s \ge 0, \quad 0 \le \Delta gI_{ij,s},$$

$$0 < \hat{g}_{ij,s}^{(-1)} \le \hat{g}I_{ij,s}^{(-1)}, \quad 0 < \left|\hat{g}_{ij,s}\right| \le \left|gI_{ij,s}\right|, \quad \left|\Delta G_{ij,s}\right| \le \frac{C}{k^2}.$$

Существуют пределы $\lim_{s\to\infty} GI_s = GI$, $\lim_{s\to\infty}\hat{G}I_s = \hat{G}I$, $\lim_{s\to\infty}\Delta GI_s = \Delta GI$, являющиеся, соответственно, решениями уравнений

$$GI = EI - GI^{-1}, \hat{G}I = EI - \left(\hat{G}I^{-1}\right)^{(k)},$$

$$\Delta GI = \hat{G}I^{-1}\Delta GIGI^{-1} +^{(k)} \hat{G}I^{-1}.$$

Лемма 4. Элементы матриц $GI_s^{-1}, \hat{G}I_s^{-1}, GI_s$, $\hat{G}I_s, GI^{-1}, \hat{G}I^{-1}, GI, \hat{G}I$ в каждой строке и столбце монотонно убывают по модулю от главной диагонали.

Установим еще одно вспомогательное утверждение. Пусть $\{HI = HI(k) = \{h_{i-j}(k)\}, k \in N\}$ - семейство бесконечных симметричных $(h_{i-j} = h_{j-i})$ теплицевых матриц с элементами, удовлетворяющими оценкам

$$0 < \frac{1}{C(1+|i-j|)^2} \le h_{i-j} \le \frac{\hat{C}}{(1+|i-j|)^2}, \tag{2.29}$$

причем

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h_i = 1 - \frac{C_1}{k}. \tag{2.30}$$

Рассмотрим СЛАУ

$$r_i = \sum_{j=-k}^{k} h_{i-j} r_j + \sum_{|j|\ge k+1} h_{i-j} \frac{(k+1)^2}{j^2}, \quad -k \le i \le k. \tag{2.31}$$

Лемма 5. СЛАУ (2.31) имеет единственное решение $r>0$, причем найдется такое натуральное k_0 и константы $C_2>4, \alpha\in(0,1/2)$, что при всех $k \ge k_0$ для элементов r_i справедливы неравенства

$$r_i \ge \left(1 - C_2 \frac{(k-|i|+1)^\alpha}{k^\alpha}\right)_+, 0 \le |i| \le k. \tag{2.32}$$

Доказательство. Положительность решения (2.31) следует из его представления в виде ряда Неймана, сходящегося в силу (2.29), (2.30). Для доказательства (2.32) будем решать (2.31) методом простой итерации, взяв вектор в правой части (2.32) в качестве начального приближения $r^0 = \{r_i^0\}$. Поскольку $h_{i-j}>0$, то если мы докажем, что при некоторых C_2 и α будет $r_i^1 \ge r_i^0$, то в силу монотонности лемма будет доказана. Будем считать, что C_2, α, k_0 уже выбраны, а требования на них уточним в процессе доказательства. Поскольку ограничений сверху на k_0 не будет, то считаем, что $k \ge k_0$ достаточно велико.

Зафиксируем произвольное $i \in \left[\left(1-C_2^{-1/\alpha}\right)k, k\right]$ (для отрицательных i доказательство аналогично, а при $i < \left(1-C_2^{-1/\alpha}\right)k$ имеем $r_i=0$ и неравенство $r_i^1 \ge r_i^0$ справедливо в силу $r_i^1 \ge 0$). Положим $j_0 = (k+1)\sqrt{k^\alpha/\left(k^\alpha - C_2(k-i+1)^\alpha\right)}$. Тогда при $|j| \le j_0$ будет $r_i^0 \le (k+1)^2/j^2$, а при $|j|>j_0$ будет $r_i^0 > (k+1)^2/j^2$.

Имеем, учитывая (2.30), (2.31) для r_i^0

$$r_1^i = \sum_{j=-k}^{k} h_{i-j} r_i^0 + \sum_{|j|\ge k+1} h_{i-j} \frac{(k+1)^2}{j^2} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_{i-j} r_i^0 + \sum_{j=i-(k-i)}^{i+(k-i)} h_{i-j}\left(r_j^0 - r_i^0\right) + \sum_{j=-k}^{i-(k-i)-1} h_{i-j}\left(r_j^0 - r_i^0\right) +$$

$$+ \sum_{k+1\le|j|\le j_0} h_{i-j}\left(\frac{(k+1)^2}{j^2} - r_i^0\right) + \sum_{|j|\ge j_0+1} h_{i-j}\left(\frac{(k+1)^2}{j^2} - r_i^0\right) =$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 + \sum\nolimits_5. \tag{2.33}$$

Заметим, что в силу равенств $h_{i-j} = h_{j-i}$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\nu=1}^{k-i} h_\nu \left(\left(r_{i+\nu}^0 - r_i^0\right) - \left(r_i^0 - r_{i-\nu}^0\right)\right) \ge 0, \tag{2.34}$$

т.к. в силу (2.31) для r_i^0 и условия $\alpha \in (0,1/2)$ будет $r_{i+\nu}^0 - r_i^0 \ge r_i^0 - r_{i-\nu}^0$. Кроме того, в силу (2.30),

$$\sum\nolimits_1 = r_i^0 - \frac{C_1}{k} r_i^0. \tag{2.35}$$

Поэтому, если мы докажем, что при всех достаточно больших $k (k \ge k_0)$ для некоторых не зависящих от k, α, C_2 констант $C_3>0, C_4>0$

$$\sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4 \ge \frac{C_2 C_3}{k^\alpha (k-|i|+1)^{1-\alpha}}, \tag{2.36}$$

$$\left|\sum\nolimits_5\right| \le \frac{C_4}{k^{1-\alpha}(k-|i|+1)^\alpha}, \tag{2.37}$$

то, полагая $C_2 \ge 3\max\{C_1/C_3, C_1/C_4\}$, из (2.33)-(2.37) получаем неравенство $r_i^1 \ge r_i^0$.

Для доказательства (2.37) заметим, что

$$j_0 = (k+1) + (k+1)\left(\sqrt{\frac{k^\alpha}{k^\alpha - C_2(k-i+1)^\alpha}} - 1\right) = k+1+$$

$$+(k+1)\frac{C_2(k-i+1)^\alpha}{\left(k^\alpha - C_2(k-i+1)^\alpha + \sqrt{k^\alpha}\sqrt{\left(k^\alpha - C_2(k-i+1)^\alpha\right)}\right)} \ge$$

$$\ge k+1+\frac{1}{2}k^{1-\alpha/2}\frac{C_2(k-i+1)^\alpha}{\sqrt{\left(k^\alpha - C_2(k-i+1)^\alpha\right)}} \ge$$

$$\ge k+1+\frac{C_2}{2}k^{1-\alpha}(k-i+1)^\alpha.$$

Отсюда имеем, учитывая (2.29) и то, что $C_2 \ge 1$, $i<k+1$, $r_i^0 > (k+1)^2/j^2$,

$$\left|\sum\nolimits_5\right| \le C r_i^0 \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{(1+j-i)^2} \le \frac{C}{j_0 - i} \le \frac{2C}{C_2}\frac{1}{k^{1-\alpha}(k-i+1)^\alpha},$$

и (2.37) доказано.

Докажем (2.36). Имеем

$$\sum\nolimits_3+\sum\nolimits_4 \ge C_2\sum_{j=-k}^{i-(k-i)-1}\left(\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k-j+1)^\alpha}{k^\alpha}\right)h_{i-j}+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{j_0-1}h_{i-j}\left(\frac{(k+1)^2}{j^2}-\left(1-C_2\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}\right)\right)=$$

$$=C_2\sum_{j=-k}^{i-(k-i)-1}\left(\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k-j+1)^\alpha}{k^\alpha}\right)h_{i-j}+$$

$$+C_2\sum_{j=k+1}^{j_0-1}h_{i-j}\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}-\sum_{j=k+1}^{j_0-1}h_{i-j}\left(1-\frac{(k+1)^2}{j^2}\right)=$$

$$=\sum{}^{(1)}+\sum{}^{(2)}-\sum{}^{(3)}. \qquad (2.38)$$

Для $\sum_3$ имеем в силу (2.29)

$$\sum{}^{(3)}\le C\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{1}{(j-i)^2j^2}\left(j^2-(k+1)^2\right)\le 2C\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{j-k-1}{(j-i)^2j}=$$

$$=2C\sum_{\nu=0}^{+\infty}\frac{\nu}{(\nu+(k-i+1))^2(\nu+k+1)}\le\frac{2C}{(k-i+1)^2k}\sum_{\nu=0}^{k-i}\nu+$$

$$+\frac{2C}{k}\sum_{\nu=k-i+1}^{k}\frac{1}{\nu+(k-i+1)}+2C\sum_{\nu=k+1}^{+\infty}\frac{1}{\nu^2}\le$$

$$\frac{C}{k}+\frac{2C}{k}\ln\frac{k}{k-i+1}+\frac{2C}{k}\le\frac{5C}{k^\alpha(k-i+1)^{1-\alpha}}. \qquad (2.39)$$

(последний переход в неравенстве справедлив в силу формулы $\frac{(k-i+1)^{1-\alpha}}{k^{1-\alpha}}\ln\frac{k}{k-i+1}\le 1$ при $\alpha\in(0,1/2)$).

Для $\sum^{(1)}+\sum^{(2)}$, поскольку $h_{i-j}=h_{j-i}$, имеем, полагая $i-j=\nu$,

$$\sum{}^{(1)}+\sum{}^{(2)}=C_2\sum_{\nu=k-i+1}^{k+i}\left(\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k-i+1+\nu)^\alpha}{k^\alpha}\right)h_\nu+$$

$$+C_2\sum_{\nu=k-i+1}^{j_0-i-1}h_\nu\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}=$$

$$=C_2\sum_{\nu=k-i+1}^{p(k-i+1)}\left(2\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k-i+1+\nu)^\alpha}{k^\alpha}\right)h_\nu+$$

$$+C_2\sum_{\nu=p(k-i+1)+1}^{k+i}\left(\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k-i+1+\nu)^\alpha}{k^\alpha}\right)h_\nu+$$

$$+C_2\sum_{\nu=p(k-i+1)+1}^{j_0-i-1}h_\nu\frac{(k-i+1)^\alpha}{k^\alpha}, \qquad (2.40)$$

где

$$p\in\left[1,\frac{j_0-i-1}{k-i+1}\right]\subset\left[1,\frac{C_2}{2}\frac{k^{1-\alpha}}{(k-i+1)^{1-\alpha}}\right],\ p\ge 2 \qquad (2.41)$$

- натуральное число, которое определим ниже. Полагая в (2.40) $k-i+1=k$, и учитывая, что третья сумма в (2.40) неотрицательна, имеем

$$\sum{}^{(1)}+\sum{}^{(2)}\ge\frac{C_2}{2}\sum_{\nu=k}^{pk}\frac{1}{C}\left(2\frac{k^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k+\nu)^\alpha}{k^\alpha}\right)\frac{1}{\nu^2}-$$

$$-CC_2\sum_{\nu=pk+1}^{+\infty}\frac{1}{\nu^2}\frac{(k+\nu)^\alpha}{k^\alpha}. \qquad (2.42)$$

Далее, учитывая, что $p\ge 2\alpha\in(0,1/2)$, получаем

$$CC_2\sum_{\nu=pk+1}^{+\infty}\frac{1}{\nu^2}\frac{(k+\nu)^\alpha}{k^\alpha}\le CC_2\left(1+\frac{1}{p}\right)^\alpha\frac{1}{k^\alpha}\sum_{\nu=pk+1}^{+\infty}\frac{1}{\nu^{2-\alpha}}\le$$

$$\le CC_2\left(1+\frac{1}{p}\right)^\alpha\frac{1}{k^\alpha}\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{(pk)^{1-\alpha}}\le\frac{4CC_2}{(pk)^{1-\alpha}}\frac{1}{k^\alpha}\le$$

$$\le\frac{4CC_2}{\sqrt{p}}\frac{1}{k^{1-\alpha}}\frac{1}{k^\alpha}, \qquad (2.43)$$

$$\frac{C_2}{2}\sum_{\nu=k}^{pk}\frac{1}{C}\left(2\frac{k^\alpha}{k^\alpha}-\frac{(k+\nu)^\alpha}{k^\alpha}\right)\frac{1}{\nu^2}\ge\frac{C_2}{2k^\alpha}\sum_{\nu=k}^{pk}\frac{1}{C}\frac{\left(2-(p+1)^\alpha\right)k^\alpha}{\nu^2}\ge$$

$$\ge\frac{C_2}{4Ck^\alpha}\frac{2-(p+1)^\alpha}{k^{1-\alpha}}. \qquad (2.44)$$

Потребуем теперь, чтобы C_2, p, α удовлетворяли условиям

$$\frac{4}{\sqrt{p}} \le \frac{1}{16C^2},\ (p+1)^\alpha \le 3/2,\ 5C \le \frac{C_2}{32C}. \qquad (2.45)$$

(это будет выполняться, например, при $C_2 \ge \max\{4,\ 32C,\ 160C^2\},\ p=[2^{11}2C^4]+1,\ \alpha=\log_{p+1}3/2$).

Тогда из (2.38)-(2.45) получим формулу (2.36) при $C_3 = 1/(32C)$. Тем самым лемма 5 доказана.

Замечание 4. Рассмотрим наряду с (2.31) СЛАУ

$$\varepsilon_i = \sum_{j=-k}^{k} h_{i-j}\varepsilon_j + \sum_{|j|\ge k+1} h_{i-j}k_j\ , \qquad (2.46)$$

где $0 < k_j \le k$ - заданные числа. Тогда в силу условия (2.30) получаем, что $\max\limits_{-k\le i\le k}\varepsilon_i \le k$.

2.3. Оценки элементов матриц $\hat{G}_\nu$

В этом пункте мы установим следующее утверждение.

Теорема 3. Найдутся такие константы $C_2 > 0, \alpha \in (0,1/2)$, не зависящие от n,k, что для элементов $\hat{g}_{ij,\nu}$, $\hat{g}^{(-1)}_{ij,\nu}$ матриц $\hat{G}_\nu$, $\hat{G}^{-1}_\nu$ справедливы оценки

$$\left|\hat{g}_{ij,\nu}\right| \le \frac{C_2}{(1+|i-j|)^2}\frac{(k-|i-j|+1)^\alpha}{k^\alpha}, 0 \le |i-j| \le k, \qquad (2.47)$$

$$\left|\hat{g}^{-1}_{ij,\nu}\right| \le \begin{cases} \dfrac{C_2}{(1+|i-j|)^2}\dfrac{(k-|i-j|+1)^\alpha}{k^\alpha}, 0 \le |i-j| \le k, \\ \dfrac{C_2}{k^{\alpha/2}(1+|i-j|)^2}, |i-j| > k \end{cases} \qquad (2.48)$$

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать оценки (2.47), (2.48) для элементов $\hat{gI}_{ij}, \hat{gI}^{(-1)}_{ij}$ бесконечных теплицевых матриц $\hat{G}I,\ \hat{G}I^{-1}$ удовлетворяющих уравнению

$$\hat{G}I = EI - \left(\hat{G}I^{-1}\right)^{(k)}. \qquad (2.49)$$

Рассмотрим также бесконечные теплицевы матрицы $GI : GI = EI - GI^{-1}$. Пусть $\Delta G = \hat{G}I - GI$. Тогда из (2.49) получаем, что $\Delta G = GI^{-1} - \left(\hat{G}I^{-1}\right)^{(k)} = \left(GI^{-1}\Delta G\hat{G}I^{-1}\right)^{(k)} + ^{(k)}GI^{-1}$. Учитывая, что бесконечные теплицевы матрицы коммутируют, получим, что

$$\Delta G = \left(\tilde{G}\Delta G\right)^{(k)} + ^{(k)}GI^{-1}, \qquad (2.50)$$

где элементы $\tilde{g}_{ij}$ матрицы $\tilde{G}$ в силу теоремы 2 и результатов [6] удовлетворяют оценкам

$$\left|\tilde{g}_{ij}\right| \le \frac{C}{(1+|i-j|)^2}, \qquad (2.51)$$

а также, учитывая, что $\left\|GI^{-1}\right\|_\infty = 1$, $\left\|\hat{G}I^{-1}\right\|_\infty = 1 - C/k$, оценкам

$$\left\|\tilde{G}\right\|_\infty = \left(1 - \frac{C}{k}\right). \qquad (2.52)$$

Изучим уравнение (2.50). Учитывая теплицевость и симметрию $\Delta G, GI^{-1}$, обозначим $\Delta G_{ij} = \Delta G_{i-j} = r_{i-j}$. Поскольку при $|i-j| \ge k+1$ имеем $\Delta G_{ij} = \left(^{(k)}GI^{-1}\right)_{ij}$, а в силу леммы 2 при $|j| \ge k+1$ будет $\left(GI^{-1}\right)_{ii+j} = \left(GI^{-1}\right)_{ii+k+1}\dfrac{(k+1)^2}{j^2}\left(1+O\left(k^{-1}\right)\right)$, то для r_i получаем СЛАУ

$$r_i = \sum_{j=-k}^{k}\tilde{g}_{i-j}r_j + \left(GI^{-1}\right)_{ii+k+1}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\sum_{|j|\ge k+1}\tilde{g}_{i-j}\frac{(k+1)^2}{j^2},$$

$-k \le i \le k$.

Отсюда в силу лемм 2,5 получаем при $|i-j| \le k$

$$r_i \ge \left(GI^{-1}\right)_{ii+k+1}\left(1 - C_6\frac{(k-|i|+1)^\alpha}{k^\alpha}\right)_+. \qquad (2.53)$$

Из (2.53) и леммы 2 имеем при $1 \le |i-j| \le k$

$$\left(\hat{G}I^{-1}\right)_{ij} = \left(GI^{-1}\right)_{ij} - r_{i-j} \le \left(GI^{-1}\right)_{ij} - \left(GI^{-1}\right)_{ij}\frac{(1+|i-j|)^2}{(k+1)^2}\times$$

$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{1+|i-j|}\right)\right)\left(1 - C_6\frac{(k-|i-j|+1)^\alpha}{k^\alpha}\right) \le$$

$$\le \left(GI^{-1}\right)_{ij}\left(1-\frac{\left(1+|i-j|\right)^2}{(k+1)^2}+C_8\frac{\left(k-|i-j|+1\right)^\alpha}{k^\alpha}\right)_+ \le$$

$$\le \left(GI^{-1}\right)_{ij} 2C_8\frac{\left(k-|i-j|+1\right)^\alpha}{k^\alpha},$$

откуда в силу равенств $\hat{G}I_{ij} = -\left(\hat{G}I^{-1}\right)_{ij}$ при $1<|i-j|\le k$ получаем (2.47) для $\hat{G}I$.

Докажем (2.48). При $|i-j|\le k$ они вытекают из того, что $\left(\hat{G}I^{-1}\right)^{(k)} = EI-\hat{G}I$ и оценок для элементов $\hat{G}I$. Пусть $|i-j|>k$. Представим $\hat{G}I$ в виде $\hat{G}I = D_1+D_2$, где $D_1 = diag\left\{\hat{g}I_{11},...,\hat{g}I_{nn}\right\}$. Тогда $\hat{G}I^{-1} = D_1^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(D_1^{-1}D_2\right)^i$. Учитывая, что $D_1^{-1}D_2$ есть (2k+1)-диагональная матрица, получаем, что элемент $\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}$ матрицы $\hat{G}I^{-1}$ при $|i-j|=l$ есть элемент суммы ряда по $i\in\left[[l/k]\ ,\ +\infty\right)$. Но поскольку $\hat{G}Ie\ge e$ и $\hat{G}I$ есть M-матрица, то $\left\|D_1^{-1}D_2\right\|_\infty\le q<1$, откуда следует оценка $\left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}\right| \le \left\|D_1^{-1}\right\|_\infty(1-q)^{-1}(q^{1/k})^{|i-j|}$. Наконец, в силу леммы 4, элементы $\left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}\right|$ монотонно убывают с ростом $|i-j|$. Поэтому при $|i-j|\ge k$ имеем $\left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}\right| \le \left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ii+k}^{(-1)}\right| \le C/k^{2+\alpha}$.

Итак, при $|i-j|>k$ будет $\left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}\right| \le$ $\le C\min\left\{\left(q^{1/k}\right)^{|i-j|}, k^{-(2+\alpha)}\right\}$. Отсюда при $|i-j|\le k^{1+\alpha/4}$ имеем $\left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}\right| \le Ck^{-(2+\alpha)} \le C\left(1+|i-j|\right)^{-2}k^{-\alpha/2}$, а при $|i-j|>k^{1+\alpha/4}$ имеем $\left|\overset{\wedge}{gI}{}_{ij}^{(-1)}\right| \le \left(q^{1/k}\right)^{|i-j|} = q^{|i-j|/k} \le q^{|i-j|^{\alpha/4}} \le$ $\le C\left(1+|i-j|\right)^{-2}q^{\frac{1}{2}|i-j|^{\alpha/4}} \le C\left(1+|i-j|\right)^{-2}q^{\frac{1}{2}k^{\alpha/4}} \le$ $\le C(q,\alpha)\ \left(1+|i-j|\right)^{-2}k^{-\alpha/2}$. Тем самым оценка (2.48) и теорема 3 доказаны.

2.4. Оценки норм матриц $\hat{G}_i$

Лемма 6. Пусть ${}^{(k)}\hat{G}_i = \hat{G}_i^{-1}-\left(\hat{G}_i^{-1}\right)^{(k)}$. Тогда имеют место оценки

$$\left\|{}^{(k)}\hat{G}_i\right\|_p \le \frac{C}{k^2}, 1\le p\le\infty .$$

Доказательство. Имеем ${}^{(k)}\hat{G}_i = \hat{G}_i^{-1}\left(I-\hat{G}_i\left(\hat{G}_i^{-1}\right)^{(k)}\right)$. Пусть q_{sj} - элементы матрицы $\hat{G}_i\left(\hat{G}_i^{-1}\right)^{(k)}$. Тогда $q_{ss}=1, q_{sj}=0$ для $|s-j|>2k$. Далее из теоремы 3 имеем при $1\le s-j<k+1$

$$|q_{sj}| = \left|\sum_{\nu=s-k}^{j+k}\hat{g}_{s\nu}\hat{g}_{\nu j}^{(-1)}\right| = \left|-\sum_{\nu=j+k+1}^{s+k}\hat{g}_{s\nu}\hat{g}_{\nu j}^{(-1)}\right| \le C\sum_{\nu=j+k+1}^{s+k}\frac{1}{(\nu-s+1)^2}\times$$

$$\times\frac{1}{(\nu-j+1)^2}\frac{1}{k^\alpha} \le \frac{C}{k^{2+\alpha}}\sum_{\kappa=0}^{s-j-1}\frac{1}{(k-\kappa)^2} \le \frac{C}{k^{2+\alpha}}\frac{1}{k-(s-j)+1}, \tag{2.54}$$

а при $k+1\le s-j\le 2k$

$$|q_{sj}| = \left|\sum_{\nu=s-k}^{j+k}\hat{g}_{s\nu}\hat{g}_{\nu j}^{(-1)}\right| \le C\sum_{\nu=s-k}^{j+k}\frac{1}{(1+s-\nu)^2}\frac{\left(k-(s-\nu)+1\right)^\alpha}{k^\alpha}\times$$

$$\times\frac{1}{(1+\nu-j)^2}\frac{\left(k-(\nu-j)+1\right)^\alpha}{k^\alpha} = \sum_{\kappa=s-k-j}^{k}\frac{1}{(1+k)^2}\times$$

$$\times\frac{(k-\kappa+1)^\alpha}{k^\alpha}\frac{1}{\left(1+(s-j)-\kappa\right)^2}\frac{\left(k-(s-j)+\kappa+1\right)^\alpha}{k^\alpha} =$$

$$= \sum_{\kappa=s-k-j}^{\left[\frac{s-j}{2}\right]}(\ldots)+\sum_{\kappa=\left[\frac{s-j}{2}\right]+1}^{k}(\ldots) \le \frac{C}{k^{\alpha+2}}\sum_{\kappa=s-k-j}^{\left[\frac{s-j}{2}\right]}\frac{\left(\kappa-(s-k-j)+1\right)^\alpha}{(1+\kappa)^2}+$$

$$+\frac{C}{k^{\alpha+2}}\sum_{\kappa=\left[\frac{s-j}{2}\right]+1}^{k}\frac{1}{\left(1+(s-j)-\kappa\right)^{2-\alpha}} = \frac{C_1}{k^{2+\alpha}}\frac{1}{\left(1+(s-j)-k\right)^{1-\alpha}}. \tag{2.55}$$

Из (2.54) имеем

$$|q_{sj}| \le C\begin{cases}\left(k^{2+\alpha}\left(k+1-|s-j|\right)^{1-\alpha}\right)^{-1}, 1\le|s-j|\le k,\\ \left(k^{2+\alpha}\left(|s-j|-k\right)^{1-\alpha}\right)^{-1}, k+1\le|s-j|\le 2k\end{cases} \tag{2.56}$$

Поэтому, оценивая суммы q_{sj} по s и по j, получаем

$$\left\|I-\hat{G}_i\left(\hat{G}_i^{-1}\right)^{(k)}\right\|_p \le \frac{C}{k^2}, p=1,\infty . \tag{3.1}$$

Для других $p \in (1, \infty)$ эти оценки вытекают из интерполяционных теорем [7]. Лемма доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Лемма 7. Для матриц $A = (D+G)G^{-1}(G+F)$ и $\hat{A} = (D+\hat{G})\hat{G}^{-1}(\hat{G}+F)$ имеют место оценки

$$\left\|A - \hat{A}\right\|_p \le \frac{C}{k^2}, 1 \le p \le \infty. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Из определения $\hat{G}_i$ (см. (1.8)) имеем $\hat{A} - A = diag\left\{ {}^{(k)}\hat{G}_i \right\}$, откуда в силу леммы 6 получаем (3.1).

Лемма доказана.

Лемма 8. Для любого вектора *u* справедливы оценки

$$\left(\hat{A}u, u\right) \ge \frac{C}{k^2}(u, u), \qquad (3.2)$$

где C_1>0 не зависит от *u,n,k*.

Данная лемма была доказана в [2].

Докажем теорему 1. Пусть $\|u\|_2 = 1$. Оценим величину $\left(\hat{A}u, u\right)/(Au, u)$. Рассмотрим два случая. 1. $C \ge (Au, u) \ge 2C/k^2$. 2. $2C/k^2 > (Au, u)$, где C>0 - константа из (3.1). В случае 1) из (3.1) имеем $\left(\hat{A}u,u\right)/(Au,u) = 1 - \left(\left(\hat{A}-A\right)u,u\right)/(Au,u) \ge 1 - C/(2C) = O^*(1)$. Оценка сверху аналогична. В случае 2) из (3.2) получаем $\left(\hat{A}u,u\right)/(Au,u) \ge \frac{C_1}{k^2}\frac{k^2}{2C}$, $\left(\hat{A}u,u\right)/(Au,u) \le$ $\le 1 + \left|\left(\left(\hat{A}-A\right)u,u\right)/(Au,u)\right| \le 1 + \frac{C_2 n^2}{k^2}$. Поэтому для любого ненулевого *u* получаем $C_3 \le \left(\hat{A}u,u\right)/(Au,u) \le C_4 \frac{n^2}{k^2}$, и оценка сверху в (1.9) доказана. Для доказательства оценки снизу заметим, что минимальное собственное число матрицы *A* есть величина $O\left(1/n^2\right)$ и на соответствующем собственном векторе *u* будем иметь с учетом (3.2) $\left(\hat{A}u,u\right)/(Au,u) \ge \frac{Cn^2}{k^2}$, и оценка снизу также доказана. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Наука, 1995.

2. Блатов И.А. Об оценках LU-разложений разреженных матриц и их приложениях к методам неполной факторизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т.37. N 3. С. 259-276

3. Воеводин В.В.,Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

4. Самарский А.А., Николаев Е.Н. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

5. Ильин В.П. О скорости сходимости неявных методов неполной факторизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т.33. N 1. С. 3-11.

6. Блатов И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский матем. журнал. 1996. Т. 37. N1. С.36-59.

7. Берг Дж., Лёфстрём Дж. Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.

8. Блатов И.А. О методе неполной факторизации в сочетании с быстрым преобразованием Фурье решения дискретного уравнения Пуассона в области с криволинейной границей // Сибирский журнал вычислительной математики. 1998. N 3. С. 197-216.